Francis **Cottet**

AIDE-MÉMOIRE

Traitement du **signal**

IUT • Master • Écoles d'ingénieurs

- Bases et principes généraux
- Méthodes et effets associés
- Démonstrations des résultats induits

3e édition

DUNOD

Tout le catalogue sur
www.dunod.com

DUNOD
ÉDITEUR DE SAVOIRS

Illustration de couverture : © Eray-stock.adobe.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

© Dunod, 2011, 2017
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-077222-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Copyright © 2017 Dunod.

Table des matières

Avant-propos IX

Notations et abréviations XI

Partie 1

Le traitement des signaux analogiques

Chapitre 1. Définitions et représentation des signaux 3

1.1 Définitions 3
1.1.1 Définitions de base 3
1.1.2 Principales fonctions du traitement du signal 4
1.1.3 Les systèmes numériques 5
1.2 Représentation des signaux 6
1.2.1 Modélisation des signaux 6
1.2.2 Classification des signaux 8

Chapitre 2. Transformations de Fourier 13

2.1 Analyse spectrale des fonctions périodiques 13
2.1.1 Développement en série de Fourier 13
2.1.2 Représentations fréquentielles 15
2.1.3 Quelques propriétés 17
2.1.4 Exemples de développements en série de Fourier 18
2.2 Analyse spectrale des fonctions non périodiques 24
2.2.1 Transformée de Fourier 24
2.2.2 Propriétés de la transformée de Fourier 24
2.2.3 Exemples de transformées de Fourier 27

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Chapitre 3. Systèmes de transmission. Filtrage **31**

3.1 Systèmes de transmission 31
3.1.1 Définitions et propriétés 31
3.1.2 La convolution 34
3.2 Filtrage 36
3.2.1 Fenêtrage temporel 36
3.2.2 Filtrage fréquentiel 39
3.3 Corrélation 50
3.3.1 Puissance et énergie des signaux 50
3.3.2 Corrélation et densité spectrale 52
3.3.3 Théorème de Parseval 56

Chapitre 4. Modulation des signaux **57**

4.1 Introduction 57
4.1.1 Spectre d'un signal et bande passante d'un support 57
4.1.2 Types de transmission 58
4.1.3 Les différentes formes de modulation 59
4.2 Modulation d'amplitude 60
4.2.1 Principe de la modulation d'amplitude 60
4.2.2 Étude spectrale d'un signal modulé en amplitude 61
4.2.3 Puissance en modulation d'amplitude 63
4.2.4 Systèmes dérivés de la modulation d'amplitude 65
4.2.5 Procédés de la modulation d'amplitude 68
4.3 Modulation exponentielle 69
4.3.1 Principe 69
4.3.2 Modulation de fréquence 72
4.3.3 Modulation de phase 84
4.3.4 Modulation primaire/secondaire 87

Chapitre 5. Signaux aléatoires Bruit **91**

5.1 Signaux aléatoires 91
5.1.1 Définitions 91
5.1.2 Caractérisations statistiques (*cf.* annexes) 92
5.2 Le bruit 100
5.2.1 Définitions 100

Copyright © 2017 Dunod.

5.2.2 Rapport signal sur bruit 103
5.2.3 Traitement des signaux noyés dans le bruit 104

PARTIE 2

LE TRAITEMENT DES SIGNAUX NUMÉRIQUES

Chapitre 6. Numérisation des signaux 111

6.1 Échantillonnage 111
6.1.1 Échantillonnage idéal : définition 111
6.1.2 Théorème de l'échantillonnage 113
6.1.3 Effet du repliement de spectre 119
6.1.4 Échantillonnage naturel et autres procédés 126
6.2 Quantification du signal échantillonné 131
6.2.1 Effet de la quantification 131
6.2.2 Lois de compression et expansion du signal 134
6.3 Restitution du signal 135
6.3.1 Problématique 135
6.3.2 Interpolation idéale 137
6.3.3 Interpolation linéaire 138
6.3.4 Restitution par bloqueur 140
6.3.5 Filtre de restitution 141
6.3.6 Restitution par sur-échantillonnage 143

Chapitre 7. Analyse spectrale des signaux discrets 149

7.1 Les différentes représentations fréquentielles 149
7.2 Transformée de Fourier discrète 150
7.2.1 Définition 150
7.2.2 Transformée de Fourier et TFD 153
7.3 Transformée de Fourier rapide 156
7.4 Convolution et corrélation numériques 163
7.4.1 Convolution discrète 163
7.4.2 Corrélation discrète 165
7.5 Les fenêtres de pondération 166
7.5.1 Effet du fenêtrage temporel 166
7.5.2 Transformée de Fourier à fenêtre glissante 172

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

7.5.3 La transformée en ondelettes 173

Chapitre 8. Filtrage numérique 179

8.1 Introduction 179
8.1.1 Filtrage numérique : définition 179
8.1.2 Transformée en *z* 183
8.1.3 Filtrage numérique simple : lissage temporel 184
8.2 Synthèse des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie 186
8.2.1 Équation aux différences 187
8.2.2 Synthèse des filtres numériques par transformation de $H(p)$ en $H(z)$ 188
8.3 Synthèse des filtres numériques à réponse impulsionnelle finie 201
8.4 Réalisation des filtres numériques 203
8.4.1 Filtres numériques synthétisés par $H(z)$ 204
8.4.2 Filtres numériques basés sur la convolution 208
8.5 Techniques avancées de filtrage numérique 209
8.5.1 « Filtres » numériques non linéaires : valeur médiane 209
8.5.2 Filtres numériques multicadence 211

Chapitre 9. Les chaînes d'acquisition de données 213

9.1 Généralités 213
9.1.1 Introduction 213
9.1.2 Les types de signaux d'entrées/sorties 214
9.1.3 Codage de l'information au niveau d'un ordinateur 217
9.2 Capteurs et actionneurs 218
9.2.1 Introduction 218
9.2.2 Les caractéristiques des capteurs 219
9.2.3 Les principaux types de capteurs 222
9.2.4 Les principaux types d'actionneurs 226
9.3 Le câblage 228
9.3.1 La nature du câble 229
9.3.2 Les différentes configurations du câblage 230
9.4 Le conditionnement de signaux 230

Copyright © 2017 Dunod.

9.5 Les entrées/sorties numériques 231
9.6 Les entrées/sorties analogiques 233
9.6.1 La conversion numérique analogique 234
9.6.2 La conversion analogique numérique 235
9.6.3 Échantillonneur/bloqueur 236
9.7 La mise en œuvre d'une chaîne d'acquisition de données 236
9.7.1 Introduction 236
9.7.2 Architecture des cartes d'entrées/sorties analogiques 237
9.7.3 Caractéristiques des cartes d'entrées/sorties 238
9.7.4 Méthodologie de mise en œuvre d'une chaîne d'acquisition de données 240

Chapitre 10. Les bases du traitement des images 243

10.1 Introduction 243
10.2 Acquisition d'un signal « image » 245
10.2.1 Le contexte de l'acquisition 245
10.2.2 Le capteur de l'image 246
10.2.3 La numérisation de l'image 248
10.3 Traitement d'un signal « image » 251
10.3.1 Les méthodes d'élimination du bruit 251
10.3.2 Les transformations géométriques des images 254
10.4 Analyse d'un signal « image » 256
10.4.1 Les opération sur les images 257
10.4.2 L'utilisation des histogrammes pour le traitement des images 258
10.4.3 La détection de contour 259
10.4.4 La détection d'éléments (la reconnaissance des formes) 262
10.5 Conclusion 265

Annexe A. Annexes 267

A.1 Impulsion de Dirac 267
A.1.1 Définitions 267

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

A.1.2 Principales propriétés 268
A.2 Fonctions mathématiques utilisées en traitement du signal 270
A.2.1 Notations complexes 270
A.2.2 Formules trigonométriques 271
A.2.3 Fonctions sinus cardinal 271
A.2.4 Fonctions de Bessel 272
A.2.5 Probabilités et statistiques 272
A.3 Transformée de Laplace 278
A.3.1 Définitions 278
A.3.2 Propriétés 279
A.3.3 Exemples de transformées de Laplace 279

Bibliographie **281**

Lexique anglais-français **283**

Index **285**

Copyright © 2017 Dunod.

AVANT-PROPOS

Le contenu et l'organisation de ce livre ont été développés à partir de l'idée directrice selon laquelle, dans une application de mesures, de tests ou de contrôle d'un procédé physique, le concepteur se trouve confronté à des choix de traitements des signaux à mettre en œuvre afin de répondre à ces besoins. L'efficacité, l'effet produit, la nécessité, la validité du résultat sont autant de questions auxquelles il est difficile de répondre sans une connaissance et une pratique minimum de la discipline que constitue le **traitement du signal**.

Ce livre est composé de trois grandes parties dont le traitement des signaux analogiques (**partie 1**) et le traitement des signaux numériques (**partie 2**). Les cinq premiers chapitres sont consacrés aux bases du traitement des signaux analogiques et les trois suivants traitent des signaux numériques. La partie 3 est composée de deux chapitres d'ouverture : mise en œuvre d'une chaîne d'acquisition et traitement d'image.

Le chapitre 1 présente les définitions nécessaires à la compréhension de l'ouvrage. Il permet de plus de préciser les différentes représentations des signaux et de fixer les notations utilisées par la suite. Le chapitre 2 est consacré aux transformations de Fourier des signaux analogiques périodiques et non périodiques qui constituent la base du traitement des signaux. Cette analyse spectrale des signaux analogiques permet de bien décrire la représentation duale de tous signaux : temps et fréquence. Le chapitre 3 présente la théorie générale des systèmes de transmission et traite du filtrage analogique. Cette présentation permet ainsi une extension à tous les types de filtres et de sollicitations de ces filtres. Le chapitre 4 étudie un des aspects importants du traitement des signaux : la modulation. Les méthodes les plus utilisées y sont présentées. Le

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

chapitre 5 aborde le traitement des signaux aléatoires en particularisant l'étude au signal de « bruit ».

La transformation des signaux analogiques en signaux numériques est étudiée en détail au chapitre 6. Ce chapitre, qui présente en particulier le théorème d'échantillonnage, est sans doute le plus important de cet ouvrage. Le chapitre 7 est consacré à l'analyse spectrale des signaux numériques. Le chapitre 8 présente les concepts de base du domaine très riche que constitue le filtrage numérique avec des applications simples de diverses méthodes.

Les chapitres 9 et 10 concernent l'aspect applicatif du traitement du signal en présentant dans le premier de ces deux chapitres les chaînes d'acquisition et leur mise en œuvre. Le chapitre 10 décrit les bases du traitement d'image.

L'aspect « théorie du signal » a volontairement été limité au strict nécessaire pour la compréhension des modèles utilisés. Les bases mathématiques indispensables et utiles sont rappelées avec un maximum de simplicité et de concision en annexe.

Ce livre n'a pas pour but d'être un ouvrage exhaustif. Dans cet ouvrage, nous nous contenterons d'une approche pragmatique. En effet, il existe de nombreux ouvrages qui décrivent de façon complète toutes les méthodes et techniques utilisées dans le domaine du traitement du signal, sujet très vaste et en constante évolution. Par contre, il est destiné aux étudiants qui désirent acquérir une formation de base dans les techniques du traitement du signal. De plus cet ouvrage offre un outil de base à tous les techniciens et ingénieurs qui travaillent dans le domaine du test, de la mesure ou du contrôle de procédés. Ainsi cet ouvrage permettra à son lecteur de s'initier rapidement aux bases du traitement des signaux afin de les mettre en œuvre de façon pertinente.

Copyright © 2017 Dunod.

NOTATIONS ET ABRÉVIATIONS

$x * y$	Produit de convolution
Arctg (x)	Fonction arctangente
$b(t)$	Signal « bruit »
$\cos(x)$	Fonction cosinusoïdale
CAN	Convertisseur analogique-numérique
CNA	Convertisseur numérique-analogique
$\mathrm{Cov}_{xy}(\tau)$	Fonction de covariance
$C_{xx}(t)$	Fonction d'autocorrélation
$C_{xy}(t)$	Fonction d'intercorrélation
e^x	Fonction exponentielle
$E_{sp}[x^n]$	Espérance de x^n ou moment d'ordre n de la variable x
f	Fréquence
F	Transformée de Fourier
FFT	Transformée de Fourier rapide
$g_{\mathrm{fen}}(t)$	Fonction de la fenêtre de pondération
$h(t)$	Réponse impulsionnelle ou percusionnelle d'un filtre
$H(f)$, $H(p)$ ou $H(z)$	Fonction de transfert d'un filtre
$J_n(x)$	Fonction de Bessel de première espèce d'ordre n
L	Transformée de Laplace
$\log(x)$	Fonction logarithme à base 10

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

$\mathrm{Ln}\,(x)$	Fonction logarithme népérien
m	Moyenne temporelle
OMA	Onde modulée en amplitude
OMF	Onde modulée en fréquence
p	Fréquence complexe (opérateur de Laplace)
$\mathrm{Pgn}_{T0}(x)$	« Peigne » de Dirac (suite de pic de Dirac)
q	Quantum de conversion
r_{xy}	Coefficient de corrélation
$s(t)$	Signal temporel
$\overline{s}\,(t)$	Complexe conjugué de la variable $s(t)$
$\overline{s\,(t)}$	Moyenne temporelle du signal $s(t)$
$s_e(t)$	Signal temporel échantillonné
$s_{e,\Pi}(t)$	Signal temporel échantillonné tronqué ou limité temporellement
$S\,(f)$	Transformée de Fourier du signal $s(t)$
$S_e(f)$	Transformée de Fourier du signal échantillonné $s_e(t)$
$S_{e,\Pi}(f)$	Transformée de Fourier du signal échantillonné tronqué $s_{e,\Pi}(t)$
$\sin(x)$	Fonction sinusoïdale
$\mathrm{sinc}(x)$	Fonction sinus cardinal $[\sin(\pi x)/(\pi x)]$
$s_{\mathrm{ind}}(t)$	Réponse indicielle (réponse au signal $u(t)$)
$S_{xx}(f)$	Densité spectrale ou spectre en puissance
$S_{xy}(f)$	Densité spectrale d'interaction
t	Temps
$\boldsymbol{T}_z$	Transformée en z
TFD	Transformée de Fourier discrète
$T_e(= 1/F_e)$	Période d'échantillonnage d'un signal
$T_0(= 1/F_0)$	Période d'un signal

Copyright © 2017 Dunod.

$u(t)$	Échelon unité ou fonction de Heaviside
V_e	Tension d'entrée
V_s	Tension de sortie
w_N^{mk}	Fonction $e^{-j2\pi km/N}$
$\delta(x)$	Pic de Dirac
$\Gamma_{xy}(\tau)$	Fonction de corrélation statistique
$\Lambda_\tau(t)$	Fonction triangle de base égale à τ
ω, Ω	Pulsation ($= 2\pi f$)
$\Pi_\tau(x)$	Fonction « porte » de largeur τ
σ_x	Écart type de la variable x

Copyright © 2017 Dunod.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Seuls les esprits cultivé sont libres
Épicète, 1er siècle

À mes parents.
À Françoise, Joseph et Méaza

Copyright © 2017 Dunod.

Partie 1

Le traitement des signaux analogiques

Copyright © 2017 Dunod.

Copyright © 2017 Dunod.

DÉFINITIONS ET REPRÉSENTATION DES SIGNAUX

1

1.1 DÉFINITIONS

1.1.1 Définitions de base

Un **signal** est la représentation physique de l'information qu'il transporte de sa source à son destinataire. Il sert de vecteur à une information. Il constitue la manifestation physique d'une grandeur mesurable (courant, tension, force, température, pression, etc.). Les signaux, considérés dans ce livre, sont des grandeurs électriques variant en fonction du temps $s(t)$ obtenues à l'aide de capteurs. Mais le traitement du signal s'applique à tous les signaux physiques (onde acoustique, signal optique, signal magnétique, signal radioélectrique, etc.). Le traitement d'images peut être considéré comme une extension du traitement du signal aux signaux bidimensionnels (images).

Le **bruit** est défini comme tout phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal, par analogie avec les nuisances acoustiques (interférence, bruit de fond, etc.). La différentiation entre le signal et le bruit est artificielle et dépend de l'intérêt de l'utilisateur : les ondes électromagnétiques d'origine galactique sont du bruit pour un ingénieur des télécommunications par satellites et un signal pour les radioastronomes.

La **théorie du signal** a pour objectif fondamental la « description mathématique » des signaux. Cette représentation commode du signal permet de mettre en évidence ses principales caractéristiques (distribution fréquentielle, énergie, etc.) et d'analyser les modifications subies lors de la transmission ou du traitement de ces signaux.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Le **traitement du signal** est la discipline technique qui, s'appuyant sur les ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée, a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux. Son champ d'application se situe donc dans tous les domaines concernés par la perception, la transmission ou l'exploitation des informations véhiculées par ces signaux.

Le **traitement de l'information** fournit un ensemble de concepts permettant d'évaluer les performances des systèmes de transfert d'informations, en particulier lorsque le signal porteur de message est bruité. Cela inclut les méthodes de « codage de l'information » dans le but de la réduction de redondance, de la correction des erreurs, de la confidentialité (cryptage). L'ensemble des concepts et méthodes développés dans le traitement de l'information et du signal forme la **théorie de la communication**.

1.1.2 Principales fonctions du traitement du signal

Les fonctions du traitement du signal peuvent se diviser en deux catégories : l'élaboration des signaux (incorporation des informations) et l'interprétation des signaux (extraction des informations). Les principales fonctions intégrées dans ces deux parties sont les suivantes :

– Élaboration des signaux :
  - synthèse : création de signaux de forme appropriée en procédant par exemple à une combinaison de signaux élémentaires ;
  - modulation, changement de fréquence : moyen permettant d'adapter un signal aux caractéristiques fréquentielles d'une voie de transmission ;
  - codage : traduction en code binaire (quantification), etc.

– Interprétation des signaux :
  - filtrage : élimination de certaines composantes indésirables ;
  - détection : extraction du signal d'un bruit de fond (corrélation) ;

Copyright © 2017 Dunod.

- identification : classement d'un signal dans des catégories préalablement définies ;
- analyse : isolement des composantes essentielles ou utiles d'un signal de forme complexe (transformée de Fourier) ;
- mesure : estimation d'une grandeur caractéristique d'un signal avec un certain degré de confiance (valeur moyenne, etc.).

1.1.3 Les systèmes numériques

Les qualités actuelles du traitement numérique de l'information conduisent à son développement pour résoudre les problèmes de contrôle/commande de procédés industriels. Le système de traitement numérique, schématisé sur la figure 1.1, va réaliser la saisie de l'information, traiter ces informations suivant un programme de contrôle (régulation, filtrage numérique, etc.) et d'après des valeurs de consignes entrées par l'utilisateur, envoyer des signaux de commande au processus industriel pour atteindre le comportement recherché. Le système numérique présente, en effet, un grand nombre d'avantages par rapport à un contrôle de processus par un système analogique :

– reproductibilité des systèmes (circuits logiques) ;
– stabilité : pas de dérive en temps ou en température ;
– adaptabilité et souplesse d'emploi (modification du programme) ;
– fiabilité : circuits à très grande intégration ;
– rapidité : jusqu'à 10 ms environ en temps réel.

Les grandeurs physiques (mouvement mécanique, variation de température, etc.) liées aux procédés physiques contrôlés mis en jeu doivent être transformées en signaux analogiques électriques (courant ou tension) : cela est le rôle des **capteurs** ou transducteurs (quartz, thermocouple...) dans le cas de la mesure. Inversement, la commande au niveau du processus est faite à l'aide d'**actionneurs** ou récepteurs (moteur, vanne...) qui transforment le signal analogique électrique reçu en grandeurs physiques (énergie mécanique, chaleur, etc.).

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

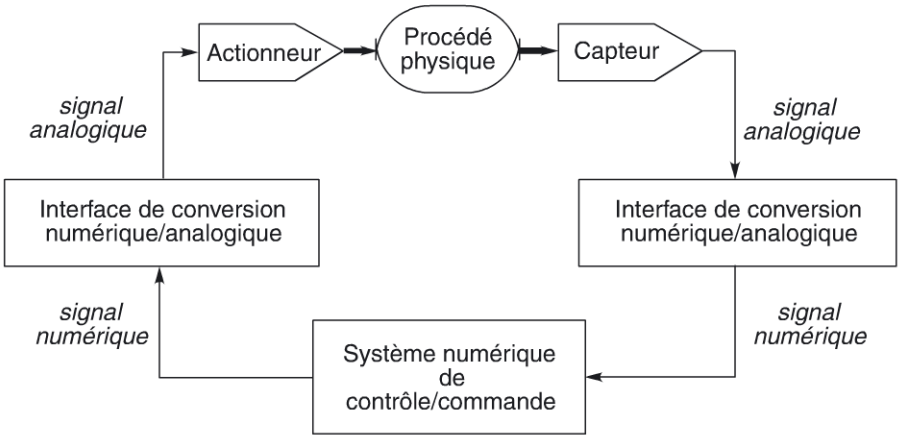

Figure 1.1 – Chaîne d'acquisition et de restitution de données d'un procédé physique piloté par un système numérique.

Dans le cas des traitements par des systèmes numériques, ces signaux analogiques transmis ou reçus seront transformés en signaux numériques. Ce rôle est rempli par des interfaces électroniques spécialisées qui sont composées de différents éléments : les convertisseurs analogiques-numériques et numériques-analogiques, les échantillonneurs-bloqueurs, les multiplexeurs, les amplificateurs à gain programmable, etc. Les fonctions du traitement numérique sont très nombreuses : filtrage, analyse spectrale, modulation, détection, estimation, transcodage, génération de signaux, reconnaissance, correction, etc.

1.2 Représentation des signaux

1.2.1 Modélisation des signaux

Un signal expérimental est une grandeur physique et doit donc être physiquement réalisable. Les mesures macroscopiques analogiques, réalisées à partir d'appareils de mesures comme un oscilloscope, fournissent des courbes « tension en fonction du temps » du type de celle représentée sur la figure 1.2. Ces signaux physiques sont représentés par des

Copyright © 2017 Dunod.

fonctions $s(t)$ à valeurs réelles d'une variable réelle t. Par conséquent, le signal possède les caractéristiques suivantes :

– énergie bornée ;
– amplitude bornée ;
– continu temporellement ;
– causal ($s(t) = 0$ pour $t < 0$) ;
– spectre du signal borné (tend vers 0 lorsque f tend vers ∞).

Mais sur le plan théorique, pour la commodité du calcul et l'étude de certains phénomènes, les signaux sont représentés par des fonctions :

– à énergie théorique infinie ;
– avec des discontinuités (signal carré) ;
– définies sur $\Re$ (signaux non causaux) ;
– à spectre du signal infini ;
– à valeurs complexes :

$$s(t) = A\mathrm{e}^{j\omega t} = A\,(\cos \omega t + j \sin \omega t) \tag{1.1}$$

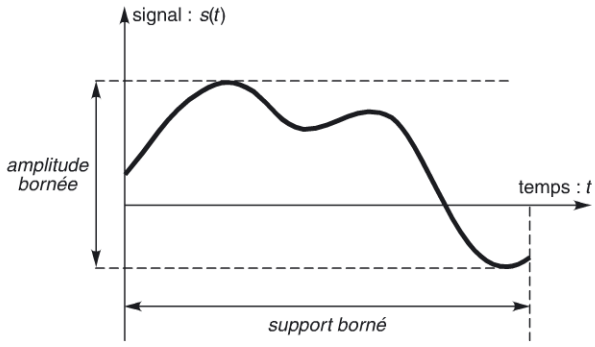

Figure 1.2 – Représentation d'un signal physique réel.

Remarque

Il est important de noter que l'introduction de tels modèles mathématiques nécessite une interprétation des résultats obtenus après traitement pour retrouver ensuite la réalité.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

1.2.2 Classification des signaux

Pour faciliter l'étude des signaux, différents modes de classification peuvent être envisagés :

– représentation temporelle des signaux ;

– représentation spectrale ;

– caractéristique morphologique (signal continu ou discret).

a) Représentation temporelle des signaux

La première classification, basée sur l'évolution du signal en fonction du temps, fait apparaître deux types fondamentaux :

– les **signaux certains** (ou déterministes) dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement décrite par un modèle mathématique. Ces signaux proviennent de phénomènes pour lesquels on connaît les lois physiques correspondantes et les conditions initiales, permettant ainsi de prévoir le résultat ;

– les **signaux aléatoires** (ou probabilistes) dont le comportement temporel est imprévisible et pour la description desquels il faut se contenter d'observations statistiques.

Parmi les signaux déterministes, on distingue les signaux périodiques dont les signaux sinusoïdaux sont un cas particulier :

$$s(t) = A \sin\left[(2\pi/T)\, t + \varphi\right] \tag{1.2}$$

avec T la période du signal et φ la phase.

Les signaux non périodiques se composent d'une part des signaux pseudo-périodiques formés d'une somme de sinusoïdes de périodes différentes et d'autre part des signaux transitoires dont l'existence est limitée dans le temps.

Ces signaux « certains » peuvent en principe être reproduits rigoureusement identiques à eux-mêmes. Dans cet ouvrage nous nous intéresserons principalement à ce type de signaux, excepté le signal dit de bruit, qui fait partie de la deuxième catégorie.

Copyright © 2017 Dunod.

En ce qui concerne les signaux aléatoires, ils sont dits **stationnaires** lorsque leur valeur moyenne est indépendante du temps, c'est-à-dire que les résultats de leur analyse statistique restent les mêmes quel que soit le moment où l'on en observe une partie déterminée. De plus ces signaux aléatoires stationnaires sont **ergodiques** s'il est identique de faire une moyenne statistique à un instant donné sur différents essais ou de faire une moyenne temporelle suffisamment longue sur un seul de ces essais.

b) Classification spectrale

Un signal peut être classé suivant la distribution de son amplitude, sa puissance ou son énergie en fonction de la fréquence (spectre du signal). Le domaine des fréquences occupé par son spectre est aussi appelé la **largeur de bande spectrale du signal** ΔF (*cf.* figure 1.3) :

$$\Delta F = F_{\max} - F_{\min}$$

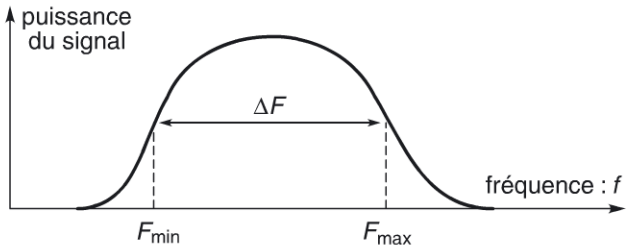

Figure 1.3 – Distribution spectrale d'un signal avec la définition de la largeur de bande spectrale ΔF.

Cette caractéristique, exprimée en hertz (Hz), est absolue. Aussi il est nécessaire de la comparer au domaine de fréquences dans lequel se situe le signal. En considérant la fréquence moyenne $F_{\text{moy}} = (F_{\max} + F_{\min})/2$, on peut distinguer deux types de signaux :

– les signaux à bande étroite avec $\Delta F/F_{\text{moy}}$ petit (soit $F_{\max}$ # $F_{\min}$) ;

– les signaux à large bande avec $\Delta F/F_{\text{moy}}$ grand (soit $F_{\max} \gg F_{\min}$).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

Pour les signaux à bande étroite, il est possible de les classer par le domaine de variation de la fréquence moyenne F_{moy}

- $F_{moy} < 250$ KHz signaux basses fréquences (BF)
- 250 KHz $< F_{moy} <$ 30 MHz signaux hautes fréquences (HF)
- 30 MHz $< F_{moy} <$ 300 MHz signaux très hautes fréquences (VHF)
- 300 MHz $< F_{moy} <$ 3 GHz signaux ultra hautes fréquences (UHF)
- $F_{moy} > 3$ GHz signaux super hautes fréquences (SHF)

Lorsque la fréquence du signal devient très grande, pratiquement supérieure à quelques térahertz (THz = 10^{12} Hz), la longueur d'onde λ est le paramètre de référence ($\lambda = c/F$ avec c : vitesse de la lumière 300 000 Km/s) :

- 700 nm $< \lambda <$ 0,1 mm signal lumineux infrarouge
- 400 nm $< \lambda <$ 700 nm signal lumineux visible
- 10 nm $< \lambda <$ 400 nm signal lumineux ultraviolet

c) Les signaux analogiques et numériques

Le temps est un paramètre important de classification. Comme nous venons de le voir, le traitement numérique des signaux conduit à faire la distinction entre les signaux dits à temps continus (**signaux continus**) et les signaux dits à temps discrets (**signaux discrets ou échantillonnés**). Un autre paramètre des signaux traités est à prendre en compte, c'est l'amplitude qui peut aussi être continue ou discrète (quantifiée).

Ainsi quatre formes de signaux, qui se retrouvent dans un système numérique de contrôle d'un processus physique, peuvent être distinguées (*cf.* figure 1.4) :

- signal à amplitude et temps continus (signal analogique) : $s(t)$;
- signal à amplitude discrète et temps continu (signal quantifié) : $s_q(t)$. Ce signal correspond à celui qui est fourni à la sortie d'un circuit convertisseur numérique-analogique pour la commande d'un actionneur ;

Copyright © 2017 Dunod.

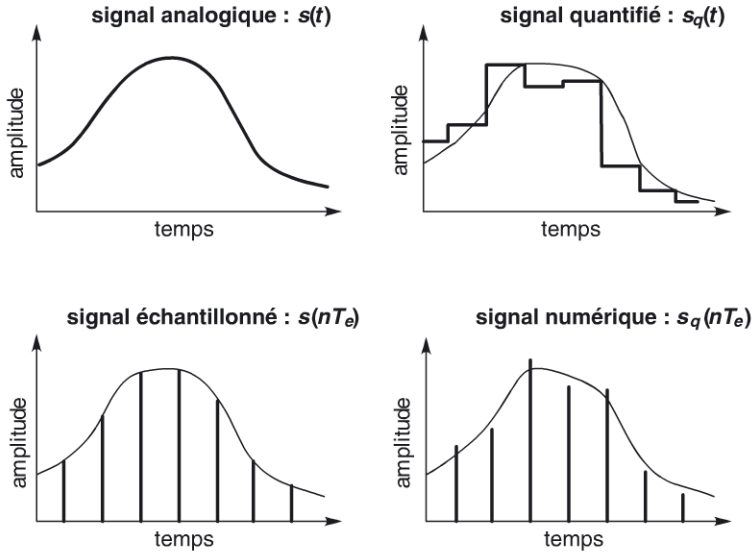

Figure 1.4 – Classification morphologique des signaux.

– signal à amplitude continue et temps discret (signal échantillonné) : $s(nT_e)$. Ce signal, obtenu à l'aide d'un circuit échantillonneur-bloqueur, est transmis à un circuit convertisseur analogique numérique pour obtenir un signal numérique utilisable par un ordinateur ;

– signal à amplitude discrète et temps discret (signal logique ou numérique) : $s_q(nT_e)$. Ce dernier cas correspond en réalité à une suite de nombres codés en binaire. Ces nombres, utilisés au sein d'un ordinateur, se transmettent sous la forme de plusieurs signaux de type numérique 0 V (0 logique) ou 5 V (1 logique) se propageant en parallèle : 8 signaux pour un nombre codé sur 8 bits.

On appelle **numérisation d'un signal** l'opération qui consiste à faire passer un signal de la représentation dans le domaine des temps et des amplitudes continus au domaine des temps et des amplitudes discrets.

Cette opération de numérisation d'un signal peut être décomposée en deux étapes principales : échantillonnage et quantification.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

La restitution (ou l'interpolation) constitue le processus inverse qui intervient lors du passage du signal numérique au signal analogique : commande d'un actionneur.

Ces trois étapes sont indissociables. En effet, le signal, étant le support physique d'une information, doit conserver au cours de ces modifications tout le contenu informatif initial. Cette condition, ajoutée à la notion de coût limite d'un système, va être à la base de la numérisation des signaux et de l'étude du traitement numérique.

Copyright © 2017 Dunod.

2 Transformations de Fourier

2.1 Analyse spectrale des fonctions périodiques

2.1.1 Développement en série de Fourier

Si $s(t)$ est une fonction périodique de t, de période T_0 ($= 1/F_0$), elle peut s'écrire sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales et cosinusoïdales de fréquences f multiple de la fréquence F_0, dite fréquence fondamentale. Soit :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n F_0 t + b_n \sin 2\pi n F_0 t) \tag{2.1}$$

où a_n et b_n sont les coefficients de la série de Fourier. Ils se calculent à partir des relations suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t)\,\mathrm{d}t = \overline{s(t)} \tag{2.2}$$

avec a_0 appelé valeur moyenne ou composante continue

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cos(2\pi n F_0 t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{pour } n \geq 1 \tag{2.3}$$

et

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \sin(2\pi n F_0 t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{pour } n \geq 1 \tag{2.4}$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

En introduisant la représentation complexe, nous pouvons donner une forme plus générale de l'expression de ce développement en série de Fourier :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S\,(nF_0) \cdot \mathrm{e}^{j2\pi nF_0 t} \tag{2.5}$$

avec $S\,(nF_0) = \dfrac{1}{2} \cdot (a_n - j \cdot b_n) = \dfrac{1}{T_0} \cdot \displaystyle\int_0^{T_0} s(t) \cdot \mathrm{e}^{j2\pi nF_0 t} \cdot \mathrm{d}t \quad \text{pour } n \geq 1$

et

$$S\,(0) = a_0 = \overline{s(t)} \tag{2.6}$$

Le concept de fréquence négative n'a pas de signification physique. Il peut être vu comme la traduction du sens de rotation de la vitesse angulaire ou pulsation ($\omega = 2\pi f$). Ainsi la fonction réelle $\cos(\omega t)$ ou $\cos(2\pi f t)$ peut être exprimée comme la somme de deux fonctions complexes dans le plan complexe (*cf.* figure 2.1) :

$$\cos(\omega t) = 1/2 \cdot \left(\mathrm{e}^{j\omega t} + \mathrm{e}^{-j\omega t}\right)$$

Ces valeurs négatives de la fréquence sont introduites uniquement dans un but de rendre symétrique la fonction de représentation des fréquences. Dans le cas de signaux réels, nous avons :

$$a_{-n} = a_n \quad \text{et} \quad b_{-n} = -b_n$$

Les coefficients du développement $S\,(nF_0)$ sont en général une grandeur complexe qui peut s'écrire sous la forme :

$$S\,(nF_0) = |S\,(nF_0)| \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_n} \tag{2.7}$$

avec pour module :

$$|S\,(nF_0)| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{2.8}$$

et pour phase φ_n :

$$\varphi_n = Arctg\,(-b_n/a_n) \tag{2.9}$$

Copyright © 2017 Dunod.

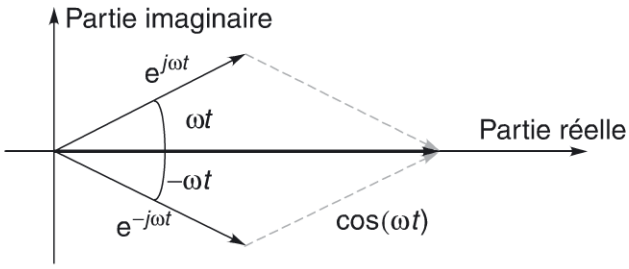

Figure 2.1 – Introduction des fréquences négatives dans l'expression des signaux.

2.1.2 Représentations fréquentielles

Les coefficients $S(nF_0)$ représentent les composantes du spectre en fréquence de $s(t)$. En introduisant l'impulsion de Dirac $\delta(x)$ qui est décrite en annexes, la représentation fréquentielle du signal est formée de pics de Dirac de poids $|S(nF_0)|$ réparties sur tout l'axe des fréquences positives et négatives (*cf.* figure 2.2). Par convention, on dessine chaque raie en lui donnant une hauteur proportionnelle à son poids $|S(nF_0)|$. Il est important de noter que ce spectre $S(f)$ est en général complexe, formé d'une partie réelle et d'une partie imaginaire, et devrait donc être représenté dans un système à trois dimensions : axe des fréquences f, axe de la partie imaginaire $\Im\{S(f)\}$ et axe de la partie réelle $\Re\{S(f)\}$. L'expression du spectre est la suivante :

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(nF_0) \cdot \delta(f - nF_0) \tag{2.10}$$

avec $S(nF_0) = \dfrac{1}{T_0} \cdot \displaystyle\int_0^{T_0} s(t) \cdot e^{j2\pi nF_0 t} \cdot dt$ pour $n \geq 1$ et $S(0) = \overline{s(t)}$

La représentation fréquentielle ou le **spectre en fréquence** $S(f)$ **du signal** $s(t)$ est constitué de la composante continue à la fréquence 0, du fondamental à la fréquence F_0 (ou harmonique d'ordre 1) et des différents harmoniques aux fréquences $f = n \cdot F_0$. Il est im-

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

portant de remarquer que le spectre d'une fonction périodique, de période $T_0(= 1/F_0)$, est **discontinu** et composé de raies dont l'écart minimum est, sur l'axe des fréquences, F_0.

Cette représentation complexe du signal distribue donc, dans le domaine fréquentiel, les contributions du signal symétriquement de part et d'autre de l'origine sur l'axe des fréquences : c'est la représentation spectrale **bilatérale** *S(f)* (fréquences positives et négatives).

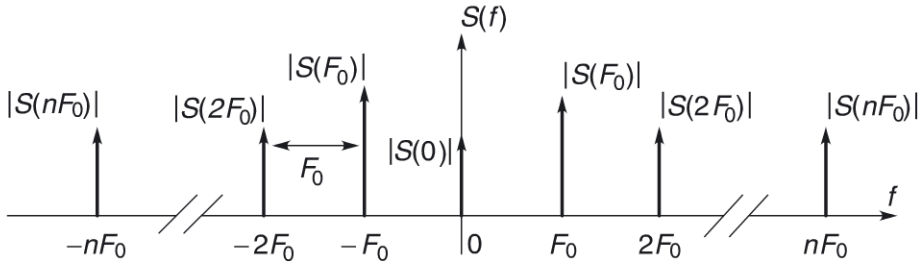

Figure 2.2 – Représentation fréquentielle bilatérale d'un signal périodique de période $T_0(= 1/F_0)$.

Seule la représentation unilatérale $S_{\text{réel}}(f)$ (spectres composés de fréquences positives uniquement), calculée directement à partir des équations 2.1 à 2.4 (série de Fourier), est une représentation réelle qui peut être obtenue à partir d'analyseurs de spectres ou de transformateurs de Fourier qui présentent le module de ce spectre. À partir de l'expression initiale 2.1, nous pouvons écrire :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \cos(2\pi n F_0 t + \varphi_n) \tag{2.11}$$

avec $c_n = 2 \cdot |S(nF_0)| = 2 \cdot \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

Les coefficients c_n représentent les « amplitudes » des composantes du spectre réel $S_{\text{réel}}(f)$ en représentation unilatérale (*cf.* figure 2.3). Il est très aisé de passer de l'une à l'autre des représentations par la relation suivante :

$$S(f) = k \cdot S_{\text{réel}}(f) \tag{2.12}$$

avec $k = \{2 \text{ si } f > 0 \,;\; 1 \text{ si } f = 0 \,; 0 \text{ si } f < 0\}$.

Copyright © 2017 Dunod.

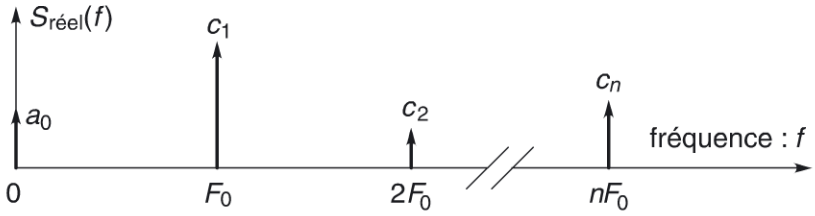

Figure 2.3 – Représentation fréquentielle unilatérale d'un signal périodique de période $T_0(= 1/F_0)$.

2.1.3 Quelques propriétés

Nous avons une correspondance unique entre la fonction $x(t)$, son développement en série de Fourier et par conséquent sa représentation spectrale $X(f)$. Nous écrirons donc cette réciprocité sous la forme :

$$x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f)$$

a) Propriété de linéarité

Étant donné $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f)$ et $y(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(f)$, nous avons :

$$A \cdot x(t) + B \cdot y(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} A \cdot X(f) + B \cdot Y(f) \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ des constantes}$$

b) Propriété de parité

Si la fonction $x(t)$ est paire, alors les coefficients b_n sont nuls :

$$X(nF_0) = \frac{1}{2} \cdot a_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} x(t) \cdot \cos(2\pi n F_0 t) \cdot \mathrm{d}t$$

Si la fonction $x(t)$ est impaire, alors les coefficients a_n sont nuls :

$$X(nF_0) = \frac{-j}{2} \cdot b_n = \frac{-j}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} x(t) \cdot \sin(2\pi n F_0 t) \cdot \mathrm{d}t$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Soit la fonction $x(t)$ et $X(f)$ sa représentation fréquentielle, nous avons :

Fonction $x(t)$	Représentation fréquentielle $X(f)$
réelle paire	réelle paire
réelle impaire	imaginaire impaire
réelle	complexe (partie réelle paire, partie imaginaire impaire)

c) Propriété de translation

Étant donné $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f)$, nous avons :

$$x(t-\theta) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) \cdot \mathrm{e}^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot\theta\cdot f}$$

et réciproquement :

$$X(f-\nu) \overset{F}{\longleftrightarrow} x(t) \cdot \mathrm{e}^{+j\cdot 2\cdot\pi\cdot\nu\cdot t}$$

2.1.4 Exemples de développements en série de Fourier

Nous présentons ci-après un ensemble de fonctions périodiques (de période $T_0 = 1/F_0$) et de leurs développements en série de Fourier sous la forme d'une représentation fréquentielle bilatérale (partie imaginaire $\Im\{S(f)\}$ ou partie réelle $\Re\{S(f)\}$). Ainsi, à partir de cette table et des propriétés associées à cette transformation, il est possible de déterminer la représentation spectrale de la plupart des fonctions périodiques usuelles sans effectuer les calcul donnés par les relations 2.1 à 2.4.

a) Signaux sinusoïdaux et cosinusoïdaux

Représentation temporelle	*Représentation spectrale*
• Signal sinusoïdal :	
$s(t) = A \cdot \sin(2\pi F_0 t)$	$S(f) = \dfrac{j\cdot A}{2} \cdot (\delta(f+F_0) - \delta(f-F_0))$ (*cf.* figure 2.4)

Copyright © 2017 Dunod.

Représentation temporelle	*Représentation spectrale*
• Signal cosinusoïdal :	
$s(t) = A \cdot \cos(2\pi F_0 t)$	$S(f) = \frac{A}{2} \cdot (\delta(f + F_0) + \delta(f - F_0))$ (*cf.* figure 2.5)

b) Signaux carrés

Représentation temporelle	*Représentation spectrale*
• Signal carré pair à composante continue nulle : $s(t) = s_{c1}(t)$ avec $s_{c1}(t) = -A$ pour $t \in [-T_0/2, -T_0/4]$ et $s_{c1}(t) = A$ pour $t \in [-T_0/4, T_0/4]$ et $s_{c1}(t) = -A$ pour $t \in [T_0/4, T_0/2]$	$S_{c1}(f) = \frac{2A}{\pi} \cdot \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cdot \delta(f - (2p+1) \cdot F_0)$ (*cf.* figure 2.6)
• Signal carré pair à composante continue non nulle (= $A/2$) : $s(t) = s_{c2}(t)$ soit $s_{c2}(t) = 1/2 \cdot s_{c1}(t) + A/2$	$S_{c2}(f) = 1/2 \cdot S_{c1}(f) + A/2 \cdot \delta(f)$ $S_{c2}(f) = \frac{A}{2}\delta(f) + \frac{A}{\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \delta(f - (2p+1) F_0)$ (*cf.* figure 2.7)
• Signal carré impair à composante continue nulle : $s(t) = s_{c3}(t)$ soit : $s_{c3}(t) = s_{c1}(t + T_0/4)$ avec $s_{c3}(t) = A$ pour $t \in [0, T_0/2]$ et $s_{c3}(t) = -A$ pour $t \in [T_0/2, T_0]$	$S_{c3}(f) = S_{c1}(f) \cdot e^{j2\pi(T_0/4) f}$ $S_{c3}(f) = \frac{2A}{\pi} \cdot \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{-j}{2p+1} \cdot \delta(f - (2p+1) \cdot F_0)$ (*cf.* figure 2.8)
• Signal carré impair à composante continue non nulle (= $A/2$) : $s(t) = s_{c4}(t)$ soit : $s_{c4}(t) = 1/2 \cdot s_{c1}(t + T_0/4) + A/2$	$S_{c4}(f) = 1/2 \cdot S_{c1}(f) \cdot e^{j2\pi(T_0/4) f} + A/2 \cdot \delta(f)$ $S_{c4}(f) = \frac{A}{2}\delta(f) + \frac{A}{\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{-j}{2p+1} \cdot \delta(f - (2p+1) F_0)$ (*cf.* figure 2.9)

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Copyright © 2017 Dunod.

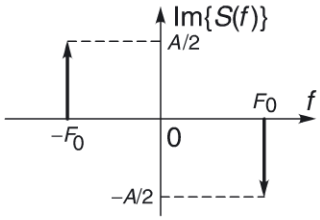

Figure 2.4 – Représentation spectrale bilatérale d'un signal sinusoïdal.

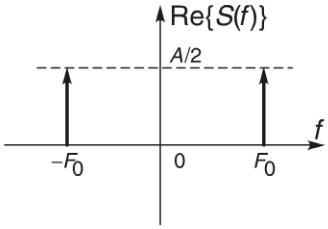

Figure 2.5 – Représentation spectrale bilatérale d'un signal cosinusoïdal.

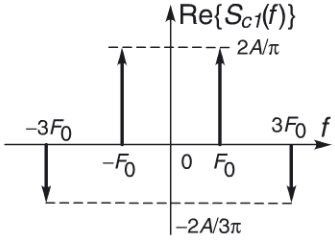

Figure 2.6 – Représentation spectrale bilatérale du signal carré pair $s_{c1}(t)$.

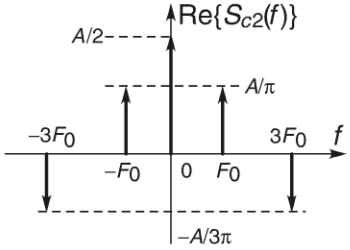

Figure 2.7 – Représentation spectrale bilatérale du signal carré pair $s_{c2}(t)$.

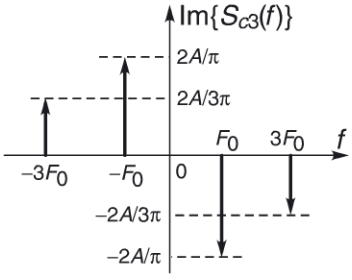

Figure 2.8 – Représentation spectrale bilatérale du signal carré impair $s_{c3}(t)$.

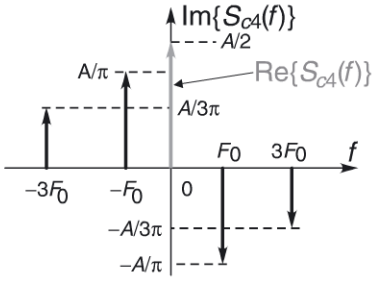

Figure 2.9 – Représentation spectrale bilatérale du signal carré impair $s_{c4}(t)$.

Copyright © 2017 Dunod.

c) Signaux impulsionnels

Représentation temporelle

• Signal impulsionnel pair à composante continue nulle :
$s(t) = s_{i1}(t)$ pour $\tau < T_0$
avec $s_{i1}(t) = -A$ pour $t \in [-T_0/2, \tau/2]$
et $s_{i1}(t) = A$ pour $t \in [-\tau/2, \tau/2]$
et $s_{i1}(t) = -A$ pour $t \in [\tau/2, T_0/2]$

Représentation spectrale

$$S_{i1}(f) = \frac{2A\tau}{T_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n F_0 \tau)}{\pi n F_0 \tau} \cdot \delta(f - n \cdot F_0) - A \cdot \delta(f)$$

(*cf.* annexes : fonction $\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \mathrm{sinc}(x)$)

• Signal impulsionnel pair à composante continue non nulle ($= A\tau/T_0$) :
$s(t) = s_{i2}(t)$
soit : $s_{i2}(t) = \dfrac{1}{2} \cdot s_{i1}(t) + \dfrac{A}{2}$

$$S_{i2}(f) = \frac{1}{2} \cdot S_{i1}(f) + \frac{A}{2} \cdot \delta(f)$$

$$S_{i2}(f) = \frac{A \cdot \tau}{T_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n F_0 \tau)}{\pi n F_0 \tau} \cdot \delta(f - n \cdot F_0)$$

(*cf.* figure 2.10)

• Signal impulsionnel à composante continue nulle :
$s(t) = s_{i3}(t)$
soit : $s_{i3}(t) = s_{i1}(t + \tau/2)$

$$S_{i3}(f) = S_{i1}(f) \cdot e^{j2\pi(\tau/2) f}$$

$$S_{i3}(f) = \frac{2A\tau}{T_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n F_0 \tau)}{\pi n F_0 \tau} \cdot e^{j\pi n F_0 \tau} \cdot \delta(f - n \cdot F_0) - A \cdot \delta(f)$$

• Signal impulsionnel à composante continue non nulle ($=A\tau/T_0$) :
$s(t) = s_{i4}(t)$
soit : $s_{i4}(t) = \dfrac{1}{2} \cdot s_{i1}(t + \tau/2) + \dfrac{A}{2}$

$$S_{i4}(f) = \frac{1}{2} \cdot S_{i1}(f) \cdot e^{j2\pi(\tau/2) f} + \frac{A}{2} \cdot \delta(f)$$

$$S_{i4}(f) = \frac{A\tau}{T_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n F_0 \tau)}{\pi n F_0 \tau} \cdot e^{j\pi n F_0 \tau} \cdot \delta(f - n \cdot F_0)$$

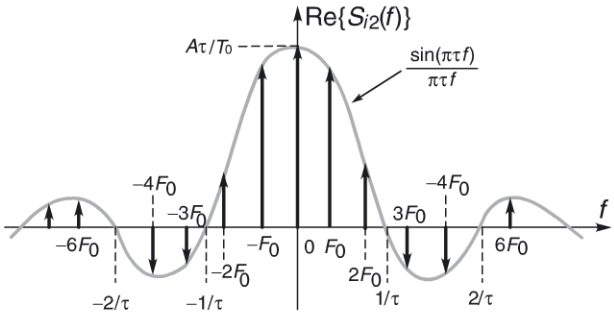

Figure 2.10 – Représentation spectrale bilatérale du signal impulsionnel pair $s_{i2}(t)$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

Remarque

Le signal impulsionnel pair à composante continue non nulle $s_{i2}(t)$ a pour limite la fonction « peigne » de Dirac $\mathrm{Pgn}_A(x)$ lorsque A tend vers l'infini, τ vers 0 et en conservant le produit $A\tau$ égal à 1 (*cf.* annexes).

d) Signaux triangulaires

Représentation temporelle	***Représentation spectrale***
• Signal triangulaire pair à composante continue nulle : $s(t) = s_{t1}(t)$ avec $s_{t1}(t) = A + \frac{4A}{T_0}t$ pour $t \in [-T_0/2, 0]$ et $s_{t1}(t) = A - \frac{4A}{T_0}t$ pour $t \in [0, T_0/2]$	$S_{t1}(f) = \frac{4A}{\pi^2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cdot\delta(f-(2p+1)F_0)$
• Signal triangulaire pair à composante continue non nulle (= $A/2$) : $s(t) = s_{t2}(t)$ soit $s_{t2}(t) = 1/2 \cdot s_{t1}(t) + A/2$	$S_{t2}(f) = 1/2 \cdot S_{t1}(f) + A/2 \cdot \delta(f)$ $S_{t2}(f) = \frac{2A}{\pi^2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\delta(f-(2p+1)F_0) + \frac{A}{2}\delta(f)$
• Signal triangulaire impair à composante continue nulle : $s(t) = s_{t3}(t)$ soit : $s_{t3}(t) = s_{t1}(t + T_0/4)$	$S_{t3}(f) = S_{t1}(f)\cdot e^{j2\pi(T_0/4)f}$ $S_{t3}(f) = \frac{j4A}{\pi^2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}\cdot\delta(f-(2p+1)F_0)$
• Signal triangulaire impair à composante continue non nulle (= $A/2$) : $s(t) = s_{t4}(t)$ soit : $s_{t4}(t) = \frac{1}{2}\cdot s_{t1}(t + T_0/4) + \frac{A}{2}$	$S_{t4}(f) = \frac{1}{2}S_{t1}(f)\cdot e^{j2\pi(T_0/4)f} + \frac{A}{2}\cdot\delta(f)$ $S_{t4}(f) = \frac{j2A}{\pi^2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}\delta(f-(2p+1)F_0) + \frac{A}{2}\delta(f)$

Copyright © 2017 Dunod.

e) Signaux divers

Représentation temporelle	*Représentation spectrale*
• Signal rampe impair à composante continue nulle : $s(t) = s_{r1}(t)$ avec $s_{r1}(t) = \frac{2A}{T_0} t$ pour $t \in [-T_0/2, T_0/2]$	$S_{r1}(f) = \frac{jA}{\pi} \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \delta(f - nF_0)$
• Signal rampe à composante continue non nulle (= $A/2$) : $s(t) = s_{r2}(t)$ avec $s_{r2}(t) = \frac{1}{2} \cdot s_{r1}(t + T_0/2) + \frac{A}{2}$	$S_{r2}(f) = \frac{jA}{2\pi} \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \delta(f - nF_0) + \frac{A}{2} \cdot \delta(f)$
• Signal « dent de scie » ou rampe inversée à composante continue non nulle (= $A/2$) : $s(t) = s_{r3}(t)$ avec $s_{r3}(t) = \frac{1}{2} \cdot s_{r1}(-t + T_0/2) + \frac{A}{2}$	$S_{r2}(f) = \frac{jA}{2\pi} \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \delta(f + nF_0) + \frac{A}{2} \cdot \delta(f)$
• Signal sinusoïdal redressé double alternance : $s(t) = A \cdot \lvert\sin(2\pi F_0 t)\rvert$	$S(f) = \frac{2A}{\pi} \cdot \delta(f) - \frac{2A}{\pi} \sum_{p=-\infty, p\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2 - 1)} \cdot \delta(f - 2pF_0)$
• Signal sinusoïdal redressé simple alternance : $s(t) = s_{sa}(t)$ avec $s_{sa}(t) = A \cdot \sin(2\pi F_0 t)$ pour $t \in [0, T_0/2]$ et $s_{sa}(t) = 0$ pour $t \in [T_0/2, T_0]$	$S(f) = \frac{A}{\pi} \cdot \delta(f) - \frac{jA}{4} \cdot \delta(f - F_0) + \frac{A}{\pi} \sum_{p=-\infty, p\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2 - 1)} \cdot \delta(f - 2pF_0)$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

2.2 Analyse spectrale des fonctions non périodiques

2.2.1 Transformée de Fourier

On peut considérer la transformée de Fourier des fonctions non-périodiques comme une extension de la transformation précédente pour laquelle la période est infinie. L'intervalle de fréquence F_0 tend alors vers zéro et le spectre devient alors une fonction continue. D'où, la transformée de Fourier de $s(t)$, notée $S(f)$ ou $F\{s(t)\}$, et la transformée de Fourier inverse, notée $F^{-1}\{S(f)\}$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \mathrm{e}^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot \mathrm{d}t \tag{2.13}$$

et

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot \mathrm{e}^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot \mathrm{d}f \tag{2.14}$$

$S(f)$ est une fonction de f, en général complexe, qui comprend donc une partie réelle $\Re[S(f)]$ et une partie imaginaire $\Im[S(f)]$:

$$\Re\,[S(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \cos(2\pi f t) \cdot \mathrm{d}t \tag{2.15}$$

et

$$\Im\,[S(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \sin(2\pi f t) \cdot \mathrm{d}t \tag{2.16}$$

Pour que la transformée de Fourier de $s(t)$ existe et soit réciproque, il suffit que $s(t)$ soit une fonction de carré sommable. Cela signifie que $s(t)$, ainsi que sa transformée de Fourier, sont à énergie finie. Toutes les fonctions existant physiquement vérifient ces conditions parce qu'on les observe sur un temps fini.

2.2.2 Propriétés de la transformée de Fourier

Nous avons une correspondance unique entre la fonction $x(t)$ et sa transformée de Fourier $X(f)$ ou représentation spectrale. Nous écrirons donc

Copyright © 2017 Dunod.

cette réciprocité sous la forme :

$$x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f)$$

Nous retrouvons les mêmes propriétés que pour le développement en série de Fourier.

a) Propriété de linéarité

Étant donné $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f)$ et $y(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(f)$, nous avons :

$$A \cdot x(t) + B \cdot y(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} A \cdot X(f) + B \cdot Y(f) \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ des constantes}$$

b) Propriété de parité

Soit la fonction $x(t)$ et $X(f)$ sa représentation fréquentielle, nous avons :

Fonction $x(t)$	**Représentation fréquentielle $X(f)$**
réelle paire	réelle paire
réelle impaire	imaginaire impaire
réelle	complexe (partie réelle paire, partie imaginaire impaire)
imaginaire paire	imaginaire paire
imaginaire impaire	réelle impaire
imaginaire	complexe (partie réelle impaire, partie imaginaire paire)

Étant donné $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f)$, nous avons :

$$\overline{x}(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \overline{X}(-f) \quad \text{avec } \overline{x} \text{ signifiant le complexe conjugué}$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

c) Propriété de translation

Étant donné $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f)$, nous avons :

$$x(t-\theta) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) \cdot \mathrm{e}^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot\theta\cdot f}$$

Et réciproquement :

$$X(f-\nu) \overset{F}{\longleftrightarrow} x(t) \cdot \mathrm{e}^{+j\cdot 2\cdot\pi\cdot\nu\cdot t}$$

d) Propriété d'homothétie

Étant donné $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f)$, nous avons :

$$x(a\cdot t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 1/|a|\, X(f/a) \quad \text{avec } a \in \Re$$

e) Propriété de dérivation

Étant donné $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f)$, nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \overset{F}{\longleftrightarrow} (j2\pi f)\cdot X(f)$$

et plus généralement :

$$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} \overset{F}{\longleftrightarrow} (j2\pi f)^n \cdot X(f)$$

De cette propriété de dérivation, on en déduit la transformée des signaux à valeur moyenne nulle qui facilite le calcul du spectre de signaux comme celui de la fonction échelon unité $u(t)$. Soit un signal $x(t)$ de la forme :

$$x(t) = A_x + x_0(t) \quad \text{avec } x_0(t) \text{ de valeur moyenne nulle}$$

Nous pouvons écrire :

$$x(t) = A_x + \int_{-\infty}^{t} \frac{\mathrm{d}x_0(t)}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}t \quad \text{avec } A_x \text{ la constante d'intégration}$$

Copyright © 2017 Dunod.

Étant donné $\dfrac{\mathrm{d}x_0(t)}{\mathrm{d}t} \overset{F}{\longleftrightarrow} X_0'(f)$, il vient :

$$x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 1/(j2\pi f) \cdot X_0'(f) + A_x \cdot \delta(f)$$

2.2.3 Exemples de transformées de Fourier

Nous présentons ci-après un ensemble de fonctions non périodiques et de leurs transformées de Fourier. Ainsi, à partir de cette table des transformées de Fourier et des propriétés associées à cette transformation, il est possible de déterminer la représentation spectrale de la plupart des fonctions usuelles sans effectuer le calcul intégrale donné par la relation 2.13.

Représentation temporelle	***Représentation spectrale***
• Fonction porte : $s(t) = A.\Pi_\tau(t)$ avec $\Pi_\tau(t) = 1$ pour $t \in [-\tau/2, +\tau/2]$ et $\Pi_\tau(t) = 0$ pour $t \notin [-\tau/2, +\tau/2]$	$S(f) = A \cdot \tau \cdot \dfrac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} = A \cdot \tau \cdot \mathrm{sinc}(f\tau)$ (*cf.* annexes : fonction $\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \mathrm{sinc}(x)$)
• Fonction sinus tronquée (limitée à l'intervalle $[-\tau/2, +\tau/2]$: $s(t) = A \cdot \sin(2\pi F_0 t) \cdot \Pi_\tau(t)$	$S(f) = \dfrac{jA\tau}{2} \cdot \left[\dfrac{\sin(\pi\tau(f+F_0))}{\pi\tau(f+F_0)} - \dfrac{\sin(\pi\tau(f-F_0))}{\pi\tau(f-F_0)}\right]$
• Fonction cosinus tronquée (limitée à l'intervalle $[-\tau/2, +\tau/2]$: $s(t) = A \cdot \cos(2\pi F_0 t) \cdot \Pi_\tau(t)$	$S(f) = \dfrac{A \cdot \tau}{2} \cdot \left[\dfrac{\sin(\pi\tau(f+F_0))}{\pi\tau(f+F_0)} + \dfrac{\sin(\pi\tau(f-F_0))}{\pi\tau(f-F_0)}\right]$
• Fonction sinus cardinal : $s(t) = A \cdot \mathrm{sinc}(t\tau) = A \cdot \dfrac{\sin(\pi t \tau)}{\pi t \tau}$	$S(f) = \dfrac{A}{\tau} \cdot \Pi_\tau(f)$
• Fonction sinusoïdale de variable quadratique : $s(t) = A \cdot \sin\left(a \cdot t^2\right)$	$S(f) = A \cdot \sqrt{\dfrac{\pi}{a}} \cdot \left[\cos\left(-(\pi f)^2/a\right) + \dfrac{\pi}{4}\right]$
• Fonction cosinusoïdale de variable quadratique : $s(t) = A \cdot \cos\left(a \cdot t^2\right)$	$S(f) = A \cdot \sqrt{\dfrac{\pi}{a}} \cdot \left[\cos\left(-(\pi f)^2/a\right) - \dfrac{\pi}{4}\right]$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

Représentation temporelle	*Représentation spectrale*
• Fonction triangle : $s(t) = A \cdot \Lambda_{2\tau}(t)$ avec $\Lambda_{2\tau}(t) = 1 + t/\tau$ pour $t \in [-\tau, 0]$ $\Lambda_{2\tau}(t) = 1 - t/\tau$ pour $t \in [0, +\tau]$ et $\Lambda_{2\tau}(t) = 0$ pour $t \notin [-\tau, +\tau]$	$S(f) = A \cdot \tau \cdot [\mathrm{sinc}(\tau f)]^2$ $= A \cdot \tau \cdot \left[\dfrac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f}\right]^2$
• Fonction sinus cardinal quadratique : $s(t) = A \cdot [\mathrm{sinc}(\nu t)]^2 = A \cdot \left[\dfrac{\sin(\pi\nu t)}{\pi\nu t}\right]^2$	$S(f) = \dfrac{A}{\nu} \cdot \Lambda_{2\nu}(f)$
• Fonction exponentielle symétrique : $s(t) = A \cdot \mathrm{e}^{-a\lvert t\rvert}$ avec $a > 0$	$S(f) = \dfrac{2 \cdot A \cdot a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
• Fonction rapport du second ordre : $s(t) = \dfrac{A}{a^2 + 4\pi^2 t^2}$ avec $a > 0$	$S(f) = \dfrac{A}{2 \cdot a} \cdot \mathrm{e}^{-a\lvert f\rvert}$
d'où le cas particulier : $s(t) = \dfrac{A}{1 + t^2}$ avec $a > 0$	$S(f) = A \cdot \pi \cdot \mathrm{e}^{-2\cdot\pi\cdot\lvert f\rvert}$
• Fonction d'Heaviside ou échelon unité : $s(t) = u(t)$ avec $u(t) = 0$ pour $t < 0$ et $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$	$S(f) = \dfrac{1}{j2\pi f} + \dfrac{1}{2} \cdot \delta(f)$
• Fonction signe : $s(t) = \mathrm{sgn}(t) = \dfrac{t}{\lvert t\rvert}$ avec $\mathrm{sgn}(t) = -1$ pour $t < 0$ et $\mathrm{sgn}(t) = 1$ pour $t \geq 0$	$S(f) = \dfrac{1}{j\pi f}$
• Dérivée de la fonction signe : $s(t) = \dfrac{\mathrm{d}(\mathrm{sgn}(t))}{\mathrm{d}t} = 2 \cdot \delta(t)$	$S(f) = 2$
• Fonction exponentielle décroissante : $s(t) = A \cdot u(t) \cdot \mathrm{e}^{-a\cdot t}$ avec $a > 0$	$S(f) = \dfrac{A}{a + j2\pi f}$

Copyright © 2017 Dunod.

2.2. Analyse spectrale des fonctions non périodiques

Représentation temporelle	*Représentation spectrale*
• Fonction impulsionnelle exponentielle : $s(t) = A \cdot u(t) \cdot \left(e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t}\right)$ avec $a > 0$ et $b > 0$	$S(f) = \dfrac{A \cdot (b - a)}{(a + j2\pi f) \cdot (b + j2\pi f)}$
• Fonction sinusoïdale amortie : $s(t) = A \cdot u(t) \cdot \sin(2\pi F_0 t) \cdot e^{-at}$ avec $a > 0$	$S(f) = \dfrac{A \cdot (2\pi F_0)}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi F_0)^2}$
• Fonction cosinusoïdale amortie : $s(t) = A \cdot u(t) \cdot \cos(2\pi F_0 t) \cdot e^{-at}$ avec $a > 0$	$S(f) = \dfrac{A \cdot (a + 2\pi f)}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi F_0)^2}$
• Fonction cosinusoïdale causale : $s(t) = A \cdot u(t) \cdot \cos(2\pi F_0 t)$	$S(f) = \dfrac{A}{4}\delta(f + F_0) + \delta(f - F_0) + \dfrac{2f}{j\pi\left(f^2 - F_0^2\right)}$
• Fonction sinusoïdale causale : $s(t) = A \cdot u(t) \cdot \sin(2\pi F_0 t)$	$S(f) = \dfrac{jA}{4}\delta(f + F_0) - \delta(f - F_0) + \dfrac{2jf}{\pi\left(f^2 - F_0^2\right)}$
• Fonction rampe amortie par une gaussienne : $s(t) = A \cdot t \cdot e^{-\pi \cdot t^2}$	$S(f) = A \cdot j \cdot f \cdot e^{-\pi \cdot f^2}$
• Fonction rampe centrée : $s(t) = 1$ pour $t \geq \tau/2$; $s(t) = 1/2 + t/\tau$ pour $\lvert t \rvert < \tau/2$; $s(t) = 0$ pour $t = -\tau/2$	$S(f) = \dfrac{1}{j2\pi f} \cdot \dfrac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} + \dfrac{1}{2} \cdot \delta(f)$
• Fonction gaussienne : $s(t) = A \cdot e^{-\pi \cdot t^2}$	$S(f) = A \cdot e^{-\pi \cdot f^2}$
• Fonction gaussienne quelconque : $s(t) = A \cdot e^{-a \cdot t^2}$	$S(f) = A \cdot \sqrt{\dfrac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{(\pi \cdot f)^2}{a}}$
• Pic de Dirac : $s(t) = \delta(t)$	$S(f) = 1$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

Représentation temporelle	*Représentation spectrale*
• Pic de Dirac de poids A : $s(t) = A.\delta(t)$	$S(f) = A$
• Fonction constante : $s(t) = A$	$S(f) = A \cdot \delta(f)$
• Peigne de Dirac de période T_0 : $s(t) = \mathrm{Pgn}_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_0)$	$S(f) = F_0 \cdot \mathrm{Pgn}_{F_0}(f) = F_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot F_0)$
$s(t) = T_0 \cdot \mathrm{Pgn}_{T_0}(t) = T_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_0)$	$S(f) = \mathrm{Pgn}_{F_0}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot F_0)$
• Fonction exponentielle complexe : $s(t) = A \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi F_0 t}$	$S(f) = A \cdot \delta(f - F_0)$
• Pic de Dirac en $t = T_0$: $s(t) = A \cdot \delta(t - T_0)$	$S(f) = A \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi T_0 f}$

Remarques

La fonction « échelon unité » $u(t)$ permet en particulier de rendre un signal quelconque $s(t)$ **causal** en réalisant le produit $s(t) \cdot u(t)$. La fonction « porte » $\Pi_\tau(t)$ permet de découper dans un signal une portion de durée finie. Cette opération conduit à transformer un signal théorique (représentation mathématique) en un signal réel n'existant que pendant un temps fini de durée τ, correspondant au temps de mesure ou d'observation.

Copyright © 2017 Dunod.

Systèmes de transmission. Filtrage

3

3.1 Systèmes de transmission

3.1.1 Définitions et propriétés

a) Comparaison des grandeurs d'entrée et de sortie

Un système de transmission fait correspondre à un signal d'entrée $e(t)$ quelconque un signal de sortie $s(t)$, réponse du système de transmission, fonction du signal d'entrée $e(t)$ et des caractéristiques du système de transmission. Pour le système de transmission, on réalise une comparaison des grandeurs d'entrée et de sortie en exprimant le rapport des puissances des deux grandeurs (de même nature). Le logarithme à base 10 de ce rapport est alors exprimé en « bel » ; mais l'unité pratique est le décibel (abréviation db) :

$$A_{\text{db}} = 10 \cdot \log_{10}(s(t)/e(t)) \tag{3.1}$$

Si on compare pour un appareil (par exemple un amplificateur), les puissances d'entrée et de sortie, le rapport en puissance est donné par :

$$A_{\text{db}} = 10 \cdot \log_{10}(P_s/P_e) \tag{3.2}$$

avec un gain si $A_{\text{db}} > 0$ et un affaiblissement si $A_{\text{db}} < 0$.

Si on exprime ce rapport en puissance en fonction des tensions V_e et V_s aux bornes des charges résistives identiques, on obtient :

$$A_{\text{db}} = 20 \cdot \log_{10}(V_s/V_e) \tag{3.3}$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Cette convention permet d'exprimer, par un même nombre, le rapport en tension et le gain en puissance si les résistances (ou impédances) d'entrée et de sortie sont identiques. Quelques valeurs utiles sont données dans le tableau ci-après :

Rapport des tensions V_s/V_e	1/10	1/2	$1/\sqrt{2}$	2	10	100
Gain ou affaiblissement en db	–20	–6	–3	6	20	40

b) Bande passante

Cette comparaison des puissances ou tensions d'entrée et de sortie d'un système de transmission est utilisée lorsque l'on veut étudier l'influence d'une autre grandeur : par exemple la fréquence.

On considère une tension sinusoïdale, fournissant à l'entrée supposée résistive (indépendante de la fréquence), une puissance moyenne constante quelle que soit la fréquence : P_e constant. On étudie l'évolution de la puissance de sortie sur une charge résistive en fonction de la fréquence : $P_s = P_s(f)$. P_s passe par un maximum P_{sm} qui est considéré comme une référence. La courbe ainsi obtenue représente la réponse du système de transmission à une entrée fixée en fonction de la fréquence.

On appelle **bande passante** du système de transmission la zone de fréquences pour lesquelles on a $P_s/P_{sm} < 0,5$ ou $A_{\text{db}} = -3$ db. Ainsi la bande passante à –3 db est la tranche des fréquences pour lesquelles l'affaiblissement de la puissance de sortie, à puissance entrante constante, est inférieur à –3 db par rapport à sa valeur maximale (*cf.* figure 3.1). Si l'on applique cette définition pour les tensions, on obtient un rapport « tension de sortie / tension maximale » (V_s/V_{sm}) devant être supérieur ou égal à $1/\sqrt{2}$ ($\sim 0,7$). On définit également une bande passante à –6 db ($V_s/V_{sm} = 0,5$).

Copyright © 2017 Dunod.

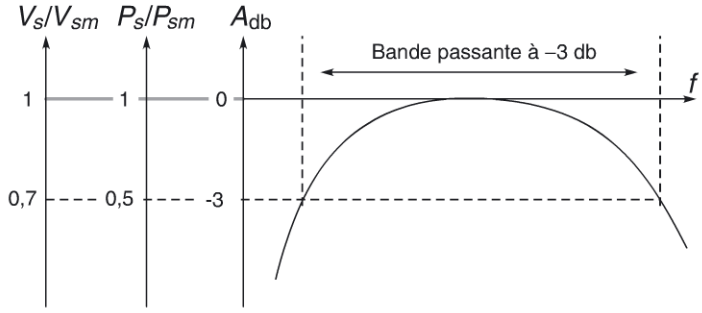

Figure 3.1 – Bande passante à –3 db d'un système de transmission.

c) Propriété d'un système de transmission

Nous allons nous intéresser à des systèmes de transmission qui possèdent les trois propriétés suivantes : linéarité, continuité et stationnarité.

• Systèmes linéaires

En considérant $s_1(t)$ réponse à $e_1(t)$ et $s_2(t)$ réponse à $e_2(t)$, le système de transmission, noté S.T., est dit linéaire si :

$$a \cdot e_1(t) + b \cdot e_2(t) \xrightarrow{\text{S.T.}} a \cdot s_1(t) + b \cdot s_2(t)$$

Il est important de remarquer que presque tous les systèmes sont linéaires pour les faibles signaux (première approximation). D'autre part, une des conséquences de la linéarité est que, pour prévoir la réponse à une action quelconque, il suffit de connaître la réponse pour une collection dénombrable de signaux d'entrée. L'extension de la propriété de linéarité s'écrit de la façon suivante : si $e_i(t) \xrightarrow{\text{S.T.}} s_i(t)$, alors :

$$e(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \cdot e_i(t) \xrightarrow{\text{S.T.}} s(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \cdot s_i(t)$$

• Systèmes continus

Soit $s_n(t)$ la suite des réponses paramétrées par n à $e_n(t)$, le système est dit continu si nous avons la propriété suivante

$$\lim_{n \to +\infty} e_n(t) \xrightarrow{\text{S.T.}} \lim_{n \to +\infty} s_n(t)$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Remarque
Il est intéressant de noter qu'un « intégrateur pur » est un système continu, mais pas un « dérivateur pur ».

• Systèmes stationnaires
Un système est stationnaire si son comportement est indépendant de l'origine du temps, donc, si $s(t)$ est la réponse à $e(t)$:

$$e(t-\theta) \xrightarrow{\text{S.T.}} s(t-\theta)$$

Les filtres sont définis comme des systèmes de transmission linéaires, continus et stationnaires.

3.1.2 La convolution

a) Définition

Une impulsion brève, injectée à l'entrée d'un système de transmission linéaire, continu et stationnaire, donne en sortie un signal de durée finie. Cette réponse est appelée **réponse impulsionnelle** (ou percussionnelle) du filtre et notée $h(t)$. Dans le cas général, c'est-à-dire pour signal d'entrée quelconque, nous avons une relation mathématique qui lie le signal d'entrée $e(t)$ et le signal de sortie $s(t)$ pour un système de transmission possédant les trois propriétés vues précédemment ou filtre, noté S.T.-L.C.S., soit :

$$e(t) \xrightarrow{\text{S.T.-L.C.S.}} s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot \mathrm{d}\tau = e(t) * h(t) \qquad (3.4)$$

Cette opération, appelée « **convolution** » et notée $*$, exprime la réponse à un signal quelconque à partir de celle à un signal type (réponse impulsionnelle) ; la réponse dépend du filtre, caractérisé par $h(t)$, et de l'histoire du signal. Le calcul de la convolution est complexe. Il nécessite de nombreuses étapes de calculs : pour chaque point de la réponse $s(t)$, il est nécessaire d'élaborer la fonction $h(t-\tau)$, symétrique

Copyright © 2017 Dunod.

de la réponse impulsionnelle par rapport à l'axe des ordonnées et décalée temporellement, puis le produit par le signal d'entrée $e(\tau)$ et enfin l'intégration sur la variable τ.

Les filtres, qui sont définis comme des systèmes de transmission linéaires, continus et stationnaires, sont des systèmes de convolution.

b) Propriétés

- commutativité : $x * y = y * x$
- associativité : $x * (y * z) = (x * y) * z$
- distributivité par rapport à l'addition : $x * (y + z) = x * y + x * z$
- élément neutre (pic de Dirac) : $x * \delta = \delta * x = x$

c) Théorème de Plancherel

La relation très importante entre la transformée de Fourier et le produit de convolution s'énonce sous la forme du théorème suivant :

La transformée de Fourier d'un produit de convolution est un produit simple et réciproquement.

Ainsi, pour deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ ayant pour transformées de Fourier respectives $X(f)$ et $Y(f)$, nous avons :

$$x(t) * y(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) \cdot Y(f) \quad \text{et} \quad x(t) \cdot y(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) * Y(f) \tag{3.5 et 3.6}$$

d) Convolution des signaux périodiques

Pour deux signaux périodiques réels $x(t)$ et $y(t)$ de période T_0, on définit la convolution de la manière suivante :

$$P_{\text{conv}}(t) = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} x(\tau) \cdot y(t - \tau) \cdot \mathrm{d}\tau \tag{3.7}$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

3.2 FILTRAGE

3.2.1 Fenêtrage temporel

a) Principes généraux

Le terme de « filtrage » est habituellement utilisé dans le domaine fréquentiel. Aussi dans le domaine temporel, nous parlerons plus de fenêtrage, que de filtrage, temporel qui peut être défini comme l'opération consistant à prélever, interrompre ou seulement atténuer un signal. Ainsi, le signal de sortie $s(t)$ est le produit du signal d'entrée $e(t)$ et de la fonction temporelle du filtre ou de la fenêtre $g(t)$:

$$s(t) = e(t) \cdot g(t)$$

La modification qu'entraîne ce fenêtrage temporel au niveau du spectre de $e(t)$ est donnée en appliquant le théorème de Plancherel à la relation précédente :

$$s(t) = e(t) \cdot g(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} S(f) = E(f) * G(f) \tag{3.8}$$

Par conséquent, pour un filtre de fonction temporelle $g(t)$ quelconque, le spectre du signal de sortie sera différent de celui du signal d'entrée conséquence du produit de convolution. Ainsi les actions temporelles telles que le prélèvement d'un signal (cas de toutes mesures réalisées pendant un temps fini) ou l'interruption (interrupteur monté sur le circuit d'un haut-parleur) ou encore l'atténuation (atténuation réalisée pendant un temps fini à l'aide d'un potentiomètre réglant le volume du son) sont des filtres ou fenêtrages temporels qui vont modifier le spectre du signal.

Dans le premier cas (découpage d'une tranche temporelle d'un signal), si la durée τ, dite durée de la mesure, tend vers l'infini, nous pouvons vérifier la cohérence de la relation 3.8 ; étant donné que $g(t) = 1$ pour tout t, il vient :

$$g(t) = 1 \overset{F}{\longleftrightarrow} G(f) = \delta(f)$$

donc $s(t) = e(t) \cdot g(t) = e(t)$ pas de modification du signal
et $S(f) = E(f) * \delta(f) = E(f)$ pas de modification du spectre

Copyright © 2017 Dunod.

b) Mesure d'un signal

L'enregistrement par un appareil ou le traitement par ordinateur d'un signal impose un temps fini au signal qu'il soit analogique ou échantillonné. Ce problème de la durée finie d'un signal est celui de la mesure.

Pour modéliser cette troncature temporelle du signal, on utilise la fonction porte temporelle $\Pi_\tau(t)$ de largeur τ. Comme nous l'avons vu la transformée de Fourier de cette fonction porte est la fonction sinus cardinal $\text{sinc}(\tau f)$ (*cf.* chapitre 2). Ainsi, les relations de modifications du signal dues à la mesure sur une durée finie τ sont :

$$s(t) = e(t) \cdot \Pi_\tau(t) \quad \text{et} \quad S(f) = E(f) * \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f}$$

L'influence de cette fenêtre temporelle sur le signal et sur son spectre peut être très importante. Plus l'observation ou la mesure du signal sera longue et plus le spectre du signal sera précis, c'est-à-dire peu perturbé par cette fenêtre temporelle physiquement inévitable.

Prenons l'exemple d'un signal cosinusoïdal pur de période T_0. Le spectre de ce signal est représenté par deux pics de Dirac situés aux fréquences F_0 et $-F_0$. Soit :

$$e(t) = \cos(2\pi F_0 t) \overset{F}{\longleftrightarrow} E(f) = \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + F_0) + \delta(f - F_0)]$$

En utilisant les relations précédentes, on obtient le signal mesuré $s(t)$ (c'est-à-dire $e(t)$ tronqué et limité à τ) et son spectre $S(f)$:

$$s(t) = \cos(2\pi F_0 t) \cdot \Pi_\tau(t)$$

et

$$S(f) = \frac{\tau}{2} \cdot \left[\frac{\sin(\pi\tau(f + F_0))}{\pi\tau(f + F_0)} + \frac{\sin(\pi\tau(f - F_0))}{\pi\tau(f - F_0)} \right]$$

Nous obtenons ainsi un spectre formé de deux fonctions de type sinc centrées sur les fréquences F_0 et $-F_0$ (*cf.* figure 3.2).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

Dans le cas général d'un signal périodique quelconque avec un spectre formé d'un ensemble de raies de diverses importances, le fenêtrage temporel, c'est-à-dire la mesure d'un tel signal, conduit à un spectre formé de la somme de toutes les fonctions sinc placées au niveau des fréquences existantes avec une amplitude proportionnelle à l'importance de la raie. Ce résultat peut conduire à une interprétation erronée du spectre : distinction impossible de deux fréquences proches, localisation d'une fréquence sans existence réelle, etc.

Remarque

Il est donc important de constater que le spectre d'un signal tronqué temporellement, c'est-à-dire mesuré sur un temps fini (cas réel), va être modifié dans le sens où chaque composante du spectre sera transformée en une forme sinc(x). Ce résultat correspond au principe d'incertitude : une connaissance complète du signal sur l'axe des temps conduit à une détermination précise dans le domaine fréquentiel alors qu'une connaissance limitée temporellement du signal induit un « flou » sur la détermination du spectre de ce signal. Une étude complète de cet effet de fenêtrage temporel et des moyens de le limiter est faite dans le chapitre 7.

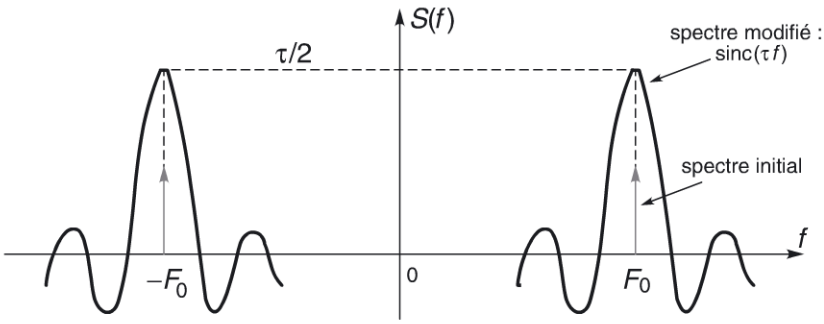

Figure 3.2 – Modification du spectre en fréquence d'un signal sinusoïdal par une troncature temporelle ou mesure.

Copyright © 2017 Dunod.

3.2.2 Filtrage fréquentiel

a) Théorème fondamental des filtres

Les termes de filtre ou de filtrage s'appliquent en général plus à des systèmes définis par un produit dans l'espace des fréquences. De la même manière que dans le domaine temporel, nous parlerons de filtrage fréquentiel comme l'opération consistant à prélever, interrompre ou seulement atténuer tout ou partie des composantes fréquentielles d'un signal. Ainsi, le spectre $S(f)$ du signal de sortie $s(t)$ est le produit du spectre $E(f)$ signal d'entrée $e(t)$ et de la fonction fréquentielle du filtre $H(f)$:

$$S(f) = E(f) \cdot H(f)$$

La modification qu'entraîne ce filtrage fréquentiel au niveau de la représentation temporelle $e(t)$ est donnée en appliquant le théorème de Plancherel à la relation précédente :

$$S(f) = E(f) \cdot H(f) \overset{F}{\longleftrightarrow} s(t) = e(t) * h(t) \tag{3.9}$$

Le théorème fondamental des filtres s'appuie sur la définition même des filtres comme systèmes de convolution. Le filtre est défini par sa réponse impulsionnelle, notée $h(t)$, et par sa fonction de transfert, notée $H(f)$ ou $H(p)$ réciproquement transformée de Fourier ou de Laplace de $h(t)$ (*cf.* annexes). La réponse $s(t)$ d'un tel filtre à un signal d'entrée $e(t)$ est donnée par les opérations des relations 3.9, soit :

- Convolution dans l'espace temps

$$s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot \mathrm{d}\tau \tag{3.10}$$

- Produit dans l'espace des fréquences (transformée de Fourier ou de Laplace) :

$$S(f) = E(f) \cdot H(f) \quad \text{ou} \quad S(p) = E(p) \cdot H(p) \tag{3.11}$$

De plus, dans la pratique, un filtre sera souvent caractérisé par sa réponse indicielle $s_{\text{ind}}(t)$, c'est-à-dire sa réponse à un échelon unité $u(t)$:

$$s_{\text{ind}}(t) = u(t) * h(t) = \int_{0}^{+\infty} u(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot \mathrm{d}\tau \tag{3.12}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

La relation de base 3.10 peut prendre différentes formes suivant les caractéristiques temporelles des signaux $e(t)$ et $h(t)$:

• $h(t)$ causal (filtre réalisable : *cf.* paragraphe suivant) :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} e(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot \mathrm{d}\tau$$

• $e(t)$ causal (exemple du signal $u(t)$ « échelon unité ») :

$$s(t) = \int_{0}^{+\infty} e(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot \mathrm{d}\tau$$

• $e(t)$ et $h(t)$ causaux :

$$s(t) = \int_{0}^{t} e(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot \mathrm{d}\tau$$

À partir de ces relations, il est possible de déterminer la réponse à une action ou signal d'entrée quelconque.

Mais il peut être très intéressant de passer dans le domaine fréquentiel pour déterminer la réponse, car l'opération à réaliser est alors un produit simple. Le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel pour le signal d'entrée se fait par transformée de Fourier ou de Laplace, de même le retour dans le domaine temporel pour le signal de sortie se fait par les transformations inverses (le calcul de ces transformées se faisant à partir des tables des fonctions usuelles, des propriétés et des règles opératoires de base). Soit le chemin de calcul suivant :

	Action				**Réponse**
Domaine temporel	$e(t)$	$\rightarrow$	FILTRE (convolution par $h(t)$)	$\rightarrow$	$s(t)$
	$\downarrow$				$\uparrow$
	Transformée de Fourier ou de Laplace				Transformée de Fourier ou de Laplace
	$\downarrow$				$\uparrow$
Domaine fréquentiel	$E(f)$ ou $E(p)$	$\rightarrow$	FILTRE (produit par $H(f)$ ou $H(p)$)	$\rightarrow$	$S(f)$ ou $S(p)$

Copyright © 2017 Dunod.

Une des applications les plus importantes de ce processus est le calcul de la réponse de filtres en chaîne. Si n filtres, caractérisés par leur réponse impulsionnelle $h_i(t)$ et leur fonction de transfert $H_i(f)$ ou $H_i(p)$, sont mis en série, on peut les remplacer par un filtre équivalent dont la réponse impulsionnelle peut être calculée par :

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) * \cdots * h_n(t)$$

Ce calcul est relativement difficile à effectuer. Par contre le calcul de la fonction de transfert équivalente sera très simple :

$$H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f) \cdot \cdots \cdot H_n(f) = \prod_{i=1}^{n} H_i(f)$$

Il est toutefois très important de noter que ce calcul n'est possible que si la mise en chaîne des filtres ne modifie pas leurs caractéristiques, c'est-à-dire si l'impédance de sortie du filtre est très petite par rapport à l'impédance d'entrée du filtre suivant. Cette condition sera remplie en particulier dans le cas des filtres numériques (*cf.* chapitre 8).

b) Filtres réalisables

Un filtre est réalisable si sa réponse impulsionnelle $h(t)$ est nulle pour $t<0$: car l'effet ne peut précéder la cause. Tout système physique aura donc une réponse impulsionnelle $h(t)$ réelle quelconque (ni paire, ni impaire), par conséquent, la fonction de transfert $H(f)$ sera obligatoirement complexe :

$$H(f) = |H(f)| \cdot \mathrm{e}^{-j \cdot \varphi(f)}$$

Le spectre $S(f)$ de la réponse $s(t)$ du filtre à un signal $e(t)$, ayant pour transformée de Fourier $E(f)$, montre que **tout filtre physique réalisable déphase** :

$$S(f) = E(f) \cdot H(f) = E(f) \cdot |H(f)| \cdot \mathrm{e}^{-j \cdot \varphi(f)}$$

Dans le cas des filtres réalisables, il est possible de calculer plus complètement la réponse indicielle suivant l'équation 3.12. Le filtre étant

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

réalisable, sa réponse impulsionnelle $h(t)$ peut se mettre sous la forme causale :

$$h(t) = h_0(t) \cdot u(t) \quad \text{avec } h_0(t) \text{ une fonction quelconque}$$

Ainsi, nous obtenons la réponse indicielle d'un filtre réalisable :

$$s_{\text{ind}}(t) = u(t) * h(t) = \int_0^t h_0(\tau) \cdot \mathrm{d}\tau \tag{3.13}$$

Les filtres analogiques continus réalisables sont construits à partir des composants électroniques : résistances, capacités, self-inductances et amplificateurs opérationnels. Le fonctionnement de ces filtres est caractérisé par des équations intégro-différentielles linéaires à coefficients constants entre le signal d'entrée $e(t)$ et le signal de sortie $s(t)$. En utilisant la transformée de Laplace, cette relation donne une fonction de transfert $H(p)$ qui est le quotient de deux polynômes :

$$H(p) = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot p^i \Big/ \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot p^j \tag{3.14}$$

Cette relation 3.14 peut s'exprimer sous la forme d'une somme ou d'un produit des quatre fonctions élémentaires suivantes :

• Filtre passe-bas du premier ordre (*cf.* paragraphe suivant) :

$$H_1(p) = \frac{1}{1 + \tau \cdot p} \quad \text{avec } \tau \text{ le temps de réponse}$$

• Filtre passe-haut du premier ordre (*cf.* paragraphe suivant) :

$$H_2(p) = \frac{\tau \cdot p}{1 + \tau \cdot p} \quad \text{avec } \tau \text{ le temps de réponse}$$

• Filtre passe-bas du deuxième ordre :

$$H_3(p) = \frac{1}{1 + 2 \cdot \xi \cdot \tau \cdot p + (\tau \cdot p)^2} \quad \text{avec } \xi \text{ le coefficient d'amortissement}$$

Copyright © 2017 Dunod.

• Filtre passe-haut du deuxième ordre :

$$H_4(p) = \frac{(\tau \cdot p)^2}{1 + 2 \cdot \xi \cdot \tau \cdot p + (\tau \cdot p)^2} \text{ avec } \xi \text{ le coefficient d'amortissement}$$

Remarque

Posons la question de la faisabilité d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure F_c. Le spectre de ce filtre peut être modélisé par la fonction porte $H(f) = \Pi_{2F}(f)$. Dans ce cas, la réponse impulsionnelle du filtre est la transformée de Fourier inverse de cette fonction de transfert, soit $h(t) = \text{sinc}(2F_c t)$. On constate que la réponse impulsionnelle $h(t)$, ainsi obtenue, n'est pas causale. Par conséquent, nous pouvons en déduire qu'un filtre passe-bas idéal n'est pas réalisable.

c) Exemples de filtres

Nous allons analyser les fonctionnements temporel et fréquentiel des deux premiers filtres de base (filtre passe-bas et filtre passe-haut du premier ordre) en étudiant la fonction de transfert $H(f)$, la réponse impulsionnelle $h(t)$, la réponse indicielle $s_{\text{ind}}(t)$ et la réponse à une rampe $s_r(t)$ des deux filtres.

• Filtre passe-bas du premier ordre :

La réponse du filtre passe-bas du premier ordre se calcule à partir de l'équation différentielle suivante :

$$e(t) = R \cdot C \cdot \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) \qquad \text{avec } \tau = RC \text{ la constante de temps du filtre}$$

La fonction de transfert $H(f)$ ou $H(p)$ est le rapport des tensions de sortie et d'entrée à vide (sortie ouverte) en régime harmonique établi :

$$H(f) = \frac{S(f)}{E(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi\tau f} \text{ ou } H(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \quad \text{avec le pôle } p = 1/\tau$$

L'étude d'un filtre se fait généralement en décrivant l'évolution du module et de la phase de la fonction de transfert en fonction de la fréquence. Représentant le rapport du signal de sortie $s(t)$ au signal d'entrée $e(t)$, le module de la fonction de transfert, appelé gain du filtre G_{db},

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

est donné en db suivant la convention de la relation 3.3. Dans le cas du filtre passe-bas du premier ordre, nous avons les deux expressions suivantes :

$$G_{\text{db}} = -10\log_{10}\left(1 + (2\pi\tau f)^2\right) \quad \text{et} \quad \varphi = -Arctg\,(2\pi\tau f)$$

À partir de l'expression du module de la fonction de transfert, on trace la courbe de gain du filtre qui est appelée aussi diagramme de Bode (*cf.* figure 3.3). Dans ce plan de Bode (G_{db}, log(f)), on peut représenter soit la courbe réelle, soit seulement les droites asymptotiques à cette courbe. La fréquence particulière ($F_c = 1/2\pi RC$) est appelée fréquence de coupure du filtre et, pour cette valeur, le gain vaut −3 db. À partir de l'expression de la phase, on obtient la courbe de phase du filtre. La phase étant négative pour toutes les valeurs de la fréquence, le filtre sera dit à retard de phase : le signal de sortie est en retard par rapport au signal d'entrée (*cf.* figure 3.4).

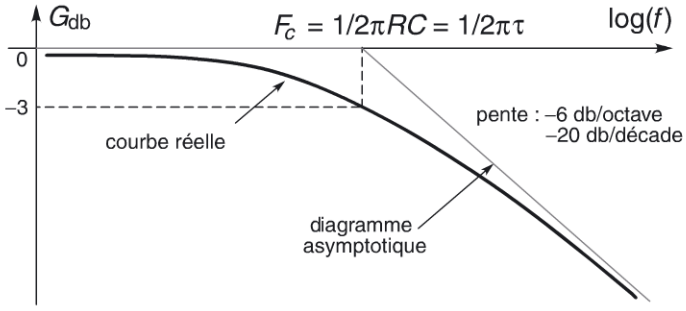

Figure 3.3 – Courbe de gain ou diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du 1er ordre.

À partir de l'expression de $H(f)$, la transformée de Fourier inverse permet d'obtenir la réponse impulsionnelle du filtre en utilisant la transformée suivante (*cf.* chapitre 2) :

$$s(t) = A \cdot u(t) \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot t} \overset{F}{\longleftrightarrow} S(f) = \frac{A}{a + j2\pi f}$$

soit le résultat suivant présenté sur la figure 3.5 :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} \cdot u(t) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

Copyright © 2017 Dunod.

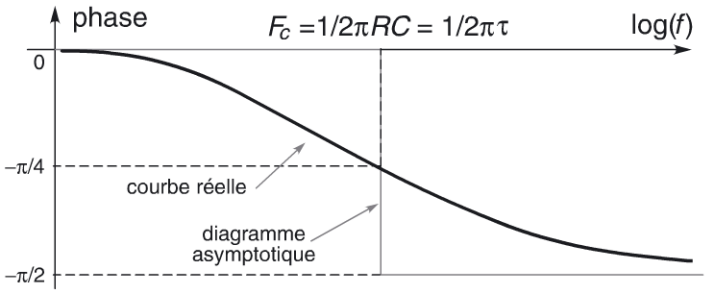

Figure 3.4 – Courbe de phase d'un filtre passe-bas du 1er ordre.

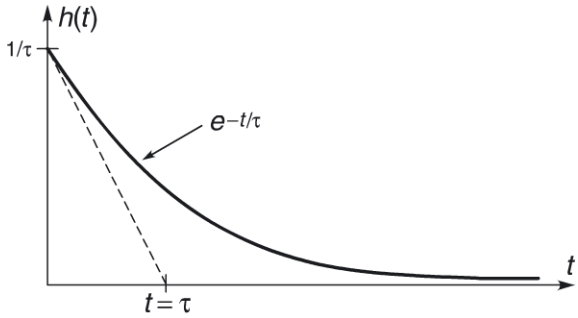

Figure 3.5 – Réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas du 1er ordre.

À partir de l'expression de $h(t)$ et de la relation générale 3.13, donnant la réponse indicielle d'un filtre, nous avons la réponse indicielle d'un filtre passe-bas du premier ordre (*cf.* figure 3.6) :

$$s_{\text{ind}}(t) = \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^{\theta} u(\theta) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\theta}{\tau}} \cdot \mathrm{d}\theta = (\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\ ) \cdot u\,(t)$$

À partir de la relation 3.10 représentant l'opération de convolution réalisée par le filtre et l'expression de $h(t)$, la réponse du filtre à un signal causal quelconque $e(t)$ peut être écrite sous la forme suivante :

$$s(t) = \frac{1}{\tau} \cdot u(t) \cdot \int_0^{t} \mathrm{e}^{-\frac{\theta}{\tau}} \cdot e\,(t - \theta) \cdot \mathrm{d}\theta$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

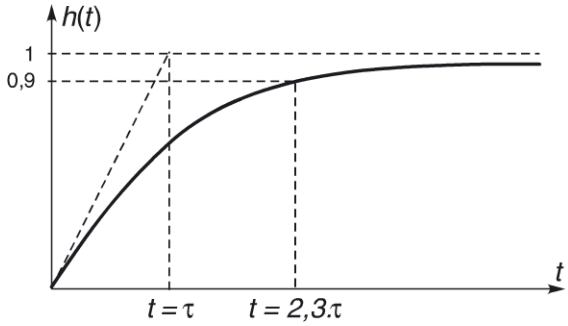

Figure 3.6 – Réponse indicielle d'un filtre passe-bas du 1er ordre.

ou

$$s(t) = \frac{1}{\tau} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t) \cdot \int_0^t \mathrm{e}^{+\frac{\theta}{\tau}} \cdot \mathrm{e}(\theta) \cdot \mathrm{d}\theta$$

Cette dernière expression permet par exemple de calculer simplement la réponse d'un filtre à une entrée de type rampe limitée en temps (*cf.* figure 3.7). L'expression de cette entrée causale est :

$$e(t) = t/t_0 \quad \text{pour } t \in [0, t_0] \qquad \text{et} \qquad e(t) = 1 \quad \text{pour } t \in [t_0, +\infty]$$

Le signal de sortie $s_r(t)$ va donc être le résultat suivant présenté en deux parties selon les valeurs de t :

$$s_r(t) = \frac{1}{t_0} \cdot u(t) \cdot [t - \tau \cdot (1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})] \qquad \text{pour } t \in [0, t_0]$$

$$s_r(t) = u(t) \cdot [1 - \frac{\tau}{t_0} \cdot (1 - \mathrm{e}^{-\frac{t_0}{\tau}}) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}] \quad \text{pour } t \in [t_0, +\infty]$$

Ces deux courbes se raccordent au point $t = t_0$. Cette sollicitation du type rampe est utilisée dans le domaine de l'automatique où elle correspond à la commande progressive d'un actionneur pour arriver à la valeur de consigne, cet actionneur étant modélisé par un opérateur retard. On vérifie en particulier le retard de $\tau = RC$ de la sortie sur l'entrée. Suivant les valeurs respectives de τ et t_0, le signal de sortie a des représentations différentes ; la figure 3.7 correspond à un cas intermédiaire avec une valeur du rapport τ/t_0 inférieur à 1.

Copyright © 2017 Dunod.

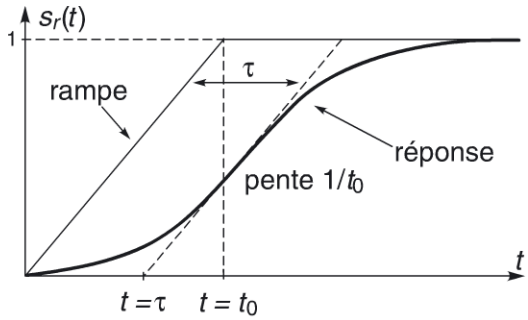

Figure 3.7 – Réponse d'un filtre passe-bas du 1er ordre à un signal de type rampe limitée en temps.

• Filtre passe-haut du premier ordre :

La réponse du filtre passe-haut du premier ordre se calcule à partir de l'équation différentielle suivante :

$$R \cdot C \cdot \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} = R \cdot C \cdot \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t)$$

avec $\tau = RC$ la constante de temps du filtre

La fonction de transfert $H(f)$ ou $H(p)$ est le rapport des tensions de sortie et d'entrée à vide (sortie ouverte) en régime harmonique établi :

$$H(f) = \frac{S(f)}{E(f)} = \frac{j2\pi\tau f}{1 + j2\pi\tau f}$$

ou $H(p) = \dfrac{\tau p}{1 + \tau p}$ avec le pôle $p = 1/\tau$ et le zéro $p = 0$

Dans le cas du filtre passe-haut du premier ordre, nous avons les deux expressions du gain du filtre et de la phase suivantes :

$$G_{\mathrm{db}} = 20 \log_{10}\left(2\pi\tau f / \sqrt{1 + (2\pi\tau f)^2}\right) \quad \text{et} \quad \varphi = Arctg\,(1/2\pi\tau f)$$

À partir de l'expression du module de la fonction de transfert, on trace la courbe de gain du filtre, diagramme de Bode (*cf.* figure 3.8). La fréquence particulière ($F_c = 1/2\pi RC$) est appelée fréquence de coupure

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

du filtre et, pour cette valeur, le gain vaut −3 db. À partir de l'expression de la phase, on obtient la courbe de phase du filtre. La phase étant positive pour toutes les valeurs de la fréquence, le filtre sera dit à avance de phase : le signal de sortie est en avance par rapport au signal d'entrée (*cf.* figure 3.9).

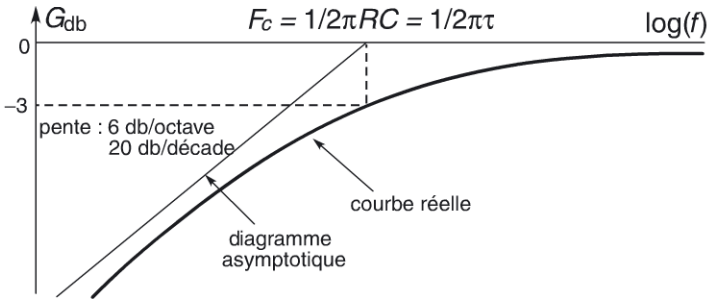

Figure 3.8 – Courbe de gain ou diagramme de Bode d'un filtre passe-haut du 1er ordre.

À partir de l'expression de $H(f)$, la transformée de Fourier inverse permet d'obtenir la réponse impulsionnelle du filtre en utilisant la transformée suivante (*cf.* chapitre 2) :

$$s(t) = A \cdot u(t) \cdot e^{-a \cdot t} \overset{F}{\longleftrightarrow} S(f) = \frac{A}{a + j2\pi f}$$

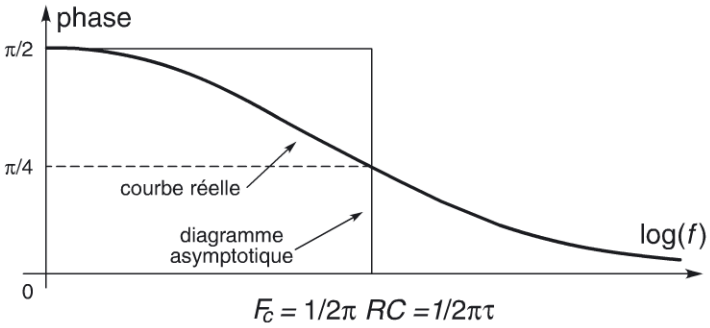

Figure 3.9 – Courbe de phase d'un filtre passe-haut du 1er ordre.

Copyright © 2017 Dunod.

soit le résultat suivant présenté sur la figure 3.10 :

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau} \cdot u(t) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

À partir de l'expression de $h(t)$ et de la relation générale 3.13, donnant la réponse indicielle d'un filtre, nous avons la réponse indicielle d'un filtre passe-haut du premier ordre (*cf.* figure 3.11) :

$$s_{\text{ind}}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$$

Considérons en entrée un signal de rampe non limité en temps modélisé de la façon suivante :

$$e(t) = a.t.u(t) \quad \text{pour } t \geq 0$$

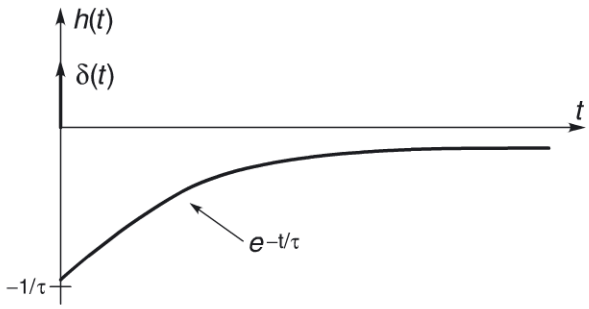

Figure 3.10 – Réponse impulsionnelle d'un filtre passe-haut du 1er ordre.

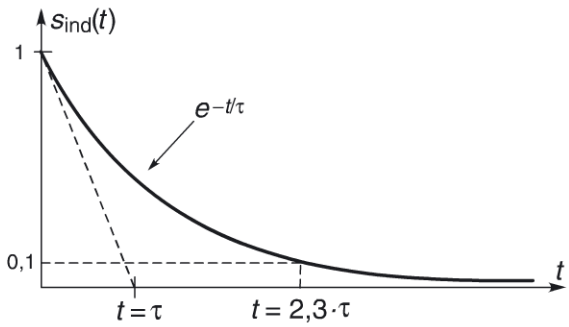

Figure 3.11 – Réponse indicielle d'un filtre passe-haut du 1er ordre.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

À partir de la relation 3.10 représentant l'opération de convolution réalisée par le filtre et l'expression de $h(t)$, on obtient la réponse du filtre à un signal causal rampe défini ci-avant (*cf* figure 3.12) :

$$s_r(t) = a \cdot \tau \cdot u(t) \cdot \left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

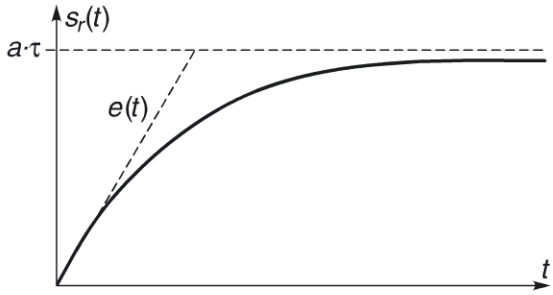

Figure 3.12 – Réponse d'un filtre passe-haut du 1er ordre à un signal de type rampe non limitée en temps.

3.3 Corrélation

3.3.1 Puissance et énergie des signaux

Toute transmission d'information est liée à une transmission d'énergie. Lorsque nous faisons une mesure, le processus subit toujours un prélèvement d'énergie de la part du dispositif de mesure. Cette notion de puissance d'un signal est donc très importante. On peut caractériser un signal selon les critères de puissance et d'énergie dans le plan temporel ou fréquentiel.

a) Puissance temporelle d'un signal

La puissance instantanée d'un signal $x(t)$ s'exprime sous la forme :

$$p(t) = x(t) \cdot \overline{x}(t) = |x(t)|^2 \tag{3.15}$$

Copyright © 2017 Dunod.

La puissance moyenne d'un signal $x(t)$ sur une durée T_0 est :

$$P(t, T_0) = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} x(t) \cdot \overline{x}(t) \cdot \mathrm{d}t$$

D'où l'énergie totale du signal $x(t)$:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \overline{x}(t) \cdot \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \cdot \mathrm{d}t \qquad (3.16)$$

La puissance instantanée d'interaction de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$p_{xy}(t) = x(t) \cdot \overline{y}(t) \quad \text{et} \quad p_{yx}(t) = y(t) \cdot \overline{x}(t) \qquad (3.17)$$

La puissance moyenne d'interaction de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ sur une durée T_0 est donnée par :

$$P_{xy}(t, T_0) = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} x(t) \cdot \overline{y}(t) \cdot \mathrm{d}t \text{ et } P_{yx}(t, T_0) = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} y(t) \cdot \overline{x}(t) \cdot \mathrm{d}t \qquad (3.18)$$

b) Puissance fréquentielle d'un signal, densité spectrale

Si le signal $x(t)$ a une transformée de Fourier $X(f)$, on définit le spectre de puissance d'un signal ou **densité spectrale** par :

$$S_{xx}(f) = X(f) \cdot \overline{X}(f) = |X(f)|^2 \qquad (3.19)$$

L'énergie contenue dans une bande de fréquence de largeur Δf autour d'une fréquence F_0 est :

$$E_x(\Delta f, F_0) = \int_{F_0 - \Delta f/2}^{F_0 + \Delta f/2} S_{xx}(f) \cdot \mathrm{d}f$$

L'énergie totale contenue dans le spectre $X(f)$ s'exprime sous la forme :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) \cdot \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \cdot \mathrm{d}f \qquad (3.20)$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Nous pouvons aussi définir la densité spectrale d'interaction de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ de transformées de Fourier respectives $X(f)$ et $Y(f)$ par :

$$S_{xy}(f) = X(f) \cdot \overline{Y}(f) \quad \text{et} \quad S_{yx}(f) = Y(f) \cdot \overline{X}(f) \tag{3.21}$$

3.3.2 Corrélation et densité spectrale

a) Définition de la fonction de corrélation pour les signaux à énergie finie

La fonction d'autocorrélation d'un signal *x(t)* est définie par :

$$C_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \cdot \overline{x}(\theta - t) \cdot \mathrm{d}\theta \tag{3.22}$$

La fonction d'intercorrélation de deux signaux *x(t)* et *y(t)* est définie par :

$$C_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \cdot \overline{y}(\theta - t) \cdot \mathrm{d}\theta \tag{3.23}$$

Les fonctions de corrélation traduisent la similitude d'un signal ou de deux signaux au niveau de la forme et de la position en fonction du paramètre de translation t. Dans le cas de la fonction d'autocorrélation, c'est une étude de la ressemblance du processus avec lui-même au cours du temps, et, par conséquent, si le signal est périodique, la fonction d'autocorrélation permettra de détecter cette périodicité.

La fonction d'autocorrélation $C_{xx}(t)$ possède deux propriétés importantes. Pour des signaux réels, la fonction d'autocorrélation est paire, soit pour un signal $x(t)$ réel :

$$C_{xx}(t) = C_{xx}(-t)$$

D'autre part la fonction d'autocorrélation a sa valeur maximale pour $t = 0$:

$$C_{xx}(t) \leq C_{xx}(0) \quad \text{quel que soit } t$$

Cette relation se comprend intuitivement par le fait que la fonction d'autocorrélation étant une analyse de la ressemblance d'un signal avec

Copyright © 2017 Dunod.

lui-même, le résultat de cette comparaison est maximum lorsque le signal n'est pas décalé temporellement ($t = 0$), c'est-à-dire identique à lui-même.

b) Relation avec la densité spectrale

Considérons la transformée de Fourier inverse de la densité spectrale d'un signal $x(t)$:

$$F^{-1}\{S_{xx}(f)\} = F^{-1}\left\{|X(f)|^2\right\} = F^{-1}\left\{X(f)\cdot\overline{X}(f)\right\}$$

$$F^{-1}\{S_{xx}(f)\} = x(t) * \overline{x}(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)\cdot\overline{x}(\theta - t)\cdot \mathrm{d}\theta = C_{xx}(t)$$

D'où relation suivante :

$$C_{xx}(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} S_{xx}(f) \tag{3.24}$$

et pour deux signaux $x(t)$ et $y(t)$:

$$C_{xy}(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} S_{xy}(f) \quad \text{ou} \quad C_{yx}(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} S_{yx}(f)$$

Ainsi la transformée de Fourier de la fonction de corrélation du signal représente la densité spectrale de l'énergie, c'est-à-dire la redistribution de l'énergie du signal sur l'axe des fréquences. Aussi il sera souvent plus facile de calculer la fonction d'autocorrélation ou d'intercorrélation d'un signal en passant par son spectre ou sa densité spectrale.

c) Corrélation de signaux périodiques

Pour un signal périodique réel $x(t)$ de période T_0, on définit la corrélation de la manière suivante :

$$C_{xx}(t) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\theta)\cdot x(\theta - t)\cdot \mathrm{d}\theta \tag{3.25}$$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, tous les signaux périodiques peuvent s'exprimer sous la forme d'un développement en série

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

de Fourier (*cf.* relation 2.1) :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n F_0 t + b_n \sin 2\pi n F_0 t)$$

En appliquant la relation précédente de définition de la corrélation, nous obtenons la fonction d'autocorrélation suivante :

$$C_{xx}(t) = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \cdot \cos(2\pi n F_0 t)$$

Nous pouvons effectivement conclure que la fonction d'autocorrélation conserve l'information fréquence, mais pas l'information phase. Le signal d'autocorrélation possède toutes les fréquences comprises dans le signal initial et uniquement ces fréquences. En revanche la représentation de la fonction d'autocorrélation est d'autant plus distordue que le signal est riche en harmoniques étant donné que l'addition de ces signaux périodiques se fait sans cohérence de phase. Les distorsions de certains signaux riches en harmoniques seront mises en évidence dans le paragraphe suivant.

Pour deux signaux périodiques réels $x(t)$ et $y(t)$, on définit la corrélation de la manière suivante :

$$C_{xy}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{-T_0/2} x(\theta) \cdot y(\theta - t) \cdot \mathrm{d}\theta \tag{3.26}$$

Ainsi si ces signaux sont périodiques de même période T_0, ils peuvent s'exprimer sous la forme d'un développement en série de Fourier (*cf.* relation 2.5) :

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(nF_0) \cdot \mathrm{e}^{j2\pi n F_0 t} \quad \text{et} \quad y(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} Y(nF_0) \cdot \mathrm{e}^{j2\pi n F_0 t}$$

En appliquant la relation précédente de définition de la corrélation, nous obtenons la fonction d'intercorrélation suivante :

$$C_{xy}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(nF_0) \cdot \overline{Y}(nF_0) \cdot \mathrm{e}^{j2\pi n F_0 t}$$

Copyright © 2017 Dunod.

Mais si ces signaux sont périodiques de périodes différentes T_1 pour $x(t)$ et T_2 pour $y(t)$, ils peuvent s'exprimer sous la forme des développements en série de Fourier suivants (*cf.* relation 2.5) :

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(nF_1) \cdot \mathrm{e}^{j2\pi nF_1 t} \quad \text{et} \quad y(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} Y(nF_2) \cdot \mathrm{e}^{j2\pi nF_2 t}$$

La fonction d'intercorrélation est alors la suivante :

$$C_{xy}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(n \cdot (pF_1)) \cdot \overline{Y}(n \cdot (qF_2)) \cdot \mathrm{e}^{j2\pi nF_3 t} \quad \text{avec} \quad F_3 = p \cdot F_1 = q \cdot F_2$$

La fonction d'intercorrélation de deux signaux périodiques de périodes différentes est une fonction périodique dont la période est le ppcm (plus petit commun multiple) des périodes des signaux considérés. Si le rapport des périodes est irrationnel, alors la fonction d'intercorrélation est nulle.

d) Exemples de fonctions d'autocorrélation

Représentation temporelle	***Fonction d'autocorrélation***
• Signal sinusoïdal : $s(t) = A \cdot \sin(2\pi F_0 t)$:	• Fonction cosinusoïdale $C_{ss}(t) = \dfrac{A^2}{2} \cdot \cos(2\pi F_0 t)$
• Signal cosinusoïdal : $s(t) = A \cdot \cos(2\pi F_0 t)$:	• Fonction cosinusoïdale $C_{ss}(t) = \dfrac{A^2}{2} \cdot \cos(2\pi F_0 t)$
• Signal carré pair à composante continue nulle : $s(t) = s_{c1}(t)$ avec $s_{c1}(t) = -A$ pour $t \in [-T_0/2, -T_0/4]$ et $s_{c1}(t) = A$ pour $t \in [-T_0/4, T_0/4]$ et $s_{c1}(t) = -A$ pour $t \in [T_0/4, T_0/2]$	• Fonction triangulaire : $C_{s_{c1}s_{c1}}(t)$ $= \dfrac{4A^2}{\pi^2} \cdot \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^2} \cdot \mathrm{e}^{j2\pi(2p+1)F_0 t}$ $C_{s_{c1}s_{c1}}(t) = s_{tr}(t)$ avec $s_{tr}(t) = A^2 + \dfrac{4A^2}{T_0} t$ pour $t \in [-T_0/2, 0]$ et $s_{tr}(t) = A^2 - \dfrac{4A^2}{T_0} t$ pour $t \in [0, T_0/2]$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

• Fonction porte :
$s(t) = A.\Pi_\tau(t)$
avec $\Pi_\tau(t) = 1$ pour $t \in [-\tau/2, +\tau/2]$
et $\Pi_\tau(t) = 0$ pour $t \notin [-\tau/2, +\tau/2]$

• Fonction triangle
$C_{ss}(t) = A^2 \cdot \tau \cdot \Lambda_{2\tau}(t)$

3.3.3 Théorème de Parseval

Il paraît évident que l'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie : aussi elle sera la même qu'il s'agisse de la représentation temporelle ou fréquentielle. Les relations 3.16 et 3.20 permettent ainsi d'écrire :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \cdot \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \cdot \mathrm{d}f$$

ou dans le cas de deux signaux :

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \overline{y}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot \overline{Y}(f) \cdot \mathrm{d}f$$

Copyright © 2017 Dunod.

MODULATION DES SIGNAUX 4

4.1 INTRODUCTION

4.1.1 Spectre d'un signal et bande passante d'un support

Le domaine de la modulation des signaux vient du besoin de transmettre un signal physique, support d'une information entre deux points distants. Considérons un signal à transmettre $s(t)$, ayant une représentation fréquentielle $S(f)$. Le spectre du signal, calculé par la transformée de Fourier, est en particulier caractérisé par l'encombrement fréquentiel, c'est-à-dire la zone de fréquence que le signal occupe, zone appelée **largeur de bande spectrale**. Pour tout signal réel $s(t)$, on a un spectre borné pour lequel on peut définir une fréquence minimale f_m et une fréquence maximale f_M telles que $S(f) = 0$ pour toute fréquence f inférieure à f_m et supérieure à f_M. Par exemple nous avons :

– signal de parole « téléphonie » : $f_m = 300$ Hz et $f_M = 3,4$ KHz

– signal sonore « haute fidélité » : $f_m = 20$ Hz et $f_M = 16$ KHz

La transmission de ce signal va être effectuée soit à l'aide d'un support physique de transmission qui peut être un câble métallique (paire bifilaire, câble coaxial) ou une fibre optique, soit en utilisant une propagation libre d'ondes hertziennes.

De la même façon que pour le signal, une voie de transmission est nécessairement imparfaite et donc ne laisse passer que certaines fréquences. Cette bande de fréquences, dans laquelle les signaux sont « correctement » transmis, caractérise le support de transmission ; elle est appelée **bande passante du support**. Cette bande passante est gé-

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

néralement définie par rapport à la valeur du rapport de la puissance du signal à la sortie sur la puissance du signal à l'entrée (*cf.* paragraphe 3.1.1). Par exemple, dans le cas d'une bande passante définie à −3 db, la puissance de sortie sera égale à la moitié de la puissance du signal d'entrée.

Ainsi, en fonction des caractéristiques spectrales du signal à propager, le choix du câble est guidé par une modification moindre du signal et par une protection contre les bruits externes. D'un point de vue pratique, il est possible de réaliser un tableau comparatif des différents câbles suivant quatre critères :

Câble	Longueur	Fréquence	Mise en œuvre	Immunité aux bruits
Câble plat	très faible (< 0,5 m)	faible (< 10 KHz)	simple	non
Paire torsadée	moyenne (≈ 10 m)	moyenne (< 1 MHz)	simple	oui, moyenne
Câble coaxial	moyenne (≈ 10 m)	grande (< 100 MHz)	difficile (contrainte mécanique de torsion)	oui, grande
Fibre optique	grande (≈ Km)	très grande	très difficile (contrainte mécanique torsion et transformation du signal optique-électrique)	oui, très grande

4.1.2 Types de transmission

Les deux caractéristiques, présentées précédemment (largeur spectrale du signal et bande passante du support), conduisent aux deux remarques suivantes :

– le spectre du signal que l'on désire transmettre doit être compris dans la bande passante du support de la voie de transmission si l'on veut avoir une réception correcte sans déformation par la propagation dans le support (exemple : transmission impossible d'un signal télévision HF sur un simple câble bifilaire) ;

– si le support de la voie de transmission a une très large bande passante par rapport au signal à transmettre, il est évident que l'utilisation de la

Copyright © 2017 Dunod.

voie de transmission n'est pas optimisée (exemple : utilisation d'une fibre optique pour transmettre une ligne téléphonique).

Ces deux remarques permettent de distinguer les deux techniques de transmission de signaux utilisées :

– **transmission en bande de base** : les signaux sont transmis tels qu'ils sortent de la source, c'est-à-dire dans leur bande de fréquence originale. Cette technique est utilisée chaque fois que le milieu de transmission convient au sens des domaines fréquentiels et que les conditions économiques permettent de consacrer un support physique à chaque communication (exemple : réseaux locaux informatiques) ;

– **transmission par modulation** : cette opération consiste à transposer un signal en un autre signal contenant la même information, mais avec une modification en fréquence du signal.

Ce dernier mode de transmission par modulation, que nous allons étudier, présente essentiellement deux avantages :

– le **multiplexage fréquentiel** : utilisation du même support de transmission par plusieurs communications ;

– l'**adaptation aux conditions particulières d'un milieu de transmission** : insensibilisation aux parasites, augmentation des distances de propagation, etc.

4.1.3 Les différentes formes de modulation

La modulation d'un signal utilise un signal sinusoïdal V_p de fréquence f_p, appelé onde porteuse, :

$$V_p = A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) \quad \text{avec } f_p = \Omega/2\pi$$

Ce signal ou onde porteuse V_p est utilisé pour transmettre le signal « informatif » en modifiant l'une de ses caractéristiques, c'est-à-dire que un des paramètres de l'onde porteuse va varier au « rythme » du signal à transmettre. Les trois possibilités de modification ou modulation sont donc :

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

– amplitude A du signal porteur : **modulation d'amplitude (MA)** ;

– fréquence f_p du signal porteur : **modulation de fréquence (MF)** ;

– phase φ du signal porteur : **modulation de phase**.

Il est à remarquer que la fréquence porteuse f_p est en général très supérieure à la plus haute fréquence f_M du signal à transmettre.

Ces trois types de modulations sont appelés « modulation finale » permettant de créer le signal directement émis par l'émetteur. De plus il est possible dans certains cas d'associer deux types de modulation (par exemple la modulation d'amplitude et de phase).

La comparaison de ces différents modes de modulation et le choix de l'une de ces méthodes se font sur la base de nombreux critères (immunité aux bruits ou qualité de la transmission, facilité de réalisation, coût, etc.).

4.2 Modulation d'amplitude

4.2.1 Principe de la modulation d'amplitude

L'onde porteuse étant définie par $s_p(t) = A \cdot \cos(\Omega t + \varphi)$ et le signal modulant $s(t)$ à transmettre vérifiant la propriété $|s(t)|_{\max} \leq 1$, l'expression du signal modulé en amplitude $s_{OMA}(t)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$s_{OMA}(t) = A \cdot [1 + m \cdot s(t)] \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi)$$

où m est le taux de modulation (exprimé en pour-cent de la profondeur de modulation), nombre compris entre 0 et 1 tel que l'expression entre crochets soit toujours positive.

Si on observe le signal modulé pendant une durée de plusieurs périodes de l'onde porteuse, on voit varier l'amplitude instantanée de cette onde en fonction du signal $s(t)$ (*cf.* figure 4.1). Dans le cas où l'amplitude maximale du signal $s(t)$ est égale à 1, l'amplitude positive de l'onde porteuse varie de $A(1 + m)$ à $A(1 - m)$ et l'amplitude négative entre $-A(1 + m)$ et $-A(1 - m)$. On parlera d'enveloppe du signal modulé.

Copyright © 2017 Dunod.

4.2.2 Étude spectrale d'un signal modulé en amplitude

a) Cas particulier : $s(t) = \cos(\omega t)$

Dans ce cas particulier, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$s_{OMA}(t) = A \cdot [1 + m \cdot \cos(\omega \cdot t)] \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi)$$

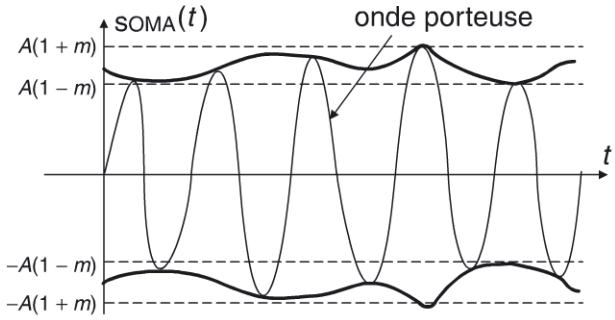

Figure 4.1 – Représentation de l'onde modulée en amplitude.

Soit :

$$s_{OMA}(t) = A\cos(\Omega \cdot t + \varphi) + \frac{mA}{2}[\cos((\Omega - \omega)t + \varphi) + \cos((\Omega + \omega)t + \varphi)]$$

Le spectre se compose donc de trois raies : Ω onde porteuse, $\Omega - \omega$ raie latérale inférieure et $\Omega + \omega$ raie latérale supérieure (*cf.* figure 4.2). La largeur spectrale occupée par le spectre est de 2ω.

b) Cas général : $s(t)$ quelconque

Dans ce cas général, le signal $s(t)$ peut s'exprimer suivant sa décomposition en série de Fourier, c'est-à-dire :

$$s(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \cos(\omega_i \cdot t)$$

Cette décomposition est supposée limitée aux $n + 1$ premiers termes, soit pour $i > n$, $a_i = 0$. Donc nous avons un spectre borné qui peut être

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

représenté de façon continue en supposant les raies très proches, c'est-à-dire la différence entre les ω_i très petite (*cf.* figure 4.3). En posant $m_i = ma_i$, l'expression du signal modulé est donnée par :

$$s_{OMA}(t) = A \cdot \left[1 + \sum_{i=0}^{n} m_i \cdot \cos(\omega_i \cdot t)\right] \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi)$$

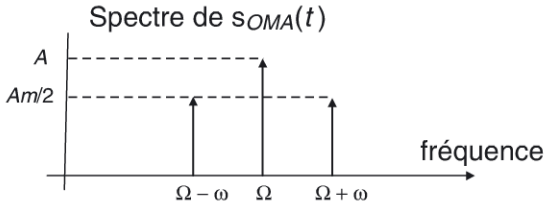

Figure 4.2 – Représentation unilatérale du spectre de l'onde modulée en amplitude par un signal sinusoïdal.

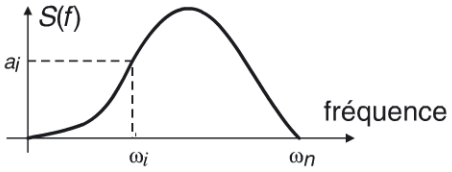

Figure 4.3 – Représentation du spectre borné d'un signal modulant quelconque.

Soit :

$$s_{OMA}(t) = A\cos(\Omega \cdot t + \varphi) + \sum_{i=0}^{n} \frac{Am_i}{2} \cdot [\cos((\Omega - \omega_i)t + \varphi) + \cos((\Omega + \omega_i)t + \varphi)]$$

Cette représentation conduit à une représentation spectrale unilatérale $S_{OMA}(f)$ se présentant sous la forme d'une raie centrale de fréquence Ω identique au cas précédent et de deux bandes latérales s'étendant de Ω à $\Omega + \omega_n$ (bande latérale supérieure) et de $\Omega - \omega_n$ à Ω (bande latérale inférieure) (*cf.* figure 4.4). La largeur spectrale est donc de $2\omega_n$.

Copyright © 2017 Dunod.

Ainsi si l'on désire transporter par un même canal plusieurs informations de type basse fréquence (BF), l'écart minimal entre les porteuses doit être de $2\omega_n$.

Remarque

En radiodiffusion où le spectre des signaux BF a été volontairement tronqué à 4,5 kHz, chaque émetteur occupe autour de sa fréquence porteuse une largeur spectrale de 9 kHz. Ainsi pour la gamme « Grandes Ondes » (GO), située entre 150 et 450 kHz, il peut théoriquement être placé environ 30 émetteurs. En réalité, afin d'éviter toutes les interférences une zone non utilisée, dite de silence, a été placée entre les émissions et seule une quinzaine d'émetteurs peuvent coexister.

4.2.3 Puissance en modulation d'amplitude

a) Puissance moyenne de l'onde porteuse

Par définition, pour un signal de l'onde porteuse $s_p(t)$, nous avons :

$$P_{OP} = \frac{1}{T_p} \cdot \int_0^{T_p} [s_p(t)]^2 \cdot \mathrm{d}t \propto \frac{A^2}{2} \quad \text{avec } T_p = \frac{2\pi}{\Omega}$$

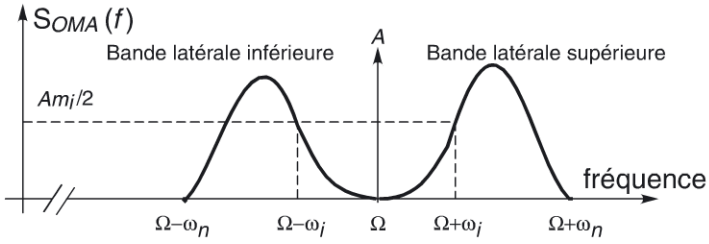

Figure 4.4 – Représentation spectrale unilatérale d'un signal modulé en amplitude par un signal quelconque à spectre borné.

b) Puissance crête de l'onde modulée en amplitude

Pour un signal modulé en amplitude, la puissance crête est la puissance moyenne obtenue lorsque le signal modulant est maximum :

$$P_c = P_{OP} \cdot [1 + m]^2 \quad \text{pour } |s(t)|_{\max} \leq 1$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

c) Puissance moyenne de l'onde modulée en amplitude

Étant donné que nous avons $T_0 \gg T_p$ (T_0 la période du signal modulant $s(t)$), le signal $s(t)$ peut être considéré comme constant sur cette période. Ainsi le calcul de la puissance de l'OMA sur la période de la porteuse T_p donne :

$$P_{OMA} = \frac{A^2}{2} \cdot [1 + m \cdot s(t)]^2$$

Le calcul de la puissance de l'OMA sur la période du signal modulant est :

$$P_{OMA} = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} A^2 \cdot [1 + m \cdot s(t)]^2 \cdot \cos^2(\Omega \cdot t) \cdot \mathrm{d}t$$

soit :

$$P_{OMA} = \frac{A^2}{2T_0} \left[\int_0^{T_0} [1 + m \cdot s(t)]^2 \, \mathrm{d}t + \int_0^{T_0} [1 + m \cdot s(t)]^2 \cos(2\Omega t) \, \mathrm{d}t \right]$$

Or, comme le signal $s(t)$ peut être considéré comme constant sur la période de l'onde porteuse T_p, il vient :

$$P_{OMA} = \frac{A^2}{2 \cdot T_0} \cdot \int_0^{T_0} \left[1 + 2 \cdot m \cdot s(t) + m^2 \cdot s^2(t) \right] \mathrm{d}t$$

En posant $\overline{s(t)}$ la valeur moyenne du signal et $\overline{s^2(t)}$ la valeur quadratique moyenne, nous avons :

$$P_{OMA} = P_{OP} \cdot [1 + 2 \cdot m \cdot \overline{s(t)} + m^2 \cdot \overline{s^2(t)}]$$

Pour un signal sinusoïdal modulant, on obtient :

$$P_{OMA} = P_{OP} \cdot \left[1 + \frac{m^2}{2} \right]$$

Copyright © 2017 Dunod.

d) Conclusion

Dans le cas le plus favorable sur le plan énergétique, c'est-à-dire pour un taux de modulation $m = 1$ et un signal sinusoïdal modulant, nous avons :

$$P_c = 4 \cdot P_{OP} \quad \text{et} \quad P_{OMA} = \frac{3}{2} \cdot P_{OP}$$

Il est important de remarquer que la puissance crête ne dépend que du taux de modulation m, alors que la puissance moyenne de l'onde modulée en amplitude dépend de m et aussi de la forme du signal modulant.

4.2.4 Systèmes dérivés de la modulation d'amplitude

L'étude de systèmes dérivés de la modulation d'amplitude provient de deux constatations :

– d'une part, une proportion très importante de la puissance transmise par le canal est affectée à la porteuse : 2/3 dans le cas d'un taux de modulation de 1 et d'un signal sinusoïdal modulant ;
– d'autre part, on peut remarquer que les deux bandes latérales correspondant au signal modulant transportent la même information.

a) Modulation à porteuse supprimée

La modulation d'amplitude à porteuse supprimée consiste à éliminer la porteuse dans la transmission. Le signal modulé théorique s'exprime de la façon suivante :

$$s_{OMA}(t) = A \cdot s(t) \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi)$$

En réalité, cette transmission d'information, plus économique du point de vue énergétique, présente un inconvénient majeur au niveau de la détection puisque le récepteur ne disposant plus de la référence de la fréquence porteuse Ω, devient très complexe à réaliser. Ce problème est éliminé en transmettant un embryon d'onde porteuse, suffisant pour la détection.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

b) Modulation à bande latérale unique

Afin de supprimer la redondance des signaux transmis au niveau des deux bandes latérales, on réduit de moitié la largeur du canal pour ne transmettre qu'une bande latérale : modulation à bande latérale unique (**BLU**). En considérant le signal modulant sous la forme d'une décomposition en série de Fourier limitée aux n premiers termes, pour la bande latérale supérieure (**BLS**), le signal modulé s'exprime par :

$$s_{OMA-BLS}(t) = \frac{A}{2}\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \cos((\Omega + \omega_i)t + \varphi)$$

et pour la bande latérale inférieure (**BLI**) par :

$$s_{OMA-BLI}(t) = \frac{A}{2}\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \cos((\Omega - \omega_i)t + \varphi)$$

Ce système de modulation peut être réalisé à partir des signaux obtenus lors de la modulation d'amplitude classique en filtrant la bande latérale non utilisée (*cf.* figure 4.5). Ce type de modulation conduit à un spectre utile de largeur de bande égale ou légèrement supérieure à ω_n. En effet, dans ce cas, une partie faible de l'onde porteuse peut être aussi transmise pour permettre une détection plus facile, rejoignant ainsi le cas suivant.

c) Modulation à bande latérale résiduelle

Ce type de modulation réalise un compromis entre la modulation d'amplitude complète avec son occupation spectrale large et la modulation à bande latérale unique avec les difficultés de synchronisation à la réception. La modulation d'amplitude à bande latérale résiduelle est obtenue à partir d'un signal de modulation complète filtré afin d'éliminer partiellement l'une des bandes latérales et de diminuer l'amplitude de l'onde porteuse.

Copyright © 2017 Dunod.

Remarque

Ce procédé de modulation est utilisé en télévision. En effet le signal vidéo à transmettre a une largeur de bande importante (5 MHz) excluant ainsi une modulation d'amplitude complète en raison de l'occupation spectrale.

d) Modulation à deux porteuses en quadrature

Cette modulation permet de diminuer la largeur spectrale du signal modulé en utilisant deux ondes porteuses. Cette technique consiste à diviser le signal informatif $s(t)$ en deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ modulant deux porteuses $s_{p1}(t)$ et $s_{p2}(t)$ de même fréquence et en quadrature de phase :

$$s_{p1}(t) = A \cdot \cos(\Omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad s_{p2}(t) = A \cdot \sin(\Omega t + \varphi)$$

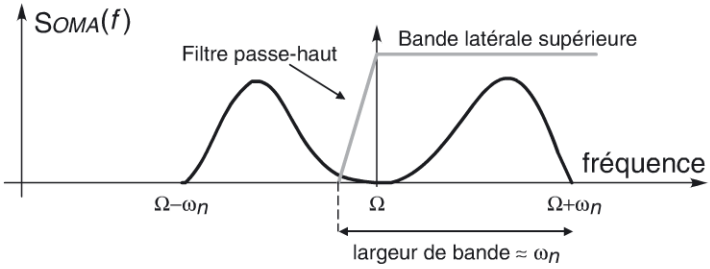

Figure 4.5 – Représentation spectrale unilatérale d'un signal modulé en amplitude à bande latérale supérieure unique (BLS).

Les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ peuvent être constitués en prenant deux composantes de $s(t)$: données paires et impaires, la composante de droite et la composante de gauche d'un signal stéréophonique. Le dédoublement du signal à la sortie du codeur permet de diviser par deux la rapidité de modulation et donc de diminuer la largeur spectrale par le même facteur. Par conséquent, on retrouve une occupation spectrale du signal modulé identique à une modulation BLU du signal initial $s(t)$. Ce type de modulation est très utilisé dans le domaine de la modulation des signaux numériques.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

4.2.5 Procédés de la modulation d'amplitude

a) L'émetteur

La modulation est une opération essentiellement non linéaire ; un circuit ou un composant non linéaire du deuxième ordre (diode, transistor) est donc nécessaire pour obtenir la porteuse modulée à partir du signal de porteuse pure et signal modulant BF. Dans le cas de circuit non linéaire, le signal de sortie $s(t)$ est une fonction du signal d'entrée $e(t)$ de la forme :

$$s(t) = a + b \cdot e(t) + c \cdot e^2(t)$$

Si le signal d'entrée $e(t)$ est directement lié au signal de l'onde porteuse et au signal modulant (par exemple la somme des deux signaux), nous obtenons en sortie un signal comportant de nombreuses composantes fréquentielles. Seules les composantes correspondant à l'onde modulée en amplitude (OMA), obtenues après filtrage, seront utilisées pour la transmission.

Les deux structures principales de circuit utilisées sont les systèmes suivants :

– Modulation à addition et amplification non linéaire : l'utilisation d'un élément non linéaire (diode) comme amplificateur de la somme des deux signaux « porteuse et modulant » conduit à produire les composantes fréquentielles nécessaire à l'OMA.

– Modulation à multiplication de signaux : la méthode idéale consiste à utiliser un multiplieur analogique, qui effectue directement le produit du signal porteur par $[1 + m \cdot s(t)]$. Ce multiplieur peut être représenté par un amplificateur linéaire dont le gain est le signal modulant.

Une troisième méthode, appelée modulation en anneau, est utilisée pour les modulations sans porteuse. Le circuit comporte un anneau de diodes. La conduction ou le blocage des diodes deux à deux sont pilotés par l'onde porteuse. La sortie peut être modélisée par le produit du signal modulant et d'un signal carré d'amplitude +1, −1 et de fréquence identique à celle de l'onde porteuse. Il est à remarquer que ce

Copyright © 2017 Dunod.

système de modulation, qui théoriquement ne donne pas un signal à la fréquence porteuse, fait apparaître un embryon de porteuse du fait de la dissymétrie pratique de certains composants électroniques.

b) Le récepteur

La démodulation ou détection est l'opération inverse de la modulation, il s'agit à partir de la porteuse HF modulée de reconstituer le signal BF modulant. Deux techniques permettent de réaliser cette détection :

– La démodulation synchrone : le principe de cette méthode consiste à réaliser le produit du signal modulé et d'un signal de fréquence Ω_0 proche de la fréquence de l'onde porteuse Ω. Si on réalise un calage de l'oscillateur local, c'est-à-dire que $\Omega_0 = \Omega$, le signal de sortie, filtré par un filtre passe-bande, est directement proportionnel au signal BF modulant initial. Cette détection synchrone s'applique à toutes les formes de signaux modulés en amplitude à condition qu'un signal de porteuse soit émis (signal faible) pour synchroniser ou « caler » l'oscillateur local.

– La démodulation d'enveloppe : la détection d'enveloppe, aussi appelée détection linéaire, utilise contrairement à sa deuxième appellation un composant non linéaire : une diode montée pour un redressement mono-alternance suivie d'un filtre passe-bas. En choisissant la constante de temps du filtre très supérieure à la période du signal modulant et très inférieure à la période de l'onde porteuse, le signal BF de sortie sera constitué de l'enveloppe du signal. La diode étant un composant non linéaire, le signal obtenu en sortie devra être filtré afin d'isoler la composante basse fréquence utile.

4.3 Modulation exponentielle

4.3.1 Principe

Le signal de l'onde porteuse de fréquence f_p peut s'écrire sous la forme déjà vue :

$$s_p(t) = A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) \quad \text{avec } f_p = \Omega/2\pi$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

ou encore sous une forme faisant intervenir la **phase instantanée** $\varphi_i(t)$ et avec la notation complexe :

$$s_p(t) = A \cdot \cos(\varphi_i(t)) \quad \text{ou} \quad s_p(t) = A \cdot e^{j\varphi_i(t)}$$

Cette dernière représentation explique le nom donné à ce type de modulation : la modulation exponentielle consistant à faire varier au rythme du signal modulant la grandeur de la fonction exponentielle, par opposition à la modulation d'amplitude. Cette modulation est aussi appelée **modulation angulaire ou d'angle** puisqu'elle concerne une variation de la phase instantanée.

Nous pouvons aussi définir la pulsation instantanée $\Omega_i(t)$:

$$\Omega_i(t) = \frac{d\varphi_i(t)}{dt}$$

Ce sont ces grandeurs $\varphi_i(t)$ et $\Omega_i(t)$ qui vont être modifiées en fonction d'un signal BF à transmettre. Suivant les caractéristiques de cette modification, nous aurons une modulation de fréquence (MF) qui est une action linéaire sur la pulsation instantanée $\Omega_i(t)$ ou une modulation de phase (MP) qui agit de façon linéaire sur la phase instantanée $\varphi_i(t)$. Ainsi, le tableau 4.1 montre une présentation parallèle de ces deux types de modulation dans le cas d'un signal modulant quelconque s(t). Nous pouvons remarquer que, d'un point de vue de la formulation mathématique, la seule différence entre les expressions de l'onde modulée en fréquence et en phase est la dérivation du signal modulant.

Pour un signal modulant cosinusoïdal $s(t) = \cos(t)$, nous obtenons aisément le résultat des relations précédentes et définissons les grandeurs caractérisant les excursions de fréquence et de phase indiquant les domaines de variation de la fréquence et de la phase respectivement autour de la valeur centrale Ω_0 ou $\varphi_0 = \Omega_0 t$ (*cf.* tableau 4.2). De plus, dans ce cas simple d'un signal modulant à deux niveaux, nous pouvons faire une comparaison graphique des deux modulations de type exponentiel avec la modulation d'amplitude (*cf.* figure 4.6).

Copyright © 2017 Dunod.

Tableau 4.1 – Définitions des modulations de fréquence et de phase.

Modulation de fréquence	Modulation de phase
$\Omega_i(t) = \Omega_0 + \Delta\Omega.s(t)$ avec $\Delta\Omega$: excursion de fréquence – phase instantanée : $\varphi_i(t) = \int_0^t \Omega_i(t)\,\mathrm{d}t$ $= \Omega_0 t + \Delta\Omega \int_0^t s(t)\,\mathrm{d}t$ – expression de l'onde modulée : $s_{OMF}(t) = A\cos\left[\Omega_0 t + \Delta\Omega \int_0^t s(t)\,\mathrm{d}t\right]$	$\varphi_i(t) = \Omega_0 \cdot t + \Delta\varphi \cdot s(t)$ avec $\Delta\varphi$: excursion de phase – pulsation instantanée : $\Omega_i(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi_i(t)}{\mathrm{d}t} = \Omega_0 + \Delta\varphi \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$ – expression de l'onde modulée : $s_{OMP}(t) = A\cos[\Omega_0 \cdot t + \Delta\varphi \cdot s(t)]$

Tableau 4.2 – Modulations de fréquence et de phase (cas d'un signal cosinusoïdal).

Modulation de fréquence	Modulation de phase
$\Omega_i(t) = \Omega_0 + \Delta\Omega \cdot \cos(\omega t)$ avec $\Delta\Omega$: excursion de fréquence – phase instantanée : $\varphi_i(t) = \Omega_0 t + \frac{\Delta\Omega}{\omega}\sin(\omega t)$ – indice de modulation : $m = \Delta\Omega/\omega$ – excursion de phase : $\pm\Delta\Omega/\omega = \pm m$ – expression de l'onde modulée : $s_{OMF}(t)$ $= A\cos[\Omega_0 t + \Delta\Omega/\omega \cdot \sin(\omega t)]$	$\varphi_i(t) = \Omega_0 t + \Delta\varphi \cdot \cos(\omega t)$ avec $\Delta\varphi$: excursion de phase – pulsation instantanée : $\Omega_i(t) = \Omega_0 - \Delta\varphi \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$ – excursion de fréquence : $\pm\Delta\varphi \cdot \omega$ – expression de l'onde modulée : $s_{OMP}(t) = A\cos[\Omega_0 \cdot t + \Delta\varphi \cdot \cos(\omega t)]$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

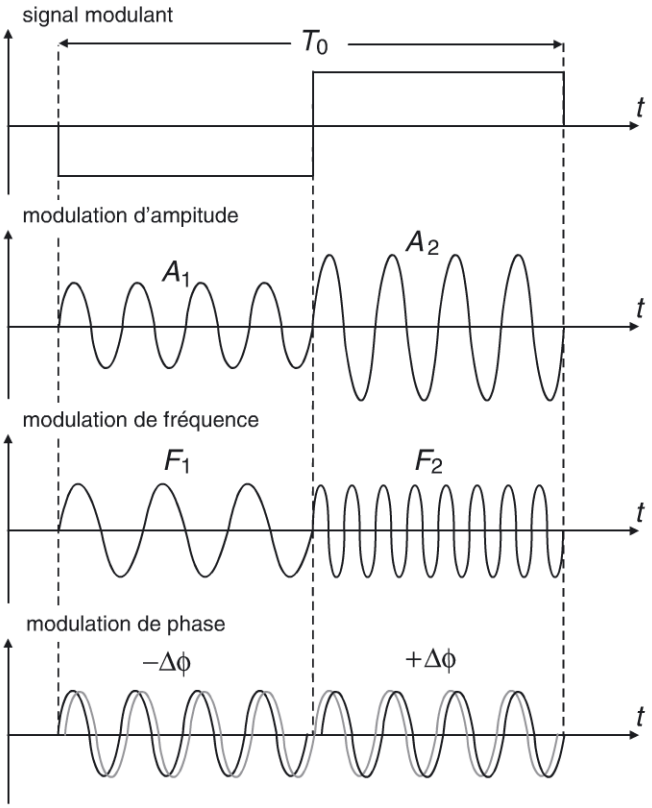

Figure 4.6 – Comparaison des modulations d'amplitude, de fréquence et de phase pour un signal modulant de type carré.

Copyright © 2017 Dunod.

4.3.2 Modulation de fréquence

a) Expression de l'onde modulée en fréquence : cas d'un signal cosinusoïdal

Dans le cas d'un signal modulant cosinusoïdal (fréquence f ou pulsation ω), nous venons de voir l'expression de l'onde modulée :

$$s_{OMF}(t) = A\cos\left[\Omega_0 t + \frac{\Delta\Omega}{\omega}\cdot\sin(\omega t)\right] \qquad \text{avec } m = \frac{\Delta\Omega}{\omega} = \frac{\Delta F}{f}$$

Afin d'obtenir le spectre de ce signal modulé, nous allons développer cette expression. Soit :

$$s_{OMF}(t) = A[\cos(\Omega_0 t) \cdot \cos(m \cdot \sin(\omega t)) - \sin(\Omega_0 t) \cdot \sin(m \cdot \sin(\omega t))]$$

Pour pouvoir obtenir une relation sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions sin et cos, nous devons expliciter les deux termes $\cos[m \cdot \sin\alpha]$ et $\sin[m \cdot \sin\alpha]$. En utilisant les fonctions de Bessel de première espèce $J_n(m)$ (*cf.* annexes), on obtient en développant l'expression précédente de s_{OMF} la forme suivante :

$$s_{OMF}(t) = A \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(m) \cdot \cos((\Omega_0 + n\omega)t)$$

Le spectre contient donc une infinité de raies latérales de part et d'autre de la fréquence de l'onde porteuse F_0. Pour un indice de modulation donné m, la fonction de Bessel $J_n(m)$ représente donc l'amplitude de la raie de fréquence $F_0 + n\,f$ (ou pulsation : $\Omega_0 + n\omega$). L'évolution des fonctions de Bessel $J_n(m)$ et leurs propriétés vont permettre de donner les principales caractéristiques du spectre de l'onde modulée en fréquence (OMF).

Étant donné la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées des fonctions de Bessel, les deux raies latérales du spectre de fréquence $F_0 \pm nf$ ont des amplitudes de même module, le spectre est symétrique par rapport à la fréquence F_0.

Bien que le nombre de raies et, par conséquent, la largeur de bande du signal secondaire soient théoriquement infinis, l'amplitude des raies latérales éloignées de F_0 finit par décroître. En effet les fonctions de Bessel $J_n(m)$ ont une amplitude décroissante lorsque n augmente à m constant. Cette décroissance est d'autant plus tardive que m est plus élevé (*cf.* tableau 4.3).

Ce résultat est très important car il permet de déterminer ce que l'on appelle la **largeur utile du spectre** $L_{u,OMF}$, c'est-à-dire la bande de fréquence utilisée réellement par l'OMF. Pour déterminer cette largeur de spectre, il faut se donner une valeur limite pour laquelle la composante

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

de fréquence nf ne sera plus prise en compte. Cette limite, créée par un filtrage du signal, dépend de la qualité recherchée pour la transmission.

Tableau 4.3 – Amplitude de la composante $F_0 + nf$ du spectre pour différentes valeurs de m avec l'indication de la limitation du spectre à $m + 1$.

n	m=1	m=2	m=5	m=10
0	0,77	0,22	0,18	0,25
1	0,44	0,58	0,32	0,04
2	0,11	0,35	0,046	0,25
3	0,02	0,129	0,36	0,06
4	0,0025	0,034	0,39	0,22
5		0,007	0,26	0,23
6		0,001	0,13	0,014
7			0,05	0,22
8			0,02	0,32
9			0,005	0,29
10			0,002	0,21
11				0,123
12				0,063
13				0,029
14				0,012
15				0,005

Si l'on considère que seules les raies d'amplitude dépassant 10 % de l'amplitude de la porteuse non modulée sont conservées, la largeur utile du spectre peut s'exprimer en se limitant à la valeur $n = m + 1$ (règle de Carson), soit :

$$L_{u,OMF} = 2(1 + m + \sqrt{m})\, f$$

$$L_{u,OMF} \approx 2(1 + m)\, f = 2(f + \Delta F)$$

Il est important de noter que, par rapport à la modulation d'amplitude, nous avons dans ce cas une largeur de spectre $(1 + m)$ fois plus grande. De plus si la fréquence du signal modulant est petite devant l'excursion de fréquence ($m \gg 1$), on a :

$$L_{u,OMF} \approx 2mf = 2\Delta F$$

Copyright © 2017 Dunod.

D'autre part, il est intéressant de connaître la position de la raie d'amplitude maximale dans le spectre pour un indice de modulation m donné. Nous pouvons ainsi remarquer que la position de la composante d'amplitude maximale s'éloigne de F_0 au fur et à mesure que m croît. La figure 4.7 met en évidence pour trois indices de modulations cette répartition d'énergie du spectre de l'OMF qui s'éloigne de la fréquence centrale F_0. Et ainsi nous pouvons noter que les composantes d'amplitude élevée ont tendance à se placer de plus en plus près de $F_0 \pm \Delta F$.

Si l'on fait l'hypothèse d'un indice de modulation faible $m \ll 1$, les seules composantes spectrales significatives sont celles correspondant aux fréquences F_0 et à $F_0 \pm f$. Le spectre de l'OMF est alors identique à celui obtenu dans le cas de la modulation d'amplitude à la phase près.

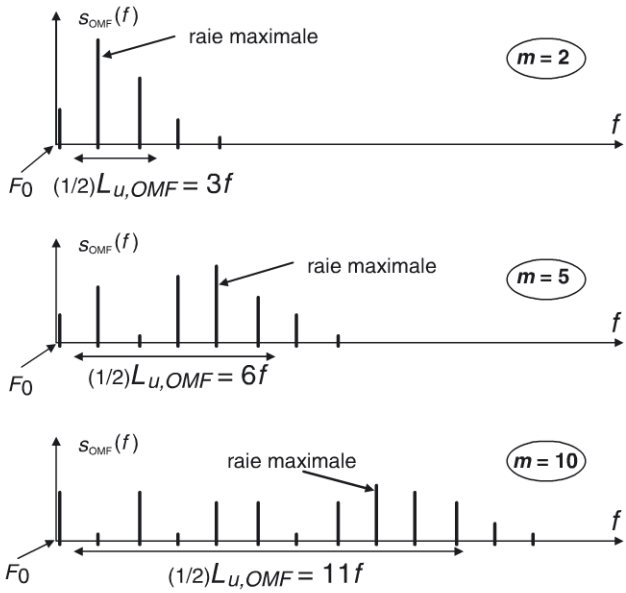

Figure 4.7 – Variation du spectre d'une onde modulée en fréquence par un signal sinusoïdal en fonction de l'indice de modulation *m*.

Remarque

Les émissions radiophoniques en modulation de fréquence sont effectuées avec une fréquence de l'onde porteuse de l'ordre de 100 MHz (88 à 108 MHz) et un indice de modulation de 5.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Ainsi pour des signaux modulants de largeur spectrale d'environ 15 kHz, le domaine fréquentiel occupé par une émission est de $2 \times (6 \times 15) = 2 \times 90$ kHz = 180 kHz autour de la fréquence centrale. Donc deux émetteurs peuvent être séparés théoriquement par seulement 0,18 MHz, en réalité au moins 0,2 MHz. Il peut donc être placé théoriquement 100 émetteurs. En réalité, afin d'éviter toutes les interférences une zone de silence a été placée entre les émissions et d'autre part les émissions étant pour la plupart stéréophoniques, elles ont une largeur spectrale plus importante. Pour ces mêmes émissions en modulation d'amplitude, la largeur de spectre aurait été de seulement 30 kHz au lieu de 180 kHz.

b) Puissance en modulation en fréquence

La puissance de l'onde porteuse s'exprime de la même façon que pour la modulation d'amplitude, soit : $P_{OP} \propto A^2/2$

La puissance moyenne de l'onde modulée en fréquence s'obtient à partir de l'expression de s_{OMF} mise sous sa forme complexe :

$$s_{OMF}(t) = A \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(m) \cdot \mathrm{e}^{j(\Omega_0 + n\omega)t}$$

ou

$$s_{OMF}(t) = A \cdot \mathrm{e}^{j\Omega_0 t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(m) \cdot \mathrm{e}^{jn\omega t}$$

Les fonctions de Bessel étant de puissance bornée (*cf.* annexes), il vient :

$$P_{OMF} = P_{OP} \propto \frac{A^2}{2}$$

Contrairement à ce que nous avons obtenu pour la modulation d'amplitude, cette puissance est indépendante du signal modulant. Il est donc possible d'augmenter le signal informatif, c'est-à-dire l'indice de modulation sans augmenter la puissance transmise. Or l'augmentation de l'indice de modulation améliore de façon importante le rapport signal sur bruit, bien que l'on augmente aussi le bruit capté en élargissant le spectre à transmettre.

Copyright © 2017 Dunod.

Ainsi l'amélioration de la modulation de fréquence par rapport à la modulation d'amplitude, exprimée en db, est directement fonction de l'indice de modulation m selon l'expression suivante :

$$5 + 20 \log_{10} m$$

c) Traitement spécifique des signaux de la parole en MF

Le spectre de fréquence des signaux de parole et musique n'a pas une répartition constante des différentes composantes. Si la fréquence de 400 Hz est la référence, le niveau baisse et atteint −14 db à 10 KHz (*cf.* figure 4.8).

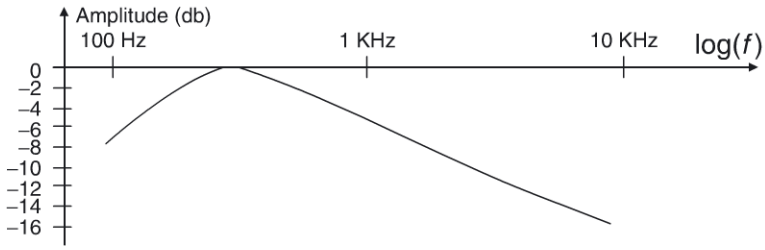

Figure 4.8 – Répartition spectrale d'un signal audiofréquence (parole ou musique).

Il s'ensuit que le rapport signal/bruit diminue en hautes fréquences avec un niveau de bruit identique sur tout le spectre. Cette dégradation est encore plus importante en modulation de fréquence puisque la bande spectrale transmise est plus large.

Pour palier à ce problème, on réalise au niveau de l'émetteur une pré-accentuation permettant d'augmenter les amplitudes des hautes fréquences du spectre. À la réception, on effectue bien évidemment l'opération inverse : la désaccentuation (*cf.* figure 4.9).

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

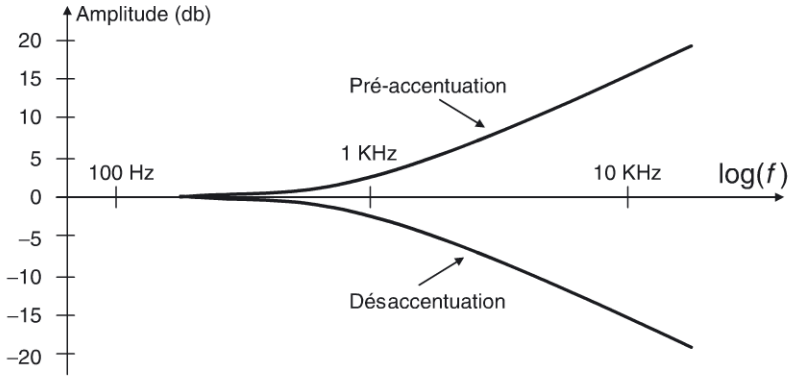

Figure 4.9 – Courbes de pré-accentuation et de désaccentuation utilisées pour éviter un rapport signal/bruit faible en hautes fréquences (pour t = 50 μs).

d) Spectre de l'onde modulée en fréquence : cas général

Le signal $s(t)$ informatif peut se décomposer suivant la série de Fourier limitée au terme n (signal physique) :

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \cos(\omega_i \cdot t)$$

L'expression de l'OMF sous sa forme complexe est donc :

$$s_{OMF}(t) = A \cdot \mathrm{e}^{j[\Omega_0 t + \sum_{i=1}^{n} m_i a_i \cdot \sin(\omega_i t)]} \qquad \text{avec } m_i = \frac{\Delta\Omega}{\omega_i} = \frac{\Delta F}{f_i}$$

D'où, en utilisant les fonctions de Bessel, l'expression générale est :

$$s_{OMF}(t) = A \cdot \mathrm{e}^{j[\Omega_0 t]} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} [J_k(m_i) \cdot a_i \cdot \mathrm{e}^{jk\omega_i t}] \right]$$

Prenons l'exemple d'un signal avec uniquement deux composantes fréquentielles de pulsation ω_1 et ω_2, nous avons l'expression du signal $s(t)$:

$$s(t) = a_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + a_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t)$$

Copyright © 2017 Dunod.

D'où l'expression de l'OMF dans ce cas particulier :

$$s_{OMF}(t) = A \cdot e^{j[\Omega_0 t]} \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} [J_k(m_1) \cdot a_1 \cdot e^{jk\omega_1 t} \right] \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} [J_k(m_2) \cdot a_2 \cdot e^{jk\omega_2 t} \right]$$

Il est important de remarquer que cette fonction n'est pas linéaire et donc que le principe de superposition n'est pas applicable. Le signal modulé en fréquence par la somme de deux signaux sinusoïdaux n'est pas la somme des deux signaux modulés en fréquence par chacun de ces signaux. Le spectre va se composer de nombreuses raies dont les premières auront les amplitudes suivantes :

Pulsation	Amplitude
Ω_0	$A \cdot J_0(m_1) \cdot J_0(m_2)$
$\Omega_0 + \omega_1$	$A \cdot J_1(m_1) \cdot J_0(m_2)$
$\Omega_0 - \omega_1$	$-A \cdot J_1(m_1) \cdot J_0(m_2)$
$\Omega_0 + \omega_2$	$A \cdot J_0(m_1) \cdot J_1(m_2)$
$\Omega_0 - \omega_2$	$-A \cdot J_0(m_1) \cdot J_1(m_2)$

On peut remarquer que toutes les amplitudes des raies vont dépendre des indices de modulation m_1 et m_2. Le spectre sera borné lorsque les deux quantités $J_k(m_1)$ et $J_p(m_2)$ ou leur produit deviendront négligeables. Si l'on cherche la largeur spectrale maximale, on peut faire le raisonnement suivant : si $\omega_1 < \omega_2$, alors $m_1 > m_2$. Donc la fonction $J_k(m_1)$ sera petite pour $n = 1 + m_1$. Cette condition implique que la fonction $J_p(m_2)$ soit aussi de faible valeur puisque si $n = 1 + m_1$ et $m_1 > m_2$, alors $n = 1 + m_1$. Ainsi la valeur n est définie par l'indice de modulation de la fréquence la plus petite, mais la largeur spectrale sera obtenue pour la fréquence la plus grande :

$$L_{u,OMF} \approx 2(1 + m_1)\omega_2 \qquad \text{avec } m_1 = \frac{\Delta\Omega}{\omega_1}$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

e) Spectre de l'onde modulée en fréquence : cas d'un signal à deux niveaux

Lorsque le signal $s(t)$ est un signal numérique, on associe une fréquence donnée à chacun de ses états. Dans le cas d'une transmission d'un signal binaire (transmission sur réseaux informatiques), deux fréquences sont utilisées (*cf.* figure 4.6). Cette modulation peut être effectuée par autant d'oscillateurs qu'il y a d'états numériques et alors le signal modulé a une phase discontinue ou par un oscillateur commandé par tension (VCO : *Voltage Controlled Oscillator*) et alors le signal modulé a une phase continue. Hors la discontinuité de phase a pour effet d'étaler le spectre du signal (introduction de transitions raides) ; on préfère donc en général la modulation de fréquence à continuité de phase du fait de la bande passante limitée des supports de transmission.

Dans ce cas, en considérant θ la durée de base d'un bit b_i du signal numérique, l'expression de l'onde modulée en fréquence est :

$$s_{OMF}(t) = A \cdot \cos\left[2\pi\left(F_0 + \Delta f \cdot b_i\right) \cdot t + \varphi_i\right] \quad \text{pour } t \in [i\theta, (i+1)\theta]$$

et la fréquence instantanée $f_i(t)$ et l'indice de modulation m s'expriment par :

$$f_i(t) = F_0 + \Delta f \cdot b_i(t) \quad \text{avec } f_1 = F_0 - \Delta f \leq f_i(t) \leq f_2 = F_0 + \Delta f$$

et

$$m = \frac{2\pi\Delta f}{2\pi\,(1/2\theta)} = 2 \cdot \Delta f \cdot \theta$$

Le spectre de ce signal modulé en fréquence à continuité de phase est donné par l'expression suivante (*cf.* figure 4.10) :

$$S_{OMF}(f) = \frac{2A^2\Delta f}{(\pi\theta)^2} \cdot \frac{\sin^2(\pi\theta(f - \Delta f)) \cdot \sin^2(\pi\theta(f + \Delta f))}{1 - \cos(2\pi\theta\Delta f) \cdot \cos(2\pi\theta f) + (f^2 - \Delta f^2)\cos^2(2\pi\theta\Delta f)}$$

Pour définir le meilleur indice de modulation, on peut chercher un compromis entre les deux caractéristiques suivantes :

– le coefficient de corrélation entre les deux états du signal permet de mesurer la probabilité d'erreur à la réception. Celle-ci est minimale pour $\boldsymbol{m = 0{,}715}$

Copyright © 2017 Dunod.

– la largeur spectrale est définie comme la bande de fréquence rassemblant 95 % de la puissance, alors le spectre le plus étroit est obtenu pour un indice de $\boldsymbol{m = 0{,}64}$.

Soit l'exemple des systèmes de transmissions numériques (modems conformes à l'avis V23 du CCITT), qui utilisent une modulation de fréquence à deux valeurs fréquences : 1 300 Hz et 2 100 Hz (d'où Δf = 400 Hz et F_0 = 1 700 Hz). La rapidité de modulation étant de 1 200 bit/s ($1/\theta$), l'indice de modulation est de (800(1/1 200)) = 0,66.

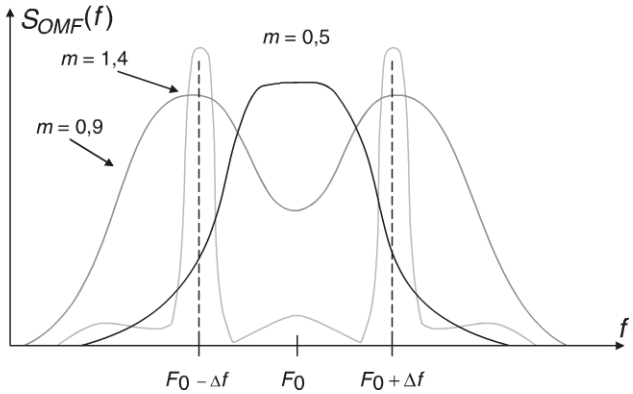

Figure 4.10 – Spectre d'un signal modulé en fréquence par un signal numérique.

f) Les méthodes de modulation de fréquence

Les principales méthodes de modulation de fréquence sont au nombre de deux : le modulateur indirect de Armstrong et le modulateur direct.

Le modulateur indirect de Armstrong est basé sur un circuit intégrateur dans lequel est injecté le signal modulant basse fréquence suivi d'un modulateur d'amplitude sans porteuse du type modulateur en anneau. Ce signal obtenu est additionné au signal de la porteuse déphasée de $\pi/2$, déjà utilisée pour la modulation d'amplitude, et enfin le signal résultant est écrêté pour obtenir un signal à amplitude constante. Il est intéressant de noter que le modulateur d'Armstrong sans le module d'intégration est un modulateur de phase.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Le modulateur direct consiste à modifier, au rythme du signal basse fréquence, la fréquence de fonctionnement d'un oscillateur. Cette dernière est en général définie par la valeur d'une capacité. La méthode de loin la plus répandue consiste à utiliser une **diode à capacité variable** ou varicap. En effet une jonction P-N polarisée en sens inverse se comporte comme une capacité dont la valeur est inversement proportionnelle à la racine carrée de la tension à ses bornes.

g) Les méthodes de démodulation de fréquence

Après un amplificateur haute fréquence (HF), un récepteur complet pour une onde modulée en fréquence se compose en premier lieu d'un système de changement de fréquence. Sur les entrées d'un circuit mélangeur ou d'un multiplieur sont envoyés le signal de l'onde modulée en fréquence $s_{OMF}(t)$ et le signal $s_{OL}(t)$ en provenance d'un oscillateur local, accordé par l'utilisateur du récepteur :

$$s_{OMF}(t) = A\cos(\Omega t + m\sin(\omega t))$$

$$s_{OL}(t) = A_L\cos(\Omega_L t)$$

Le signal de sortie $s_m(t)$ est donc constitué de deux signaux centrés sur $\Omega - \Omega_L$ et sur $\Omega + \Omega_L$ (respectivement bandes latérales inférieure et supérieure) :

$$s_m(t) = kAA_L\left[\cos((\Omega - \Omega_L)t + m\sin(\omega t)) + \cos((\Omega + \Omega_L)t + m\sin(\omega t))\right]$$

Un filtre de moyenne fréquence ou encore de fréquence intermédiaire $F_i = \Omega_i/2\pi$ (FI) permet de sélectionner la bande latérale inférieure uniquement. Le signal $s_{FI}(t)$, résultat de ce changement de fréquence, est donc :

$$s_{FI}(t) = kAA_L\left[\cos(\Omega_i t + m\sin(\omega t))\right] \quad \text{avec } \Omega_i = \Omega - \Omega_L$$

Le système d'accord est organisé de telle sorte que cette fréquence intermédiaire soit indépendante de la fréquence d'émission. Ceci permet d'ajuster définitivement tous les paramètres de l'amplificateur intermédiaire et du démodulateur de fréquence. Par exemple, dans le cas

Copyright © 2017 Dunod.

de la radiodiffusion en modulation de fréquence, cette fréquence intermédiaire a été fixée par convention à 10,7 MHz.

Cet amplificateur est en général suivi d'un limiteur d'amplitude. En effet, les variations d'amplitude, qui ne transportent aucune information, ne pourraient contribuer qu'à perturber la phase suivante : la démodulation de fréquence. Le circuit « démodulateur de fréquence » ou « discriminateur de fréquence » doit fournir un signal proportionnel à la déviation de fréquence du signal $s_{FI}(t)$ par rapport à la fréquence intermédiaire F_i.

Parmi les nombreux systèmes plus ou moins complexes et performants de démodulation de fréquence qui existent, nous n'étudierons les principes que de quelques uns :

– Transformation en modulation d'amplitude : ce système utilise un circuit résonnant du type RLC, accordé sur une fréquence f_0. Nous savons que si une tension d'amplitude constante et de fréquence f est appliquée à un tel circuit, la tension de sortie a une amplitude fonction de la position relative de f_0 et f. Selon le coefficient de surtension du circuit résonnant, une faible variation de f se traduit par une variation proportionnelle de l'amplitude. D'où le passage à une modulation de type amplitude qu'il faut ensuite démoduler par les méthodes vues au chapitre précédent.

– Discriminateurs à déphasage ou à variation de phase : le principe de ces circuits utilise le fait que si les enroulements primaire et secondaire d'un transformateur sont accordés et fortement couplés, les tensions sont en quadrature à la résonance et leur déphasage varie presque linéairement autour de cette fréquence de résonance.

– Démodulateur de fréquence par comptage : le principe de ce démodulateur consiste en un premier temps à réaliser une transformation du signal d'entrée en créneaux par écrêtage ou par comparateur. Le signal carré ainsi obtenu, de fréquence identique au signal initial, est différencié afin d'obtenir des impulsions qui sont mises en forme par un circuit monostable. Ainsi, le signal obtenu est une suite d'impulsions de largeur et d'amplitude fixe dont la périodicité est celle du

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

signal d'entrée. Sa valeur moyenne est donc rigoureusement proportionnelle à la fréquence de ce dernier. Un intégrateur permet directement d'obtenir le signal modulant recherché.

– Détection d'une onde modulée en fréquence par une boucle d'asservissement de phase : une boucle d'asservissement ou verrouillage de phase (PLL : *phase lock loop*) est un circuit composé d'un oscillateur à fréquence qui fournit un signal de fréquence proportionnelle à une tension d'entrée et d'un circuit comparateur de phase qui fournit un signal qui est fonction du déphasage entre les signaux, supposés sinusoïdaux et de même fréquence, appliqués à ses deux entrées. Dans notre cas le signal d'entrée du détecteur de phase est le signal modulé en fréquence (signal à F_i) et la sortie de ce circuit fournit un signal proportionnel à la variation de fréquence : résultat recherché. La boucle à asservissement de phase est donc un démodulateur de fréquence idéal, la seule condition à satisfaire est que la vitesse de variation de la fréquence soit inférieure à la fréquence de coupure de la boucle.

4.3.3 Modulation de phase

La modulation en phase d'une porteuse par un signal BF est équivalente à une modulation de fréquence par la dérivée du signal informatif. Par conséquent, tout ce qui a été développé pour la modulation de fréquence s'applique. Cette modulation est la plus employée pour la transmission des signaux numériques. En effet elle réalise un bon compromis puissance/efficacité spectrale, c'est dire le meilleur « nombre de bits par seconde et par hertz de bande passante ». Cette notion a déjà été évoquée dans la modulation d'amplitude à deux porteuses en quadrature (*cf.* chapitre 4.2).

a) Modulation de phase pour la transmission de signaux numériques

Pour minimiser la probabilité d'erreur, les différents états de la phase sont régulièrement répartis sur l'intervalle disponible $[0, 2\pi]$. Pour des

Copyright © 2017 Dunod.

raisons techniques de démodulation avec une probabilité d'erreur acceptable, on ne dépasse pas 8 valeurs de phase.

Dans la cas d'un signal codé binaire, la modulation à deux phases s'écrit :

$$s(t) = A \cdot \cos(2\pi F_0 t + \varphi_i) \quad \text{avec } \varphi_i = \pm\pi \text{ (selon la donnée 0 ou 1)}$$

La densité spectrale $S(f)$ du signal modulé en phase dépend de la durée d'un bit égale au temps θ, soit :
– modulation cohérente ($F_0 = k/\theta$) :

$$S_{OMF}(f) = \frac{A^2}{\theta^2} \cdot \frac{\sin^2(\pi\theta f)}{\pi^2 (f^2 - F_0)^2} \cdot f^2$$

– modulation non cohérente ($F_0 \neq k/\theta$) :

$$S_{OMF}(f) = \frac{A^2}{\theta^2} \cdot \left[\frac{\sin^2(\pi\theta(f - F_0))}{\pi^2 (f - F_0)^2} + \frac{\sin^2(\pi\theta(f + F_0))}{\pi^2 (f + F_0)^2} \right]$$

Si $F_0 \gg 1/\theta$ (k très grand), les deux expressions sont quasiment identiques et le spectre est centré autour de F_0. Pour augmenter le débit binaire en conservant la fréquence de modulation ($1/\theta$), il suffit d'augmenter le nombre d'états de phase (*cf.* figure 4.11).

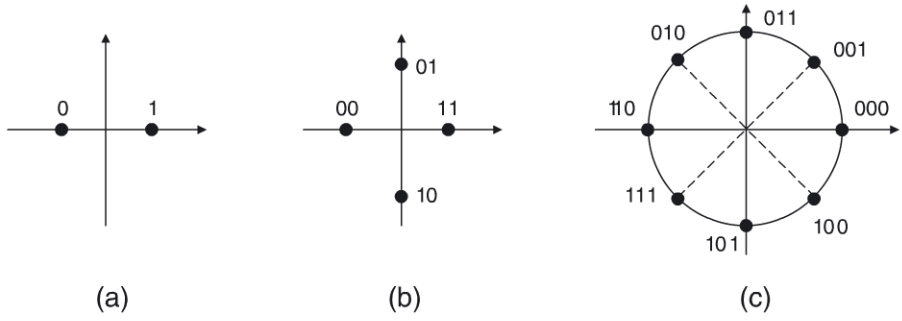

Figure 4.11 – Représentation vectorielle d'un signal modulé en phase à deux valeurs (*a*), à quatre valeurs (*b*) et à huit valeurs (*c*). Dans le cas (c), le code est tel qu'un seul bit change lorsque l'on passe d'un état de phase au plus proche voisin (code de Gray).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

b) Démodulation des signaux modulés en phase pour la transmission de signaux numériques

La réception et la démodulation des signaux modulés en phase peuvent se réaliser avec deux types de démodulateurs : démodulateur cohérent et démodulateur différentiel.

Le principe du démodulateur cohérent est l'utilisation d'un oscillateur local synchronisé sur la fréquence de la porteuse. Le signal reçu est multiplié par le signal de l'oscillateur local déphasé des mêmes états utilisés à la modulation ; la sortie de ces circuits multiplieurs est soumise à un filtrage passe-bas qui indique s'il y a identité entre le signal reçu et un des signaux du récepteur.

La démodulation différentielle consiste à multiplier le signal reçu par le signal reçu précédent (retard de θ). La phase du signal reçu étant φ_i et celle du signal retardé φ_{i-1}, un filtrage passe-bas de la sortie permet d'obtenir un signal proportionnel à $\cos(\varphi_i - \varphi_{i-1})$ et de déterminer le saut de phase 0 ou π.

c) Modulations combinées d'amplitude et de phase

Au lieu de faire correspondre les différents états du signal numérique à l'un des paramètres caractéristiques de l'onde porteuse (amplitude, fréquence ou phase), on peut utiliser à la fois deux paramètres. C'est l'association simultanée « amplitude A_i et phase φ_i » qui a été retenue. Le signal modulé est le suivant :

$$s_{OMF}(t) = A_i \cdot \cos\left[2\pi F_0 t + \varphi_i\right] \quad \text{pour } t \in [i\theta, (i+1)\theta]$$

Un cas particulier est la modulation d'amplitude à deux porteuses en quadrature (MAQ). Dans le diagramme spatial représentatif de la modulation, chaque état du signal numérique est représenté par un point $M(A_i, \varphi_i)$. Si nous considérons 16 états (quatre valeurs d'amplitude : 2 codées avec A_1 et 2 codées avec A_2), le signal modulé s'écrit (*cf.* figure 4.12) :

$$s_{OMF}(t) = A_1 \cdot \cos\left[2\pi F_0 t + \varphi\right] + A_2 \cdot \sin\left[2\pi F_0 t + \varphi\right] \quad \text{avec } A_{1,2} = \pm 1 \text{ et } \pm 3$$

Copyright © 2017 Dunod.

Nous pouvons remarquer que, comme précédemment, on utilise un codage de type code de Gray.

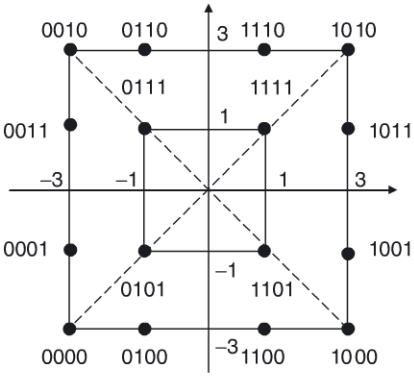

Figure 4.12 – Diagramme spatial de la modulation d'amplitude à deux porteuses en quadrature avec 16 états.

4.3.4 Modulation primaire/secondaire

Dans certaines applications où le signal informatif à transmettre est complexe formé de plusieurs parties indépendantes (image et son, son stéréophonique, etc.), il est possible d'utiliser deux fois successivement le principe de la modulation, appelée modulation primaire et modulation secondaire. Pour concrétiser cette méthodologie, nous allons considérer l'exemple applicatif des émissions radiophoniques stéréophoniques FM.

La radiodiffusion stéréophonique doit transmettre les signaux $g(t)$ et $d(t)$ correspondant aux deux voies (gauche et droite). Chacun de ces signaux a une largeur spectrale identique permettant d'assurer une très grande qualité sonore : 15 Hz à 15 KHz. On supposera que l'amplitude du spectre est constante et égale à 1 sur toute cette largeur spectrale (spectre intégré temporellement).

Pour permettre une utilisation de ces émissions par des récepteurs monophoniques, les deux signaux émis sont en réalité les signaux $m(t)$ et $s(t)$ tels que :

$$m(t) = g(t) + d(t) \quad \text{signal utilisé par les récepteurs monophoniques}$$
$$s(t) = g(t) - d(t)$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Les signaux $m(t)$ et $s(t)$ étant formés à partir de la somme des signaux $g(t)$ et $d(t)$, ils possèdent la même largeur spectrale. Le spectre d'une somme de signaux est égale à la somme des spectres des différents signaux. La figure 4.13 représente schématiquement ces spectres $M(f)$ et $S(f)$ des signaux $m(t)$ et $s(t)$ en supposant un spectre intégré sur le temps et normalisé à 1 (analyse fréquentielle des émissions radiophoniques sur un temps long). La largeur spectrale utilisée sera supposée égale à 15 KHz. À la réception, la reconstitution des signaux $g(t)$ et $d(t)$ à partir des signaux $m(t)$ et $s(t)$ est très simple :

$$g(t) = [m(t) + s(t)]/2 \quad \text{et} \quad d(t) = [m(t) - s(t)]/2$$

Pour transmettre les deux signaux $m(t)$ et $s(t)$ sur le même canal de transmission (même onde porteuse finale), le signal $s(t)$ est utilisé pour moduler en amplitude une onde, dite sous-porteuse, de fréquence $F_{SP} = 38$ KHz et d'amplitude égale à 1. Cette modulation d'amplitude est une modulation d'amplitude sans porteuse avec un indice de modulation égal à 1 (OMA/SP). Un signal $r(t)$ est formé de la somme du signal $m(t)$, de la sous-porteuse modulée par le signal $s(t)$ et d'un signal sinusoïdal pur de fréquence $F_0 = 19$ KHz et d'amplitude 1. Le signal $r(t)$ peut s'écrire sous la forme simplifiée suivante :

$$r(t) = m(t) + s_{OMA}\{s(t), F_{SP}\} + \sin(2\pi F_0 t)$$

Dans une représentation fréquentielle unilatérale, le spectre $R(f)$ de ce signal s'exprime par :

$$R(f) = M(f) + S_{OMA}(f) + \delta(f - F_0)$$

Le spectre, représenté sur la figure 4.14, permet de déterminer une largeur spectrale de 53 KHz. La modulation d'amplitude étant sans porteuse, il n'apparaît pas de raie à 38 KHz.

Cette largeur spectrale pourrait être réduite si, au lieu d'utiliser une modulation d'amplitude complète, il avait été considéré une modulation à bande latérale unique (bande latérale inférieure). Dans ce cas la largeur spectrale aurait été d'environ 38 KHz.

Copyright © 2017 Dunod.

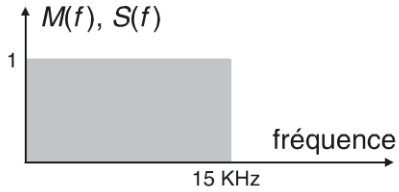

Figure 4.13 – Représentation spectrale des signaux à émettre en radiodiffusion FM.

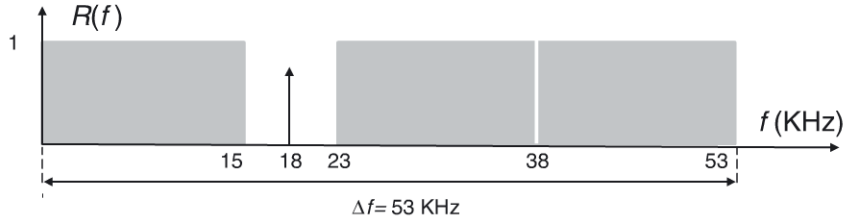

Figure 4.14 – Représentation spectrale *R*(*f*) du signal intermédiaire *r*(*t*).

Pour permettre la transmission hertzienne du signal $r(t)$, précédemment défini, il est utilisé pour moduler en fréquence une porteuse de fréquence $F_P = 100$ MHz. L'indice de modulation est pris égal à 5. Nous avons donc une largeur spectrale ou largeur utile d'émission qui est donnée par la relation approchée de Carson (*cf.* paragraphe 4.3) :

$$L_{u,OMF} \neq 2(1+\text{« indice de modulation »})\cdot f_{\max} = 2(1+5)\cdot 53 = 636\,\text{KHz}$$

La gamme de fréquence allouée à ce type de radiodiffusion s'étend de 88 MHz à 108 MHz. De plus un intervalle fréquentiel de protection de 400 KHz est imposé entre les zones spectrales occupées par les émetteurs. La figure 4.15 représente ce spectre de l'OMF. Donc l'occupation d'un émetteur doit être considérée comme étant :

$$L_{u,OMF} = 636 + 400 = 1\,036\,\text{KHz} \approx 1\,\text{MHz}$$

Par conséquent le nombre d'émetteurs dans la gamme allouée peut être de 20. Enfin l'onde sinusoïdale pure à 19 KHz a été émise afin de permettre au récepteur une démodulation plus aisée. En effet, étant

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

donné que la modulation d'amplitude a été réalisée sans porteuse, il est nécessaire de recréer cette fréquence de 38 KHz pour démoduler le signal. Cette fréquence est alors produite à partir du signal à 19 KHz.

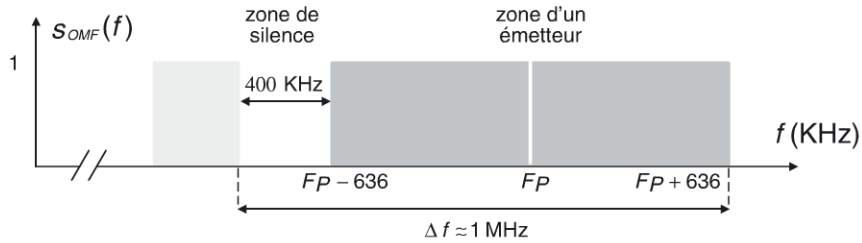

Figure 4.15 – Représentation spectrale de l'onde modulée en fréquence.

Copyright © 2017 Dunod.

5 Signaux aléatoires Bruit

5.1 Signaux aléatoires

5.1.1 Définitions

Un signal est dit **aléatoire** si ses valeurs ou réalisations dépendent du hasard et s'il ne possède pas de représentation analytique. Par contre l'observation de ce signal peut être caractérisée par des grandeurs statistiques ou fréquentielles.

Considérons un ensemble n d'expérimentations ou d'épreuves ou encore d'enregistrements liés à un même phénomène physique. À chacune de ces épreuves, indicées par i, est associée une fonction $s(t)$ qui représente une réalisation du signal aléatoire ou une trajectoire du **processus aléatoire**, modèle mathématique du signal aléatoire (*cf.* figure 5.1). Pour t_0 fixé, l'ensemble des valeurs $s_i(t_0)$ représente les valeurs du signal aléatoire $s(t_0)$.

Un processus aléatoire, décrivant un signal aléatoire est dit **stationnaire** si les propriétés statistiques (moyenne, écart type, etc.) sont indépendantes du choix de l'origine du temps.

Il est plus aisé d'obtenir une expérimentation d'un processus sur un temps long que plusieurs épreuves de ce processus lié à un même phénomène physique. Le processus est dit **ergodique** si les moyennes sur plusieurs réalisations sont équivalentes à des moyennes temporelles correspondant à une seule épreuve.

Ainsi un processus stationnaire et ergodique pourra être analysé à partir d'une seule expérimentation sur un temps suffisamment long (ces deux propriétés étant vérifiées a posteriori sur les résultats obtenus).

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

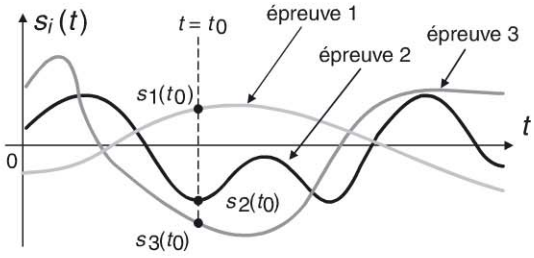

Figure 5.1 – Réalisations d'un signal aléatoire provenant de plusieurs épreuves.

Ce signal aléatoire peut être continu (exemple de la figure 5.1) ou discret (nombre de valeurs fini). Étant donné que la plupart des signaux « informatif » mesurés et étudiés sont de type continus, nous nous intéresserons ici à cette classe de signaux.

5.1.2 Caractérisations statistiques (*cf.* annexes)

a) Caractérisation d'un signal aléatoire stationnaire

Soit un signal aléatoire s défini par sa loi de distribution ou loi de probabilité $p(s)$ et considéré comme stationnaire, nous pouvons caractériser ce signal avec les paramètres statistiques suivants (*cf.* annexes) :

– valeur moyenne ou espérance :

$$m_s = E_{sp}[s] = \int_{-\infty}^{+\infty} s \cdot p(s) \cdot \mathrm{d}s \tag{5.1}$$

– valeur quadratique moyenne ou moment d'ordre 2 :

$$E_{sp}\left[s^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 \cdot p(s) \cdot \mathrm{d}s \tag{5.2}$$

– écart quadratique moyen ou moment d'ordre 2 centré ou variance :

$$\sigma_s^2 = E_{sp}[(s - m_s)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (s - m_s)^2 \cdot p(s) \cdot \mathrm{d}s \tag{5.3}$$

Copyright © 2017 Dunod.

– écart type :

$$\sigma_s = \sqrt{E_{sp}[(s - m_s)^2]} \tag{5.4}$$

– fonction d'autocorrélation statistique : cette fonction, notée $\Gamma_s(\tau)$, est une indication sur la liaison statistique entre les valeurs du signal aléatoire s et s' mesurées à deux instants séparés de τ :

$$\Gamma_s(\tau) = E_{sp}[s(t) \cdot s(t-\tau)] = E_{sp}[s \cdot s'] = \iint_{\infty} s \cdot s' \cdot p(s, s'; \tau) \cdot \mathrm{d}s \cdot \mathrm{d}s' \tag{5.5}$$

Si on considère les variables aléatoires s et s' centrées, on parlera de fonction d'autocovariance $\mathrm{Cov}_s(\tau)$:

$$\mathrm{Cov_s}(\tau) = E_{sp}[(s - m_s) \cdot (s' - m_{s'})] = \Gamma_s(\tau) - m_s^2$$

car

$$m_s = m_{s'} \text{ (stationnarité)}$$

Nous pouvons aussi définir la fonction d'autocovariance normalisée ou encore coefficient de corrélation ou dans ce cas d'autocorrélation $r_{ss}(\tau)$:

$$r_{ss}(\tau) = \mathrm{Cov}_s(\tau)/\sigma_s^2 \tag{5.6}$$

b) Caractérisation d'un signal aléatoire stationnaire et ergodique

Si la variable aléatoire stationnaire est aussi ergodique, nous avons donc l'équivalence avec les caractéristiques temporelles, c'est-à-dire :

– moyenne temporelle :

$$\overline{\mathrm{s(t)}} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t) \cdot \mathrm{d}t \equiv m_s \tag{5.7}$$

– puissance du signal :

$$\mathrm{P_s} = \overline{\mathrm{s^2(t)}} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s^2(t) \cdot \mathrm{d}t \equiv E_{sp}\left[s^2\right] \tag{5.8}$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

– puissance des variations par rapport à la moyenne :

$$\mathrm{P}_{\text{s-m}_\text{s}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [s(t) - \overline{s(t)}]^2 \cdot \mathrm{d}t = P_s - \overline{s(t)}^2 \equiv \sigma_\mathrm{s}^2 \qquad (5.9)$$

– valeur efficace des variations :

$$\sqrt{\mathrm{P}_{\text{s-m}_\text{s}}} = \sqrt{P_s - \overline{s(t)}^2} \equiv \sigma_s \qquad (5.10)$$

– fonction d'autocorrélation temporelle $C_{ss}(\tau)$:

$$\mathrm{C}_{\mathrm{ss}}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t) \cdot s(t-\tau) \cdot \mathrm{d}t \equiv \Gamma_s(\tau) \qquad (5.11)$$

et pour la fonction d'autocorrélation temporelle centrée $Cc_{ss}(\tau)$ ou fonction d'autocovariance temporelle :

$$\mathrm{Cc}_{\mathrm{ss}}(\tau) = \mathrm{C}_{\mathrm{ss}}(\tau) - \overline{s(t)}^2 \equiv \mathrm{Cov}_s(\tau) = \Gamma_s(\tau) - m_s^2 \qquad (5.12)$$

Nous pouvons remarquer que :

$$\mathrm{C}_{\mathrm{ss}}(0) = P_s \quad \text{et} \quad \mathrm{Cc}_{\mathrm{ss}}(0) = \mathrm{C}_{\mathrm{ss}}(0) - \overline{s(t)}^2 = P_s - \overline{s(t)}^2 = \sigma_s^2 \qquad (5.13)$$

c) Caractérisation d'un signal aléatoire gaussien

Considérons un processus aléatoire gaussien stationnaire et centré décrivant une variable aléatoire s. Ce processus est complètement déterminé par la seule donnée de sa fonction de corrélation $C_{ss}(\tau) = Cc_{ss}(\tau)$. Ainsi nous avons :

– valeur moyenne :

$$m_s = \overline{s(t)} = 0 \quad \text{(variable aléatoire centrée)}$$

– écart quadratique moyen ou moment d'ordre 2 centré ou variance :

$$\sigma_\mathrm{s}^2 = E_{sp}[(s)^2] = Cc_{ss}(0) = C_{ss}(0)$$

Copyright © 2017 Dunod.

– coefficient de corrélation : le coefficient de corrélation r_{ss} s'applique en général à deux signaux aléatoires différents (*cf.* annexes) ; ici nous considérons les deux variables aléatoires s et s décalé de τ, d'où le coefficient de corrélation $r_{ss}(\tau)$:

$$r_{ss}(\tau) = \frac{C_{ss}(\tau)}{C_{ss}(0)}$$

– densité de probabilité :

$$p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot C_{ss}(0)}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2 \cdot C_{ss}(0)}} \tag{5.14}$$

d) Caractérisation de deux signaux aléatoires stationnaires

La caractérisation de l'interaction ou la comparaison de deux signaux aléatoires s_1 et s_2 peuvent être réalisées par les fonctions suivantes :

– fonction de corrélation statistique ou d'intercorrélation statistique :

$$\begin{aligned}\Gamma_{s_1 s_2}(\tau) &= E_{sp}[s_1(t) \cdot s_2(t-\tau)] = E_{sp}[s_1 \cdot s_2] \\ &= \iint_{\infty} s_1 \cdot s_2 \cdot p(s_1, s_2; \tau) \cdot \mathrm{d}s_1 \cdot \mathrm{d}s_2\end{aligned}$$

– fonction de covariance :

$$\mathrm{Cov}_{s_1 s_2}(\tau) = E_{sp}[(s_1 - m_{s_1}) \cdot (s_2 - m_{s_2})] = \Gamma_{s_1 s_2}(\tau) - m_{s_1} \cdot m_{s_2}$$

– coefficient de corrélation :

$$r_{s_1 s_2} = \frac{E_{sp}[(s_1 - m_{s_1}) \cdot (s_2 - m_{s_2})]}{\sigma_{s_1} \cdot \sigma_{s_2}} = \frac{\mathrm{Cov}_{s_1 s_2}(\tau)}{\sigma_{s_1} \cdot \sigma_{s_2}} = \frac{\Gamma_{s_1 s_2}(\tau) - m_{s_1} \cdot m_{s_2}}{\sigma_{s_1} \cdot \sigma_{s_2}} \tag{5.15}$$

– fonction de corrélation temporelle ou d'intercorrélation temporelle :

$$\mathrm{C}_{s_1 s_2}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s_1(t) \cdot s_2(t-\tau) \cdot \mathrm{d}t \tag{5.16}$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

e) Exemple de la caractérisation d'un signal aléatoire

Considérons un signal sinusoïdal $s(t) = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ d'amplitude a, de pulsation ω et de phase φ. Comme nous l'avons vu au chapitre 4, ce signal peut être le support (onde porteuse) d'un signal informatif à transporter. La modulation s'effectue en faisant varier au rythme du signal informatif ou modulant l'un des trois paramètres du signal porteur $s(t)$. Nous allons supposer que le signal modulant est un processus aléatoire de distribution uniforme sur un intervalle fixé. Ainsi, nous pouvons distinguer les trois cas suivants (*cf.* figure 5.2) :

– cas I (modulation d'amplitude) : a est une variable aléatoire,

$$\omega = \Omega = \text{Cte} \quad \text{et} \quad \varphi = 0 = \text{Cte}.$$

– cas II (modulation de fréquence ou de pulsation) : ω est une variable aléatoire,

$$a = A = \text{Cte} \quad \text{et} \quad \varphi = 0 = \text{Cte}.$$

– cas III (modulation de phase) : φ est une variable aléatoire,

$$a = A = \text{Cte} \quad \text{et} \quad \omega = \Omega = \text{Cte}.$$

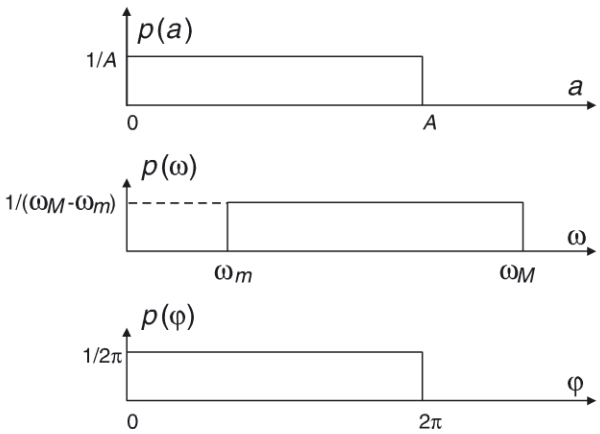

Figure 5.2 – Fonctions de distribution des variables aléatoires *a*, *ω* et *φ*.

Copyright © 2017 Dunod.

Pour ces trois cas, nous allons caractériser la variable aléatoire $s = s(t_0)$ obtenue à l'instant quelconque fixé t_0, c'est-à-dire calculer la densité de probabilité $p(s)$, la fonction de répartition $P(s) = \text{Prob}\{s' \leq s\}$, la moyenne statistique m_s et la variance ou moyenne quadratique centrée σ_s :

– **Cas I** (modulation d'amplitude) (*cf.* figure 5.3) :

$$s = a \cdot \sin(\Omega \cdot t_0) = a \cdot k_0 \quad \text{avec } k_0 \in [-1, +1] \text{ selon la valeur de } t_0$$

$$p(s) = 1/|A \cdot k_0| \quad \text{pour } s \in [0, Ak_0] \text{ ou } s \in [Ak_0, 0] \text{ selon la valeur de } t_0$$

$$\text{si } s \in [0, Ak_0] \text{ alors } P(s) = \frac{s}{|A \cdot k_0|} \text{ ; si } s \in [Ak_0, 0] \text{ alors } P(s) = \frac{-s}{|A \cdot k_0|}$$

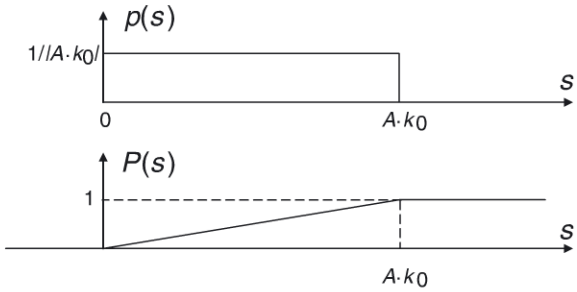

Figure 5.3 – Fonctions de distribution et de répartition de la variable aléatoire $s = s(t_0)$ dans le cas d'une modulation d'amplitude (cas I) avec $t_0 > 0$.

Ces lois statistiques dépendent de la valeur de t_0, aussi nous pouvons conclure que cette variable aléatoire n'est pas stationnaire. De plus, nous avons :

$$\text{si } s \in [0, Ak_0] \quad \text{alors } m_s = |A \cdot k_0|/2;$$
$$\text{si } s \in [Ak_0, 0] \quad \text{alors } m_s = -|A \cdot k_0|/2$$
$$\text{si } s \in [0, Ak_0] \quad \text{alors } E_{sp}[s^2] = \frac{(A \cdot k_0)^2}{3};$$
$$\text{si } s \in [Ak_0, 0] \quad \text{alors } E_{sp}[s^2] = -\frac{(A \cdot k_0)^2}{3}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

La valeur moyenne temporelle $\overline{s(t)}$ du signal $s(t)$ étant nulle ($\overline{s(t)} \neq m_s$), le processus associé à cette variable aléatoire n'est pas ergodique.

– **Cas II** (modulation de fréquence) (*cf.* figure 5.4) :

$$s = A \cdot \sin(\omega \cdot t_0)$$

avec les variables aléatoires $\omega \in [\omega_m, \omega_M]$ et $s \in [-A, +A]$.

En posant $\Delta\omega = \omega_M - \omega_m$ et $t_0 \cdot \Delta\omega = k \cdot (2\pi) + \Delta\varphi$, il vient :

$$P(s) = \frac{2(k+1) \cdot Arc\sin(s/A) + (k-1)\pi + \Delta\varphi}{k2\pi + \Delta\varphi}$$

$$p(s) = \frac{2(k+1)}{k2\pi + \Delta\varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2 - s^2}} \quad \text{avec } p(0) = \frac{2(k+1)}{k2\pi + \Delta\varphi} \cdot \frac{1}{A}$$

Ces lois statistiques sont indépendantes de la valeur de t_0, aussi nous pouvons conclure que cette variable aléatoire est stationnaire. De plus, nous avons :

$$m_s = 0 \equiv \overline{s(t)}$$

$$E_{sp}[s^2] = \sigma_s^2 = \frac{(k+1) \cdot \pi}{2k\pi + \Delta\varphi} \cdot A^2 \quad \text{variable aléatoire centrée } (m_s = 0)$$

Ainsi les moyennes statistique et temporelle sont identiques, par contre les valeurs quadratiques moyennes statistique et temporelle sont différentes ($P_s = A^2/2$). Donc le processus associé à cette variable aléatoire n'est pas ergodique.

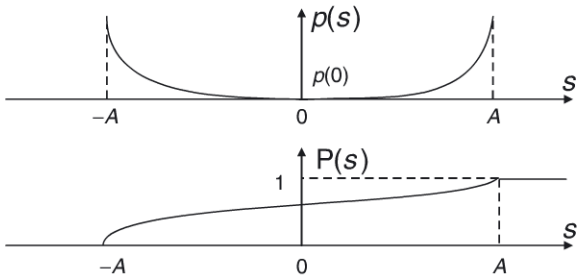

Figure 5.4 – Fonctions de distribution et de répartition de la variable aléatoire $s = s(t_0)$ dans le cas d'une modulation de fréquence (cas II).

Copyright © 2017 Dunod.

– **Cas III** (modulation de phase) :

$s = A \cdot \sin(\Omega \cdot t_0 + \varphi)$ avec les variables aléatoires $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $s \in [-A, +A]$

Ce cas III est un cas particulier de la modulation de fréquence en considérant que l'excursion de fréquence produit une variation de phase entre 0 et 2π. Aussi il suffit de reporter dans les relations précédentes du cas II les valeurs suivantes :

$$k = 0 \text{ et } \Delta\varphi = 2\pi$$

$$P(s) = \frac{1}{\pi} \cdot Arc\sin(s/A) + \frac{1}{2}$$

$$p(s) = 1/(\pi \cdot \sqrt{A^2 - s^2}) \quad \text{avec } p(0) = \frac{1}{\pi \cdot A}$$

Ces lois statistiques sont indépendantes de la valeur de t_0, aussi nous pouvons conclure que cette variable aléatoire est stationnaire. Les courbes de représentations de ces deux fonctions sont identiques à celle de la figure 5.4. De plus, nous avons :

$$m_s = 0 \equiv \overline{s(t)}$$

$$E_{sp}[s^2] = \sigma_s^2 = \frac{A^2}{2} \equiv P_s = \overline{s^2(t)} \quad \text{variable aléatoire centrée } (m_s = 0)$$

Ainsi les moyennes statistique et temporelle, les valeurs quadratiques moyennes statistique et temporelle sont identiques. Il serait aussi possible de calculer l'autocorrélation statistique et temporelle et de vérifier leur identité :

$$C_{ss}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cdot \cos(\Omega \cdot \tau) \equiv \Gamma_s(\tau) \quad \text{variable aléatoire centrée } (m_s = 0)$$

Le processus associé à cette variable aléatoire est donc ergodique.

On vérifie bien la relation 5.13 sur la valeur à l'origine de la fonction d'autocorrélation $C_{ss}(0) = P_s$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Copyright © 2017 Dunod.

5.2 Le bruit

5.2.1 Définitions

Comme il a été défini dans l'introduction, le bruit correspond à tout signal indésirable limitant l'intelligibilité d'un signal utile. Dans ce chapitre nous donnons quelques renseignements sur la nature du bruit et la notion de rapport signal/bruit.

a) Sources de bruit

Relativement au système considéré (filtre, détecteur, amplificateur, etc.), les sources de bruit sont classables en deux grandes catégories :

– Bruits externes : la source de bruit est localisée à l'extérieur du système et agit sur celui-ci par influence. On peut distinguer deux origines : les perturbations naturelles (bruits cosmiques, bruits atmosphériques) et les perturbations artificielles (parasites générés par des équipements électriques industriels). L'intensité de ces perturbations varie selon les lieux (zones rurales ou urbaines, logements ou usines, etc.). Ces perturbations peuvent être considérées comme négligeables au-delà d'une fréquence de quelques dizaines de MHz.

– Bruits internes : les causes des perturbations internes à un système de traitement peuvent se classer en deux groupes : les perturbations impulsionnelles engendrées par des commutations de courants et le **bruit de fond** généré dans les câbles et les composants électroniques en raison des mécanismes statistiques de la conduction électrique. Deux composantes principales le constituent : bruit thermique (dans les circuits passifs comme les résistances), bruit de grenaille (dans les composants actifs comme les diodes, transistors...). Les perturbations impulsionnelles peuvent être souvent modélisées par des processus de Poisson (*cf.* annexes).

Ces perturbations externes ou internes peuvent être éliminées ou fortement diminuées par des blindages pour le premier groupe ou un mode de construction soigné en ce qui concerne les parasites impulsionnels ; mais le bruit de fond est irréductible pour une température donnée.

Copyright © 2017 Dunod.

b) Bruit thermique

Au-dessus du zéro absolu, l'agitation thermique des particules est à l'origine d'une tension de bruit qui apparaît sur toute résistance. Ce bruit thermique, appelé effet Johnson, se traduit par une tension moyenne efficace b_{eff}^2, exprimée par la relation de Nyquist-Johnson :

$$b_{\text{eff}}^2 = 4 \cdot k \cdot T \cdot R \cdot \Delta f$$

avec k : constante de Boltzmann ($1,38\ 10^{-23}$ J/K)
T : température (en K)
R : résistance (en Ω)
Δf : bande passante du système à l'entrée duquel on suppose que la résistance bruyante est branchée (en Hz).

La puissance totale du bruit thermique obtenue dans une résistance constante aura pour valeur :

$$P_{th} = k \cdot T \cdot \Delta f \quad \text{exprimée en W} \tag{5.17}$$

Dans la bande de fréquences considérées Δf, ce bruit a une densité spectrale de puissance constante :

$$B(f) = B_0 \quad \text{avec } B_0 = (1/2)kT \tag{5.18}$$

Ce type de bruit est appelé **bruit blanc** (fonction de valeur moyenne nulle). D'après la relation précédente 5.18, sa fonction d'autocorrélation temporelle $C_{bb}(\tau)$ est en première approximation une impulsion de Dirac ($C_{bb}(\tau) = 0$ sauf pour $\tau = 0$) (*cf.* figure 5.5) :

$$C_{bb}(\tau) = B_0 \cdot \delta(\tau) \tag{5.19}$$

Pratiquement, un tel bruit n'existe pas, mais on parlera de bruit blanc à chaque fois que son spectre de densité de puissance sera constant à l'intérieur de la bande passante utile du système étudié.

Si cette condition n'est pas entièrement satisfaite, on parlera de bruit rose : fonction d'autocorrélation impulsionnelle très étroite centrée sur $\tau = 0$. Il est possible de modéliser la densité spectrale d'un bruit rose

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

par une fonction porte de largeur $2 \cdot F_b$(F_b : fréquence maximale du bruit rose), soit :

$$B(f) = B_0 \cdot \Pi_{2F_b}(f)$$

Sa fonction d'autocorrélation temporelle $C_{bb}(\tau)$ est alors donnée par :

$$C_{bb}(\tau) = B_0 \cdot (2F_b) \cdot \frac{\sin(2\pi F_b \tau)}{2\pi F_b \tau}$$

Mais dans le cas où F_b est grand, nous pourrons considérer que la fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc ou d'un bruit rose est nulle pur $\tau > \tau_{\text{lim}}$ (*cf.* figure 5.5).

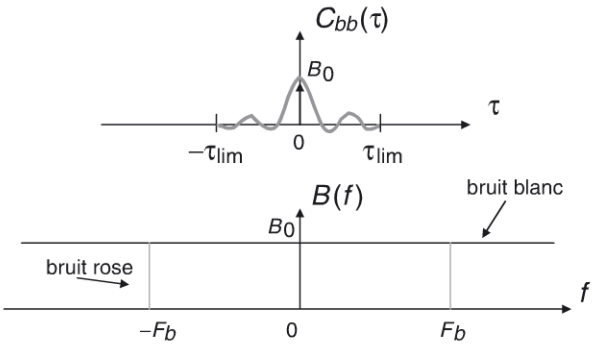

Figure 5.5 – Densité spectrale et fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc et d'un bruit rose.

Le bruit thermique étant créé à partir de la superposition d'un grand nombre de sources élémentaires, il est possible d'appliquer le théorème central limite (cf. annexes) et par conséquent la distribution statistique d'un bruit thermique suit une loi de Gauss.

c) Bruit de grenaille

Le bruit de grenaille correspond aux fluctuations statistiques du nombre de porteurs de charge, traversant une barrière de potentiel, qui participent à la création d'un courant. Une telle barrière existe à chaque jonction PN d'un semi-conducteur. Cet effet se produit également dans les

Copyright © 2017 Dunod.

mécanismes d'émission thermoélectrique et photoélectrique. Contrairement au bruit thermique qui existe en l'absence de tout courant de conduction moyen, le bruit de grenaille dépend du courant moyen et se superpose à celui-ci. On démontre que ce bruit peut aussi être supposé bruit blanc.

d) Modèles de bruit

Pour simuler ou analyser des signaux réels, d'autres modèles, basés sur la densité de probabilité du bruit, peuvent être considérés. Ainsi, en particulier, deux modèles de bruit sont assez répandus :

– le bruit dit gaussien dont la densité probabilité à une répartition de type gaussien caractérisée par une valeur moyenne et un écart type ;
– le bruit dit périodique formé d'une somme de signaux sinusoïdaux sans référence de phase.

Dans le cas du bruit blanc ou du bruit rose, il est possible d'associer une densité de probabilité de type gaussien ou de répartition uniforme.

5.2.2 Rapport signal sur bruit

Le rapport signal/bruit (S/B) est une caractéristique de la dégradation d'un signal, par définition informatif, par un bruit non informatif. C'est un moyen pour caractériser un système de transmission en comparant le rapport S/B à son entrée η_e avec le rapport à sa sortie η_s ou pour comparer la « qualité » des diverses méthodes de traitement de signaux.

Soit un signal $x(t)$, de puissance moyenne finie, mélangé avec du bruit blanc $b(t)$, on aura la puissance moyenne P_s du signal résultant $s(t)$, somme des deux signaux $x(t)$ et $b(t)$, exprimée par :

$$P_s = P_{x+b} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) + b(t)]^2 \, \mathrm{d}t \qquad (5.20)$$

Le bruit étant supposé indépendant du signal, on obtient :

$$P_s = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t)]^2 \, \mathrm{d}t + \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [b(t)]^2 \, \mathrm{d}t = P_x + P_b \quad (5.21)$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

Dans le cas d'un bruit blanc stationnaire, ergodique et centré, nous avons :

$$P_s = P_x + \sigma_b^2$$

On définira donc le rapport signal/bruit η par le rapport de la puissance moyenne du signal et la puissance moyenne du bruit :

$$\eta = \frac{P_x}{\sigma_b^2} \tag{5.22}$$

Considérons un signal informatif de type cosinusoïdal $x(t) = A\cos(\omega t)$; le rapport signal/bruit est donné par :

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{A^2}{\sigma_b^2}$$

5.2.3 Traitement des signaux noyés dans le bruit

Nous allons considérer ici un bruit blanc $b(t)$ possédant les caractéristiques données précédemment. En utilisant les propriétés de ce signal aléatoire particulier, nous présentons un ensemble d'applications fondamentales de la corrélation : détection, extraction, détermination de caractéristiques dynamiques d'un système linéaire.

a) Détection par corrélation d'un signal périodique noyé dans du bruit

Les propriétés des fonctions de corrélation donnent lieu à diverses méthodes de traitement des signaux bruités. Ces traitements supposent un bruit blanc dont la fonction d'autocorrélation est donnée par la relation 5.19. Soient un signal réel périodique $x(t)$ et un signal de bruit $b(t)$, indépendant de $x(t)$ et sans mémoire ($C_{bb}(\infty) = 0$). Le signal complet à traiter $s(t)$ est donné par la somme de ces deux signaux :

$$s(t) = x(t) + b(t)$$

Copyright © 2017 Dunod.

La fonction d'autocorrélation $C_{ss}(\tau)$ de ce signal est donnée par la relation 3.25 :

$$\begin{aligned} C_{ss}(\tau) &= \int_{-T/2}^{+T/2} s(t)s(t-\tau)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-T/2}^{+T/2} [x(t)+b(t)]\,[x(t-\tau)+b(t-\tau)]\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Étant donné la propriété de distributivité de l'opérateur de corrélation, il vient :

$$C_{ss}(\tau) = C_{xx}(\tau) + C_{xb}(\tau) + C_{bx}(\tau) + C_{bb}(\tau)$$

Or les fonctions $C_{xb}(\tau)$ et $C_{bx}(\tau)$ sont nulles, car les deux signaux sont indépendants. Ce résultat sera d'autant plus vrai que la période d'intégration T du corrélateur sera grande. La fonction $C_{bb}(\tau)$ est nulle en dehors de 0 si l'on considère un bruit blanc, ou devient négligeable au bout d'une durée finie de corrélation devant la fonction $C_{xx}(\tau)$ si l'on considère un bruit rose (*cf.* figure 5.6). Par conséquent, nous avons en sortie du corrélateur la fonction d'autocorrélation du signal informatif :

$$C_{ss}(\tau) = C_{xx}(\tau)$$

Cette méthode permet ainsi de détecter la présence d'un signal même lorsque le signal est faible devant le bruit. Comme nous l'avons vu au chapitre 3, dans le cas d'un signal périodique, le signal obtenu à la sortie du corrélateur conservera l'information fréquence (il contient toutes les fréquences du signal et seulement celles-ci) ; mais l'information phase sera perdue et donc cette méthode ne permet pas de restituer la forme du signal.

b) Détection synchrone par corrélation d'un signal périodique noyé dans du bruit

Cette méthode de détection d'un signal noyé dans un bruit peut être encore plus efficace en terme d'extraction d'un signal faible par rapport au

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

bruit en réalisant une détection synchrone. Au lieu de faire l'autocorrélation du signal bruité $s(t)$, le procédé consiste à réaliser la corrélation de ce signal $s(t)$ avec un signal sinusoïdal pur $x_p(t)$. En faisant varier la fréquence de ce signal sinusoïdal, la fonction de corrélation sera non nulle ou maximale à chaque fois que la fréquence du signal $x_p(t)$ sera identique à celle contenue dans le signal $x(t)$. En effet nous avons la fonction de corrélation :

$$C_{sx_p}(\tau) = C_{xx_p}(\tau) + C_{bx_p}(\tau)$$

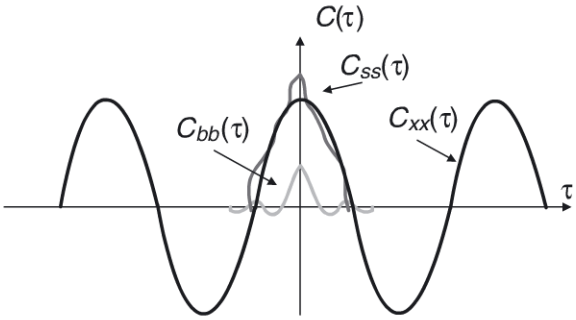

Figure 5.6 – Détection d'un signal périodique noyé dans du bruit blanc.

De même que précédemment, la fonction $C_{bx_p}(\tau)$ est nulle ou devient nulle si le temps d'intégration du corrélateur est suffisamment grand, car les deux signaux sont indépendants. d'où :

$$C_{sx_p}(\tau) = C_{xx_p}(\tau)$$

Ce procédé permettant de s'affranchir des autres fonctions de corrélations et en particulier de celle du bruit $C_{bb}(\tau)$, la détection est plus efficace et autorise des rapports signal/bruit beaucoup plus faibles.

Cette méthode de détection est très puissante. Elle est par exemple très utilisée dans le domaine de la radioastronomie pour déterminer les pulsations radioélectriques d'étoiles lointaines, sachant que les signaux captés sont fortement entachés de bruit.

La fréquence du signal à détecter n'étant en général pas connue, la réalisation pratique d'une telle détection se fait grâce à l'utilisation de

Copyright © 2017 Dunod.

générateur possédant la fonction de vobulation en fréquence. Le terme de vobulation correspond à la possibilité de faire varier linéairement la fréquence du signal de sortie du générateur en fonction du temps. La vitesse d'exploration d'un domaine de fréquence peut aussi en général être choisie.

c) Identification d'un système linéaire à l'aide d'un bruit blanc

Un domaine important de l'automatique est l'identification de processus, c'est-à-dire la détermination de la réponse impulsionnelle ou de la fonction de transfert d'un système de convolution. Ce système étant supposé accessible que par sa sollicitation en entrée et le signal émis en sortie, l'identification consiste à injecter en entrée un signal permettant d'en déduire ensuite par mesure du signal de sortie la réponse impulsionnelle. La méthode la plus directe est basée sur le fait que l'impulsion de Dirac est l'élément neutre de la convolution et, par conséquent, si le signal d'entrée est une impulsion de Dirac, le signal de sortie est directement la réponse impulsionnelle. Cette méthode présente l'inconvénient d'avoir à faire une approximation imparfaite de l'impulsion de Dirac (impulsion d'amplitude infinie et de durée nulle). En effet ce signal d'entrée ne doit pas endommager le système à analyser ; aussi le générateur d'impulsions fournit une impulsion d'amplitude limitée et de durée courte mais non nulle

Pour éliminer ce problème, l'identification du système (détermination de sa réponse impulsionnelle $h(t)$) peut être réalisée en utilisant un corrélateur et un générateur de bruit blanc selon le montage présenté sur la figure 5.7.

Soit un générateur de bruit blanc fournissant un signal $e(t) = b(t)$, nous avons la propriété suivante :

$$C_{ee}(t) = e(t) * \overline{e}(-t) = C_{bb}(t) = B_0 \cdot \delta(t)$$

Le signal de sortie $s(t)$ du système à analyser, système linéaire, continu et stationnaire (filtre) a par définition la forme suivante :

$$s(t) = h(t) * e(t)$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Le corrélateur réalise donc l'opération de corrélation entre $e(t)$ et $s(t)$, soit sous la forme d'un produit de convolution :

$$\begin{aligned} C_{se}(t) &= s(t) * \overline{e}(-t) = h(t) * \left[e(t) * \overline{e}(-t)\right] \\ &= h(t) * [B_0 \cdot \delta(t)] = B_0 \cdot [h(t) * \delta(t)] \\ C_{se}(t) &= B_0 \cdot h(t) \end{aligned}$$

Ainsi, à la sortie du corrélateur, nous obtenons la réponse impulsionnelle à une constante près. La sortie du corrélateur donne donc directement la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système à identifier.

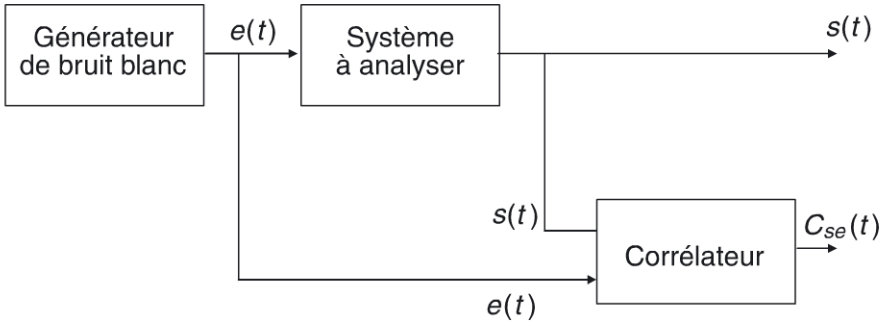

Figure 5.7 – Principe du montage permettant de réaliser l'identification d'un système linéaire à partir d'un bruit blanc.

Copyright © 2017 Dunod.

Partie 2

Le traitement des signaux numériques

Copyright © 2017 Dunod.

Copyright © 2017 Dunod.

NUMÉRISATION DES SIGNAUX 6

6.1 ÉCHANTILLONNAGE

6.1.1 Échantillonnage idéal : définition

L'échantillonnage consiste à représenter un signal analogique continu $s(t)$ par un ensemble de valeurs $s(nT_e)$ avec n entier situées à des instants discrets espacés de T_e constante, appelée la **période d'échantillonnage**. Cette opération est réalisée par un circuit appelé « préleveur ou échantillonneur » symbolisé souvent par un interrupteur. Dans une première phase, nous pouvons faire l'hypothèse que cette durée de prélèvement du signal est très courte et négligeable.

En supposant que le système numérique ne réalise aucun traitement sur le signal enregistré, l'enchaînement des différents signaux dans une chaîne d'acquisition et de restitution de données par un système numérique est celui présenté sur la figure 6.1. Le signal analogique d'entrée V_e est échantillonné pour donner un signal discrétisé temporellement $V_e(nT_e)$.

Mais après cette phase de prélèvement d'échantillons, il est nécessaire de coder la donnée réelle obtenue dans un ensemble fini de valeurs : opération de **quantification**. Après cette quantification du signal, les différentes valeurs sont mémorisées dans le système numérique selon l'ordre de leurs arrivées, formant ainsi une suite de valeurs numériques $V_e(n)$. Si, comme supposé, le système numérique n'effectue aucun traitement sur ces valeurs $V_e(n) = V_s(n)$; cette suite de nombres $V_s(n)$ est envoyée vers le procédé externe en deux étapes : restitution de la valeur analogique $V_s(nT_s)$ et ensuite filtrage de ce signal pour obtenir un signal de sortie V_s sans fronts raides.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

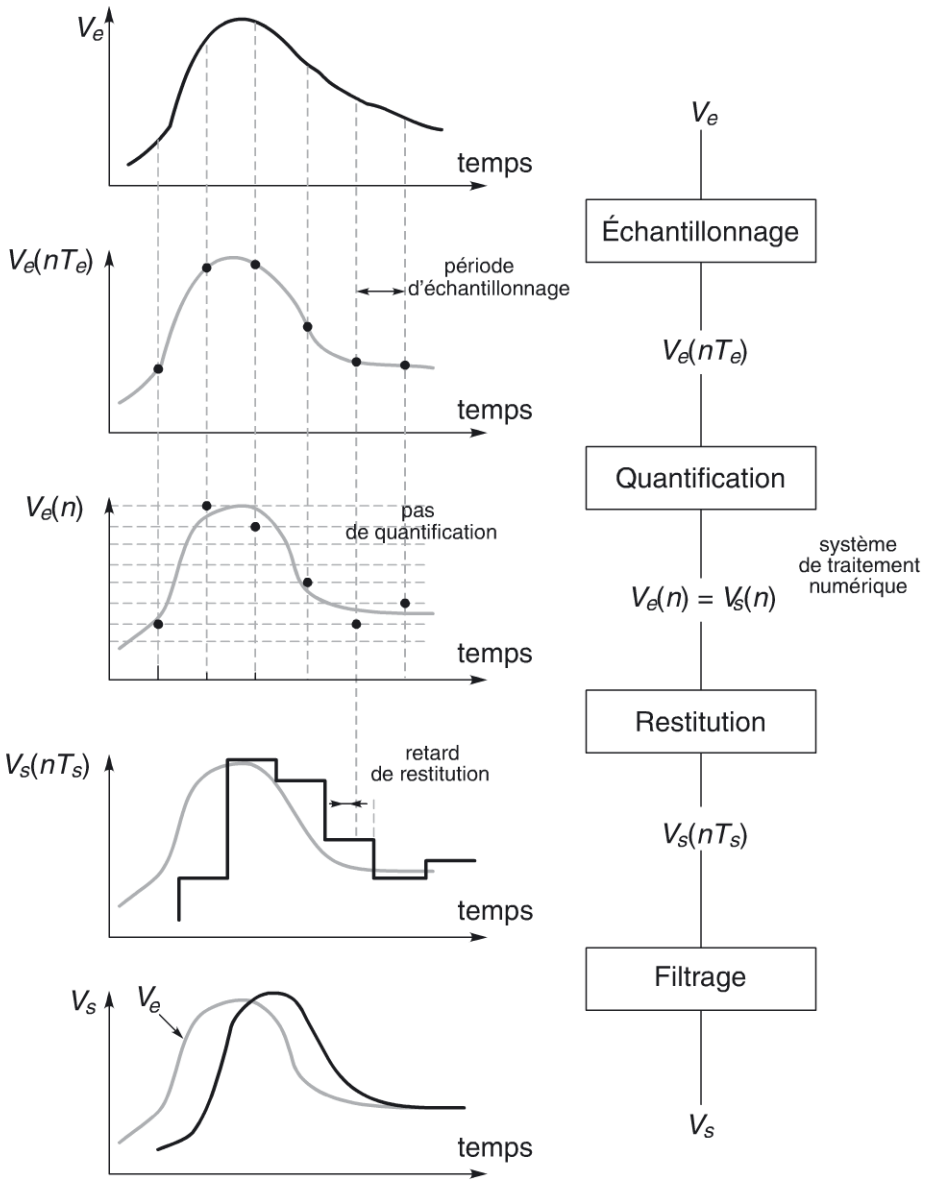

Figure 6.1 – Évolution d'un signal à travers une chaîne d'acquisition et de restitution de données sans modification des valeurs. T_e est la période d'échantillonnage et T_s la période restitution supposée égale à T_e.

Copyright © 2017 Dunod.

Dans ce cas très simple, si l'on considère une période de restitution égale à la période d'échantillonnage, le résultat attendu est une restitution identique ou la plus proche possible du signal d'entrée : $V_s = V_e$. La différence, qui va exister entre ces deux signaux d'entrée et de sortie, est due à de nombreux paramètres dont les trois plus importants sont :

– la période d'échantillonnage ;

– le pas de quantification ou la précision de numérisation du signal ;

– le temps de réponse du système numérique entre l'acquisition et la restitution du signal.

Les deux derniers paramètres peuvent être facilement traités en augmentant la précision du convertisseur analogique numérique (augmentation de l'ensemble de codage) d'une part et d'autre part en choisissant un calculateur plus rapide pour limiter le retard à la restitution.

Mais la détermination du premier paramètre, qui est le choix de la période d'échantillonnage, est plus difficile. En effet , il est clair que la diminution du temps entre deux échantillons ne peut qu'améliorer la chaîne de traitement numérique. Mais cette diminution de la période d'échantillonnage est au prix du traitement (acquisition, mémorisation et restitution) d'un plus grand nombre d'échantillons. Le problème de l'échantillonnage se pose donc en ces termes : existe-t-il, pour un signal donné, une période d'échantillonnage qui soit un « bon compromis » entre la qualité du traitement numérique et la minimisation du nombre de mesures ou d'échantillons ?

6.1.2 Théorème de l'échantillonnage

a) Définition

On suppose que le signal $s(t)$ a un spectre à support borné, c'est-à-dire que le spectre est limité : $S(f) = 0$ pour $f > f_{\max}$ (*cf.* figure 6.2). Cette limitation spectrale est soit naturelle (répartition initiale du signal), soit artificielle en utilisant un filtre comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

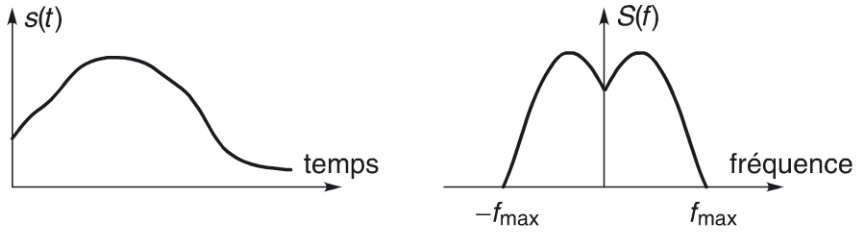

Figure 6.2 – Signal à spectre borné à échantillonner.

Envisagé dans le domaine temporel, le processus d'échantillonnage revient à multiplier le signal analogique $s(t)$ par une série d'impulsions unité : le « signal » obtenu est alors constitué d'une succession d'impulsions, dont la hauteur est modulée par l'amplitude du signal échantillonné (*cf.* figure 6.3). Cette opération mathématique, permettant d'avoir une représentation du signal échantillonné $s_e(t)$, s'obtient en utilisant le peigne de Dirac (*cf.* annexes). Le peigne de Dirac, utilisé dans l'échantillonnage des signaux, est une suite de pics de Dirac régulièrement espacés de la période d'échantillonnage T_e :

$$\mathrm{Pgn}_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_e)$$

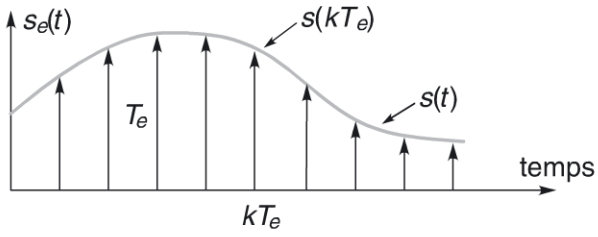

Figure 6.3 – Représentation mathématique du signal échantillonné à une cadence de T_e.

Le signal échantillonné $s_e(t)$ est une suite de pics de Dirac dont les poids sont les valeurs du signal $s(t)$ aux instants kT_e. Nous avons donc

Copyright © 2017 Dunod.

l'expression de $s_e(t)$:

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \delta(t - k \cdot T_e) \tag{6.1}$$

D'après les propriétés du pic de Dirac, l'expression 6.1 du signal échantillonné peut être mise sous la forme de l'expression suivante qui est rigoureusement équivalente :

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \delta(t - k \cdot T_e) = s(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_e)$$

ou :

$$s_e(t) = s(t) \cdot \mathrm{Pgn}_{T_e}(t) \tag{6.2}$$

La question essentielle à se poser est : le signal échantillonné $s_e(t)$ contient-il la même information que le signal initial $s(t)$? Une manière de répondre à cette question est d'étudier le spectre $S_e(f)$ du signal échantillonné $s_e(t)$ et de la comparer au spectre $S(f)$ du signal initial $s(t)$.

D'après le théorème de Plancherel, le spectre du signal échantillonné sera donné par le produit de convolution du spectre du signal initial avec la transformée de Fourier de la suite de pics de Dirac (*cf.* annexes) :

$$S_e(f) = S(f) * \left[F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot F_e) \right] \tag{6.3}$$

Étant donné la propriété du pic de Dirac, élément neutre de la convolution (*cf.* annexes), le résultat est :

$$S_e(f) = F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - k \cdot F_e) \tag{6.4}$$

Par conséquent, le spectre de l'échantillonné $S_e(f)$ s'obtient en périodisant avec une période égale à F_e, sur l'axe des fréquences, la transformée de Fourier $S(f)$ du signal initial $s(t)$ multiplié par F_e (*cf.* figure 6.4).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

b) Théorème de Shannon

À partir de ce résultat, représenté sur la figure 6.4 et traduit par l'équation 6.4, nous pouvons faire une première remarque : contrairement au signal initial $s(t)$, qui avait un spectre borné et limité par la fréquence $f_{\max}$; le signal échantillonné $s_e(t)$ possède un spectre non borné puisque la périodisation est infinie de part et d'autre de l'axe des ordonnées.

De plus, pour que la construction périodique du spectre $S_e(f)$ du signal échantillonné ne produise pas une déformation du motif répété du spectre $S(f)$ du signal initial, il faut et il suffit que la fréquence de répétition F_e, qui est la fréquence d'échantillonnage, soit égale ou supérieure à deux fois la fréquence maximale $f_{\max}$ contenue dans le signal initial. Soit l'équation correspondant au **théorème de l'échantillonnage** ou **théorème de Shannon** :

$$F_e \geq 2 \cdot f_{\max} \tag{6.5}$$

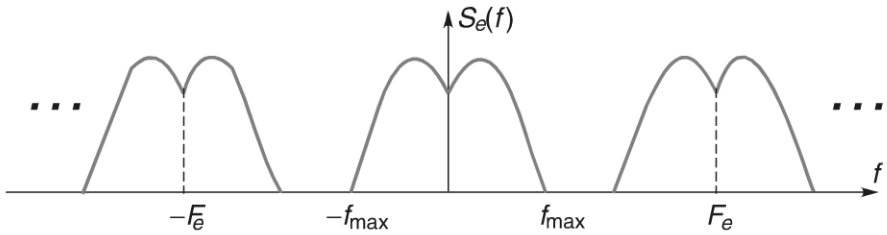

Figure 6.4 – Périodisation du spectre du signal échantillonné.

Pour une fréquence d'échantillonnage fixée et égale à F_e, la fréquence limite $F_e/2$, appelée fréquence de Shannon ou fréquence de Nyquist ou encore fréquence de repliement (*folding frequency*), correspond à la fréquence maximale admissible dans le spectre du signal afin d'éviter les distorsions du spectre de l'échantillonné.

c) Extraction du signal initial à partir du signal échantillonné

Comme nous l'avons vu dans l'introduction de ce chapitre, le problème de l'échantillonnage peut être aussi posé en termes de retour au signal

Copyright © 2017 Dunod.

initial à partir du signal échantillonné, c'est-à-dire, si l'on dispose du signal $s_e(t)$, peut-on retrouver le signal $s(t)$?

En supposant le signal initial à spectre borné par $f_{\max}$ et la condition du théorème d'échantillonnage remplie, le spectre de base $S_{e0}(f)$ peut être facilement isolé. Ainsi en considérant directement la relation 6.4, ce spectre de base est :

$$S_{e0}(f) = F_e \cdot S(f) \tag{6.6}$$

d'où, en appliquant la transformée de Fourier inverse à cette relation, nous avons la relation temporelle entre le signal $s_{e0}(t)$ correspondant à ce spectre de base $S_{e0}(f)$ et le signal initial $s(t)$:

$$s_{e0}(t) = F_e \cdot s(t) \tag{6.7}$$

Mais il est possible de formaliser cette extraction du spectre périodique de l'échantillonné $S_e(f)$ en utilisant un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $F_e/2$ (*cf.* figure 6.5). La fonction réalisée par le filtre passe-bas idéal, encore appelée fonction porte, s'écrit $\Pi_{Fe}(f)$. La transformée de Fourier inverse de cette fonction est la fonction $\mathrm{sinc}(F_e t)$ (*cf.* chapitre 2). On peut donc exprimer le spectre de base $S_{e0}(f)$ de l'échantillonné sous la forme suivante :

$$S_{e0}(f) = S_e(f) \cdot \Pi_{F_e}(f) \tag{6.8}$$

En prenant la transformée de Fourier inverse de la relation précédente et en appliquant le théorème de Plancherel, on obtient l'expression du signal temporel ayant le spectre de base $S_{e0}(f)$ du signal échantillonné :

$$s_{e0}(t) = s_e(t) * [F_e \cdot \mathrm{sinc}(F_e t)] = F_e \cdot \left[s_e(t) * \frac{\sin(\pi F_e t)}{\pi F_e t} \right]$$

En considérant l'expression 6.1 du spectre du signal échantillonné, il vient :

$$s_{e0}(t) = F_e \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \cdot \delta(t - k \cdot T_e) \right] * \frac{\sin(\pi F_e t)}{\pi F_e t}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

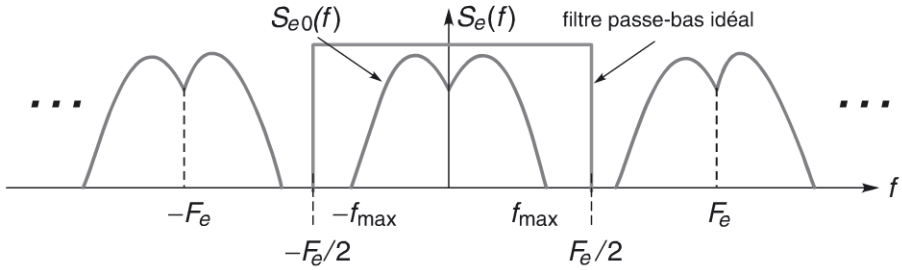

Figure 6.5 – Filtrage passe-bas idéal permettant d'extraire du spectre du signal échantillonné le spectre du signal initial.

d'où :

$$s_{e0}(t) = F_e \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \frac{\sin(\pi F_e (t - kT_e))}{\pi F_e (t - kT_e)} \right] \tag{6.9}$$

En identifiant les deux relations 6.7 et 6.9 donnant deux expressions de $s_{e0}(t)$, nous obtenons une expression de $s(t)$ en fonction des échantillons prélevés aux instants T_e :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \frac{\sin(\pi F_e (t - kT_e))}{\pi F_e (t - kT_e)} \tag{6.10}$$

Le théorème de l'échantillonnage peut aussi s'exprimer de la manière suivante : un signal continu de spectre borné dans l'intervalle de fréquences $(-f_{max}, +f_{max})$ est complètement déterminé par les valeurs qu'il prend à des instants régulièrement espacés de $1/(2\, f_{max})$.

En effet cette somme de produits « $s(kT_e) \cdot \mathrm{sinc}(F_e (t - kT_e))$ » permet de reconstituer exactement le signal et donc l'échantillonnage idéal, dans les conditions du théorème de Shannon, conserve la **totalité de l'information** contenue dans le signal.

Copyright © 2017 Dunod.

6.1.3 Effet du repliement de spectre

a) Phénomène de repliement de spectre

Dans le cas où la condition du théorème de Shannon n'est pas respectée, il y a donc un phénomène de recouvrement de spectre (*folding, aliasing*). Le filtre passe-bas idéal, qui permettait de récupérer le spectre de base identique au spectre du signal initial, ne peut plus agir efficacement dans ces conditions. La figure 6.6 présente ce chevauchement de spectre et donc le spectre résultant. C'est ainsi qu'une fréquence située dans la zone de repliement est susceptible d'appartenir à la fois au spectre de base du signal initial et à son spectre image décalé de $\pm F_e$.

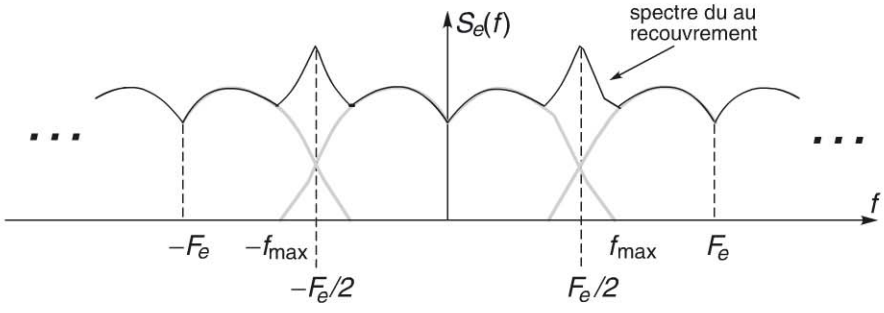

Figure 6.6 – Recouvrement de spectre dans le cas du non-respect du théorème de Shannon ($F_e < 2\,f_{max}$).

Cet effet peut être vu comme un effet stroboscopique. Ainsi, pour une fréquence d'échantillonnage F_e telle que $F_e < 2\,f_{max}$ (non respect du théorème d'échantillonnage), une fréquence f_r comprise entre $F_e/2$ et f_{max} est vue comme la fréquence $F_e - f_r$, dite fréquence fantôme de la fréquence f_r. Cette raie fréquentielle due au repliement va apparaître comme une raie appartenant au signal alors qu'elle n'a aucune existence réelle (*cf.* figure 6.7) ; ou encore l'amplitude de cette raie fantôme va s'ajouter à l'amplitude de la composante fréquentielle $f_n = F_e - f_r$, existant réellement.

Il est important de remarquer que l'échantillonnage idéal est réalisé à l'aide d'impulsions excessivement brèves, aussi le spectre se répète indéfiniment sans atténuation. Dans la pratique (*cf.* paragraphe suivant),

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

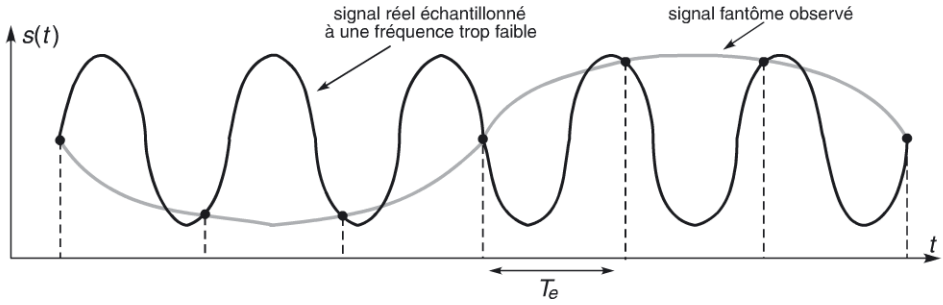

Figure 6.7 – Effet stroboscopique du recouvrement de spectre : existence d'une fausse fréquence.

la durée de prélèvement d'un échantillon du signal a une valeur finie. Dans ce cas, la répétition du spectre se fait avec un affaiblissement progressif et diminue ainsi l'effet de repliement.

b) Filtre passe-bas anti-repliement

Pour éviter les répliques indésirables dues au repliement, il est indispensable que le spectre du signal ne dépasse en aucun cas la fréquence de Nyquist : $F_e/2$; cette fréquence est la plus élevée du signal qui soit sa propre réplique. Si le signal analogique possède des fréquences supérieures, il faut faire précéder l'échantillonneur d'un **filtre passe-bas anti-repliement**, dont la fréquence de coupure est la fréquence de Nyquist, de manière à supprimer toute fausse fréquence. Dans la plupart des cas, ce filtrage est indispensable ; en effet le signal peut soit intégrer des hautes fréquences inutiles pour son exploitation ou être superposé à un bruit qui augmente fortement la fréquence maximale (*cf.* figure 6.8).

Remarque

Le signal de la parole, utilisé pour les communications téléphoniques, posséde des composantes fréquentielles qui s'étendent au-delà de 10 KHz : composantes de la voix et du bruit. Mais il est limité à 4 KHz pour pouvoir appliquer une fréquence d'échantillonnage de 8 KHz et réduire ainsi fortement la taille des données à transmettre.

Copyright © 2017 Dunod.

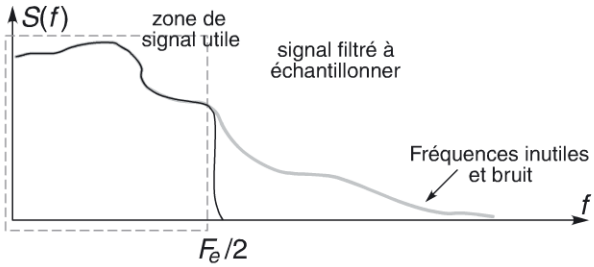

Figure 6.8 – Utilisation d'un filtre anti-repliement afin de limiter réellement la largeur de bande fréquentielle du signal à échantillonner.

Théoriquement, ce filtre analogique à la fréquence de $F_e/2$ doit avoir une pente de réjection infinie, ce qui est physiquement impossible. Les filtres seront choisis avec une pente d'autant plus faible que la fréquence maximale du signal est inférieure à la fréquence de Nyquist. Par exemple, si l'on désire échantillonner un signal jusqu'à la fréquence maximale $f_{\max}$, la fréquence d'échantillonnage F_e sera choisie égale à $nf_{\max}$ avec n variant de 2,5 à 5 pour éloigner la fréquence de Nyquist ($F_e/2$) de la fréquence maximale choisie, et ainsi obtenir une atténuation suffisante des fréquences sosies (*cf.* figure 6.9).

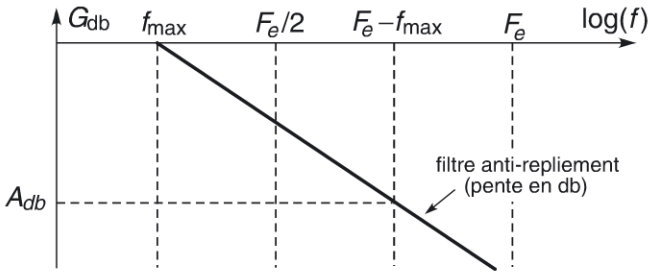

Figure 6.9 – Diagramme de Bode d'un filtre anti-repliement.

Pour avoir une atténuation A en db au niveau de la première fréquence de repliement $F_e - f_{\max}$, la pente du filtre p s'exprime en

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

db/octave selon la relation suivante :

$$p = \frac{A \log 2}{\log\left[\dfrac{F_e - f_{\max}}{f_{\max}}\right]} = \frac{A \log 2}{\log (n-1)} \tag{6.11}$$

Dans la pratique la réalisation de l'échantillonnage d'un signal sera un compromis entre la raideur du filtre passe-bas d'entrée et la fréquence d'échantillonnage (*cf.* figure 6.10). On peut ainsi remarquer que pour avoir une atténuation de 100 (−40 db) au niveau de la première fréquence fantôme et utiliser un filtre passe-bas du deuxième ordre (soit : −12 db/octave), il est nécessaire de prendre une fréquence d'échantillonnage égale à 11 fois la fréquence maximale choisie.

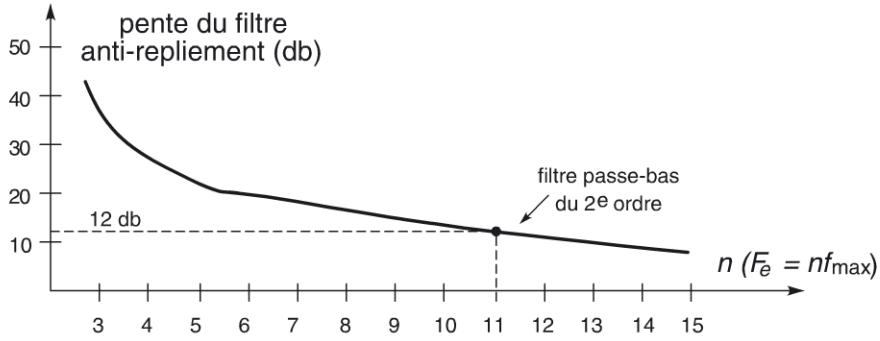

Figure 6.10 – Évaluation de la pente du filtre anti-repliement en fonction du rapport fréquence d'échantillonnage sur fréquence maximale nécessaire pour avoir une atténuation de 100 pour la première fréquence fantôme.

c) Concept de sous-échantillonnage : exemple des signaux à bande étroite

On considère un signal $s(t)$ de largeur spectrale 0 à f_m. Afin de pouvoir transmettre ce signal porteur d'informations, on réalise la modulation d'amplitude d'une onde porteuse de fréquence f_p telle que $f_p \gg f_m$. Le spectre du signal modulé en amplitude $S_{OMA}(f)$, étudié au chapitre 4.2, est représenté sous forme bilatérale sur la figure 6.11. Il est important

Copyright © 2017 Dunod.

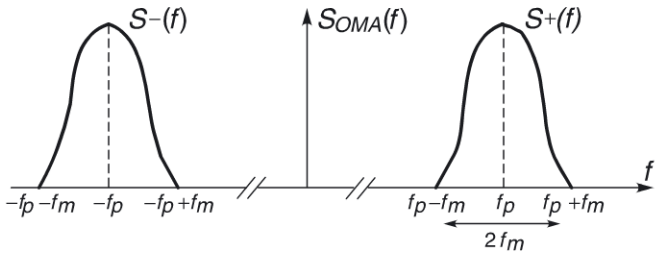

Figure 6.11 – Spectre de l'onde modulée en amplitude par le signal de largeur spectrale [0, f_m].

de noter la faible bande spectrale occupée par ce spectre étant donné les valeurs relatives des fréquences du signal à transmettre et de l'onde porteuse. Nous sommes ici en présence d'un signal dit à bande étroite. Ainsi les deux parties du spectre $S^-(f)$ et $S^+(f)$ occupent une largeur spectrale de $2\,f_m$. Mais la fréquence maximale contenue dans le signal est $f_p + f_m$.

Considérons l'exemple numérique correspondant en ordre de grandeur à une émission radiophonique en modulation d'amplitude, soit $f_m = 5$ KHz et $f_p = 100$ KHz.

Désirant réaliser l'acquisition de ce signal, la première étape consiste à déterminer la fréquence d'échantillonnage F_e nécessaire et de minimiser celle-ci autant que possible pour diminuer le nombre d'échantillons. Mais la limite inférieure est donnée par le théorème de Shannon, qui, dans cet exemple se traduit par :

$$F_e \geq 2(f_p + f_m) \qquad \text{soit} \qquad F_e \geq 210 \text{ KHz}$$

Cette limite inférieure de la fréquence d'échantillonnage serait totalement justifiée dans le cas où le signal aurait une largeur spectrale effectivement occupée correspondant à $[0,\ f_p + f_m]$. Or, dans cet exemple d'un signal à bande étroite, ce n'est pas le cas. Aussi, nous pouvons nous poser la question de savoir s'il serait possible de prendre une fréquence d'échantillonnage inférieure à la limite F_e déterminée par le théorème de Shannon. Considérons cette nouvelle fréquence F_s, dite de sous-échantillonnage, avec $F_s < F_e$. Nous allons étudier les conséquences

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

de ce sous-échantillonnage qui va obligatoirement produire l'effet néfaste du repliement.

Nous savons que l'échantillonnage se concrétise par une périodisation du spectre avec une période de répétition F_s. Comme cette fréquence F_s est inférieure à la fréquence de Shannon, le phénomène de repliement va se produire. Pour éviter ce problème et ainsi pouvoir récupérer le signal initial après échantillonnage, il faut choisir correctement cette fréquence de sous-échantillonnage (*cf.* figure 6.12).

Une première condition est le non-chevauchement du spectre $S^+(f)$ lors de la périodisation ; cette condition s'exprime par : $F_s \geq 2\, f_m$

Comme nous allons le voir, cette condition sera largement respectée. La deuxième condition est le non-chevauchement du spectre $S^-(f)$ sur le spectre $S^+(f)$ lors de la périodisation ; celle-ci s'exprime par les conditions sur les positions relatives des spectres au point A et B (*cf.* figure 6.12) :

– au point A : $-f_p + f_m + kF_s \leq f_p - f_m$

– au point B : $-f_p - f_m + (k+1)F_s \geq f_p + f_m$

Ces inégalités se résument par l'encadrement de la valeur de la fréquence de sous-échantillonnage F_s suivante :

$$\frac{2\left(f_p + f_m\right)}{k+1} \leq F_s \leq \frac{2\left(f_p - f_m\right)}{k}$$

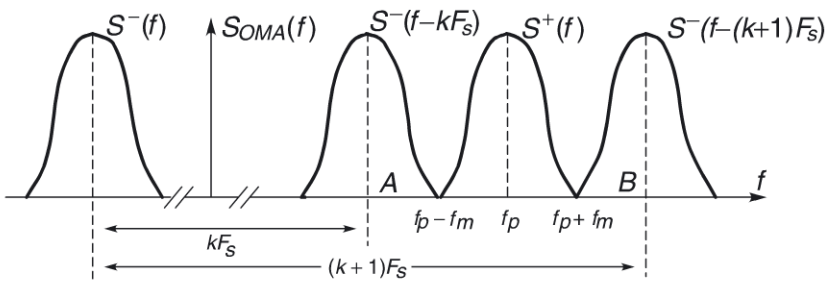

Figure 6.12 – Visualisation des conditions nécessaires pour éviter un repliement de spectre dans le cas du sous-échantillonnage.

Copyright © 2017 Dunod.

En considérant ces inégalités, la valeur maximale de k s'exprime en considérant un intervalle nul de choix de la fréquence F_s, soit :

$$k_{\max} = f_p - f_m/2\,f_m$$

On peut écrire aussi que la distance spectrale entre les deux spectres $S^-(f)$ périodisés doit être supérieure à $2\,f_m$, soit :

$$[-f_p - f_m + (k+1)F_s] - [-f_p + f_m + kF_s] \geq 2\,f_m \quad \text{ou} \quad F_s \geq 4\,f_m$$

Ainsi pour déterminer la valeur de F_s, nous avons d'une part une valeur minimale donnée par la dernière condition et ensuite un encadrement de cette valeur en fonction du paramètre k. La zone des valeurs possibles de F_s, qui permet de respecter les inégalités préalablement établies, est représentée sur la figure 6.13. Plus le nombre k sera grand et plus la fréquence de sous-échantillonnage F_s sera faible, limitant ainsi le nombre d'échantillons. Si l'on considère l'exemple numérique précédent, la valeur de k maximale est de 9 pour laquelle et nous avons l'encadrement de la valeur F_s :

$$21000\ \text{Hz} \leq F_s \leq 21110\ \text{Hz}$$

Le choix de la valeur est fixée d'une part par une fréquence proche de la fréquence limite de 20 KHz pour avoir la solution la plus performante. D'autre part il est nécessaire de réaliser un oscillateur très stable

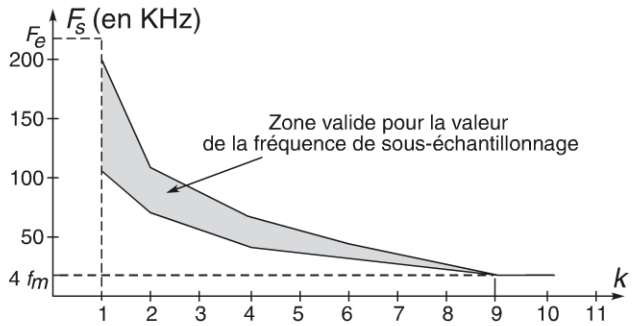

Figure 6.13 – Détermination de la valeur de la fréquence de sous-échantillonnage F_s.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

(par exemple un oscillateur à verrouillage de phase) afin d'assurer le maintien de la fréquence dans l'encadrement choisi.

6.1.4 Échantillonnage naturel et autres procédés

L'échantillonnage idéal impliquant des impulsions infiniment courtes n'est qu'approximativement réalisable. Dans la pratique, on utilisera des impulsions de durée courte mais finie. Le choix entre les divers procédés possibles se fera suivant les moyens techniques disponibles et la déformation tolérable lors de la restitution du signal.

Le signal échantillonné réel sera constitué alors d'une suite d'impulsions distantes de T_e et de largeur τ. L'amplitude de ces impulsions sera fonction du procédé d'échantillonnage utilisé (*cf.* figure 6.14) :

– **naturel** : amplitude égale à $s(t)$ pendant la durée τ ;

– **régulier** : amplitude constante et égale à $s(nT_e)$ pendant la durée τ ;

– **moyenneur** : amplitude égale à la moyenne de $s(t)$ sur l'intervalle τ.

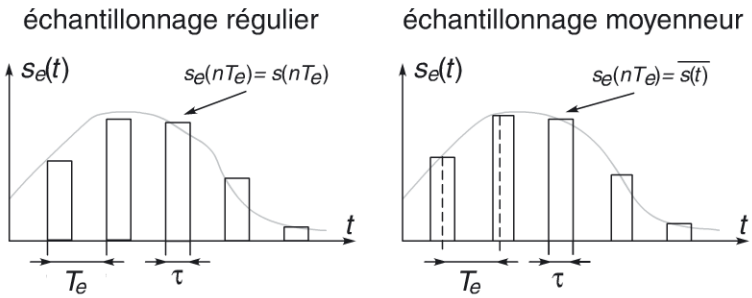

Figure 6.14 – Les divers procédés d'échantillonnage réalisables : régulier et moyenneur.

Le premier type d'échantillonnage n'est pas réalisable, il constitue simplement une étape de calcul intermédiaire nécessaire à la compréhension des deux autres procédés qui sont effectivement réalisés et utilisés. La modélisation de l'échantillonnage réel qui utilise des impulsions distantes de T_e et de largeur τ, est faite en prenant une fonction porte de largeur τ et périodisée avec une période T_e. Ce signal, appelé $i_{Te,\tau}(t)$,

Copyright © 2017 Dunod.

s'exprime mathématiquement sous la forme suivante :

$$i_{T_e,\tau}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_\tau (t - kT_e)$$

En utilisant la propriété de périodisation avec le peigne de Dirac et le produit de convolution, nous avons l'autre expression équivalente suivante :

$$i_{T_e,\tau}(t) = \Pi_\tau (t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta (t - kT_e) = \Pi_\tau (t) * \mathrm{Pgn}_{T_e}(t)$$

Le spectre de ce signal s'exprime donc par :

$$I_{T_e,\tau}(f) = \left[\tau \cdot \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau k f}\right] \cdot [F_e \cdot \mathrm{Pgn}_{F_e}(f)] = \tau \cdot \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau k f} \cdot F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_e)$$

soit :

$$I_{T_e,\tau}(f) = \tau \cdot F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\tau k F_e)}{\pi\tau k F_e} \cdot \delta(f - kF_e) \qquad (6.12)$$

a) Échantillonnage naturel

Dans le cas de l'échantillonnage naturel, l'amplitude de chaque impulsion suit la valeur de la fonction pendant l'intervalle τ. D'un point de vue représentation mathématique du signal échantillonné, nous avons le produit du signal initial par la fonction porte périodisée précédemment établie :

$$s_e(t) = s(t) \cdot i_{T_e,\tau}(t) = s(t) \cdot [\Pi_\tau (t) * \mathrm{Pgn}_{T_e}(t)] \qquad (6.13)$$

En utilisant la relation 6.11, le spectre $S_e(f)$ de $s_e(t)$ s'exprime par la relation suivante :

$$S_e(f) = S(f) * I_{T_e,\tau}(f) = S(f) * [\tau \cdot F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\tau k F_e)}{\pi\tau k F_e} \cdot \delta(f - kF_e)]$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

d'où :

$$S_e(f) = \tau \cdot F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\tau k F_e)}{\pi\tau k F_e} \cdot S(f - kF_e) \tag{6.14}$$

L'intérêt essentiel de l'étude est de savoir si cet échantillonnage dit naturel provoque une déformation du spectre par rapport à l'échantillonnage idéal qui lui permet de récupérer le spectre du signal initial par un filtre passe-bas de largeur F_e et donc de conserver la totalité de l'information contenue dans le signal initial. À partir de la relation précédente 6.13, il est facile d'obtenir la relation, liant le spectre de base du signal échantillonné $S_{e0}(f)$ et celui du signal $S(f)$, soit :

$$S_{e0}(f) = \tau \cdot F_e \cdot S(f) \tag{6.15}$$

Cette relation 6.15 montre que, dans le cas de l'échantillonnage naturel (avec une impulsion de largeur non nulle), il est possible d'obtenir le spectre du signal initial avec un filtre passe-bas idéal. La proportionnalité entre les deux spectres montre que l'échantillonnage naturel n'introduit pas de déformation. Cet échantillonnage correspond simplement à une augmentation de la durée d'observation du signal. Cet échantillonnage étant non réalisable pratiquement, nous devons étudier un cas où non seulement la durée d'observation est augmentée, mais aussi la valeur de l'échantillon est approchée sur cette durée : valeur initiale ou valeur moyenne.

b) Échantillonnage régulier ou bloqueur

Dans le cas de l'échantillonnage régulier, l'amplitude de chaque impulsion est constante et égale à l'amplitude du signal initial au temps nT_e. Ce mode correspond au cas pratique le plus souvent mis en œuvre. La représentation mathématique du signal échantillonné peut être mise sous la forme d'une suite infinie de fonctions « porte » d'amplitude égale aux échantillons du signal, soit :

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [s(kT_e) \cdot \Pi_\tau(t - kT_e)] \tag{6.16}$$

Copyright © 2017 Dunod.

Cette expression peut s'écrire sous la forme suivante :

$$s_e(t) = [s(t) \cdot \mathrm{Pgn}_{T_e}(t)] * \Pi_\tau(t) \tag{6.17}$$

En utilisant la relation 6.16, le spectre $S_e(f)$ de $s_e(t)$ s'exprime par la relation suivante :

$$S_e(f) = \left[S(f) * \left(F_e \cdot \mathrm{Pgn}_{F_e}(f)\right)\right] \cdot \left[\tau \cdot \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f}\right]$$

soit :

$$S_e(f) = \tau \cdot F_e \cdot \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - kF_e) \tag{6.18}$$

De la même manière que précédemment, le spectre initial est extrait par un filtre passe-bas de largeur F_e ; la relation, liant le spectre de base du signal échantillonné $S_{e0}(f)$ et celui du signal $S(f)$, est (*cf.* figure 6.15) :

$$S_{e0}(f) = \tau \cdot F_e \cdot \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} \cdot S(f) \tag{6.19}$$

Outre le facteur τF_e, le spectre $S_{e0}(f)$ n'est pas identique au spectre initial $S(f)$ puisque son amplitude est modulée par la fonction $\mathrm{sinc}(\tau f)$. L'échantillonnage régulier introduit donc une déformation par rapport à l'échantillonnage idéal ou naturel. Cette distorsion reste petite dans le cas où la durée de la porte d'échantillonnage est faible devant la période d'échantillonnage. Par exemple, pour une fréquence d'échantillonnage de 20 KHz et une durée de l'impulsion d'échantillonnage de 5 μs (rapport de 10), la distorsion sur le spectre à la fréquence de 1 KHz n'est que de 2 %.

c) Échantillonnage moyenneur

L'échantillonneur moyenneur donne des échantillons $s_e(kT_e)$ correspondant à la valeur moyenne de $s(t)$ prise sur la durée de l'impulsion τ. Ainsi l'échantillon k s'exprime sous la forme suivante :

$$s_e(kT_e) = \frac{1}{\tau} \cdot \int_{kT_e-\tau/2}^{kT_e+\tau/2} s(t)\,\mathrm{d}t$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

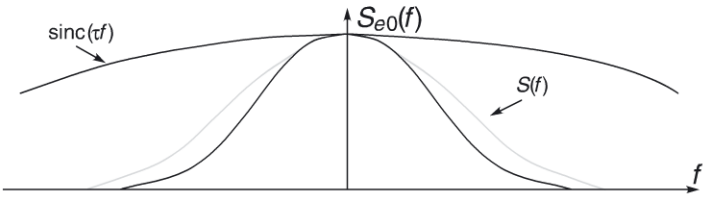

Figure 6.15 – Distorsion du spectre dans le cas d'un échantillonnage régulier ou moyenneur.

En utilisant la fonction porte, la relation précédente peut s'écrire de la façon suivante :

$$s_e(kT_e) = \frac{1}{\tau} \cdot \int_{kT_e-\tau/2}^{kT_e+\tau/2} \Pi_\tau(t - kT_e) \cdot s(t) \cdot \mathrm{d}t$$

Cette expression représente le produit de convolution de $s(t)$ et de $\Pi\tau(t)$ au temps kT_e, d'où :

$$s_e(kT_e) = \frac{1}{\tau} \cdot [\Pi_\tau(t) * s(t)] \cdot \delta(t - kT_e)$$

Le signal échantillonné complet $s_e(t)$ va donc s'exprimer sous la forme suivante :

$$s_e(t) = \frac{1}{\tau} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\Pi_\tau(t) * s(t)] \cdot \delta(t - kT_e)$$

soit :

$$s_e(t) = \frac{1}{\tau} \cdot [\Pi_\tau(t) * s(t)] \cdot \mathrm{Pgn}_{T_e}(t) \tag{6.20}$$

À partir de la relation 6.20, le spectre $S_e(f)$ de $s_e(t)$ s'obtient par transformation de Fourier en utilisant le théorème de Plancherel :

$$S_e(f) = \frac{1}{\tau} \cdot \left[\tau \cdot \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} \cdot S(f)\right] * [F_e \cdot \mathrm{Pgn}_{F_e}(f)]$$

soit :

$$S_e(f) = F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\tau(f - kF_e))}{\pi\tau(f - kF_e)} \cdot S(f - kF_e) \tag{6.21}$$

Copyright © 2017 Dunod.

De la même manière que précédemment, le spectre initial est extrait par un filtre passe-bas de largeur F_e ; la relation, liant le spectre de base du signal échantillonné $S_{e0}(f)$ et celui du signal $S(f)$, est :

$$S_{e0}(f) = F_e \cdot \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} \cdot S(f) \tag{6.22}$$

Nous retrouvons un résultat très proche de celui obtenu pour l'échantillonnage régulier. Outre le facteur F_e, le spectre $S_{e0}(f)$ n'est pas identique au spectre initial $S(f)$ puisque son amplitude est modulée par la fonction sinc($\pi\tau f$) comme pour l'échantillonnage régulier et introduit donc une déformation par rapport à l'échantillonnage idéal ou naturel (*cf.* figure 6.15).

En conclusion, il est important de remarquer que les échantillonnages bloqueur et moyenneur seront d'autant plus proches de l'échantillonnage idéal que la durée de l'impulsion d'échantillonnage sera faible devant la période du signal correspondant à la fréquence maximale contenue dans le signal échantillonné.

6.2 Quantification du signal échantillonné

6.2.1 Effet de la quantification

Quantifier une valeur x réelle quelconque, c'est remplacer cette valeur par une valeur x_q appartenant à un ensemble dénombrable de valeurs entières, suivant une certaine loi : arrondi au plus proche voisin, arrondi par défaut, etc.

Ainsi les échantillons temporels $s_e(kT_e)$, représentant les valeurs de l'amplitude de $s(t)$ aux instants kT_e, sont quantifiés pour donner des échantillons $s_{e,q}(kT_e)$. Dans le cas d'une quantification dite uniforme, l'amplitude maximale du signal est découpée en N intervalles identiques de valeur q. La valeur du signal échantillonné quantifié est définie

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

par :

$$s_{e,q}(kT_e) = N \quad \text{si} \quad Nq - q/2 \leq s_e(kT_e) \leq Nq + q/2$$

Le circuit électronique, réalisant cette fonction est un convertisseur analogique-numérique. La fonction de transfert de ce circuit, exprimant le résultat de la relation ci-dessus, est représentée dans un plan signal quantifié en fonction de l'amplitude du signal (*cf.* figure 6.16).

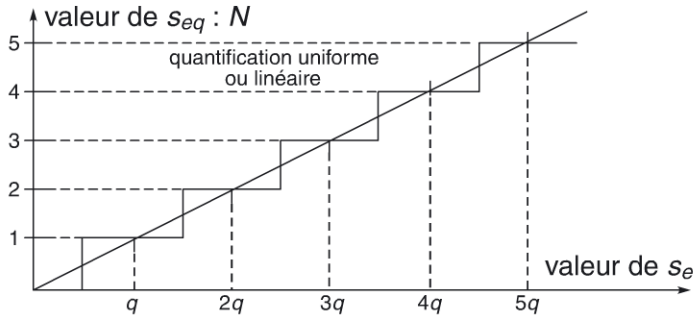

Figure 6.16 – Courbe de transfert d'un quantificateur uniforme ou linéaire.

L'erreur de quantification ε pour une quantification uniforme dans le cas de l'arrondi au plus proche voisin est égale au demi-pas de quantification $q/2$ (*cf.* figure 6.17).

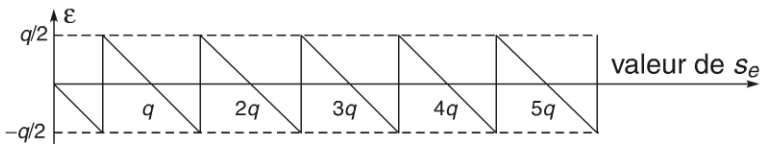

Figure 6.17 – Évolution de l'erreur de quantification associée à la courbe de transfert d'un quantificateur uniforme ou linéaire.

L'évolution de cette erreur en dent de scie montre que le processus de quantification, nécessaire pour le traitement numérique des données, introduit toujours une erreur, appelée bruit de quantification, sauf dans les cas particuliers où le signal a une amplitude de la forme :

$$s_e(kT_e) = Nq$$

Copyright © 2017 Dunod.

Si on étudie l'évolution de l'erreur de quantification $\varepsilon(t)$ en fonction du temps et pendant un temps suffisamment grand θ où l'amplitude du signal varie sur une plage importante par rapport au pas de quantification q, cette erreur peut être approximée par une droite, représentant l'équi-répartition de l'erreur :

$$\varepsilon(t) = q\frac{t}{\theta} \quad \text{pour} \quad -\frac{\theta}{2} \leq t \leq \frac{\theta}{2}$$

La valeur moyenne de $\varepsilon(t)$ est nulle sur cet intervalle, par contre la puissance moyenne est donnée par :

$$P_\varepsilon = \frac{1}{\theta}\int_{-\theta/2}^{\theta/2} \varepsilon^2(t) \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{\theta}\int_{-\theta/2}^{\theta/2} \left[q\,\frac{t}{\theta}\right]^2 \cdot \mathrm{d}t = \frac{q^2}{12}$$

Ce calcul peut être effectué en considérant que la tension de l'erreur de quantification ε, qui est une variable aléatoire, a une densité de probabilité $p(\varepsilon)$ constante et égale à $1/q$ sur l'intervalle $[-q/2, +q/2]$. Si nous calculons la valeur quadratique moyenne ou moment d'ordre 2, nous retrouvons le résultat précédent :

$$E_{sp}[\varepsilon^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \cdot p(\varepsilon) \cdot \mathrm{d}\varepsilon = \frac{1}{q}\int_{-q/2}^{q/2} \varepsilon^2 \cdot \mathrm{d}\varepsilon = \frac{q^2}{12} = P_\varepsilon$$

Ce bruit de quantification est une variable aléatoire stationnaire et ergodique. Il est important de noter que le processus de quantification est quasiment équivalent à l'addition au signal d'un bruit uniforme. Étant donné la puissance P_ε, le bruit de quantification peut être considéré comme un bruit blanc de largeur spectrale $[0, F_e/2]$. La densité spectrale est donc donnée par : $q^2/(6F_e)$.

Concernant le signal, nous allons considérer un signal sinusoïdal $s(t)$ d'amplitude maximale $V_{\max}$ et de période T. Pour un système de codage sur n bits (valeur maximale de codage $2^n - 1$), le signal sinusoïdal $s(t)$ s'exprime sous la forme suivante :

$$s(t) = V_{\max} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \text{avec} \quad V_{\max} = \frac{2^n - 1}{2}q$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

La puissance moyenne de ce signal est donc :

$$P_s = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{V_{\max}^2}{2}$$

Soit en supposant n grand ($2^n \gg 1$) :

$$P_s \approx 2^{2n-3} \cdot q^2$$

Étant donné P_s la puissance crête du système ou puissance de la sinusoïde d'amplitude maximale codable sans écrétage et P_ε la puissance du bruit de quantification, le système a une dynamique par rapport au bruit de quantification définie par :

$$D(\mathrm{db}) = 10\log_{10}\frac{P_s}{P_\varepsilon} = 6,02n + 1,76$$

On peut ainsi remarquer que rajouter 1 bit revient à augmenter la dynamique de 6 dB. En conclusion, on choisira le pas de quantification q en fonction de la précision désirée lors de la conversion et le nombre de bits n en fonction de la dynamique.

6.2.2 Lois de compression et expansion du signal

L'erreur relative due à la quantification n'est pas constante le long de la courbe de transfert, c'est-à-dire suivant la valeur de la grandeur quantifiée. Cette erreur, égale à $q/s_{e,q}$, est très faible pour des valeurs grandes de $s_{e,q}$ et devient très importante pour des valeurs faibles : 100 % pour $s_{e,q} = q$. Pour égaliser cette erreur, il est possible de réaliser un codage non linéaire ou un codage à erreur constante, en faisant précéder la quantification du signal d'une « compression » du signal dans le sens analogique-numérique et d'une « expansion » dans le sens numérique-analogique.

Dans le cas des signaux de la parole, deux lois sont utilisées : la loi appelée μ aux États-Unis et la loi dénommée **A** en Europe, normalisée par le CCITT (Comité Consultatif International Télégraphique et Téléphonique). Les courbes correspondant à la loi A sont représentées sur la

Copyright © 2017 Dunod.

figure 6.18. Les circuits qui réalisent ces fonctions s'appellent des **compandeurs** et les circuits qui réalisent l'échantillonnage, la compression, l'expansion et aussi la quantification s'appellent des **codecs**.

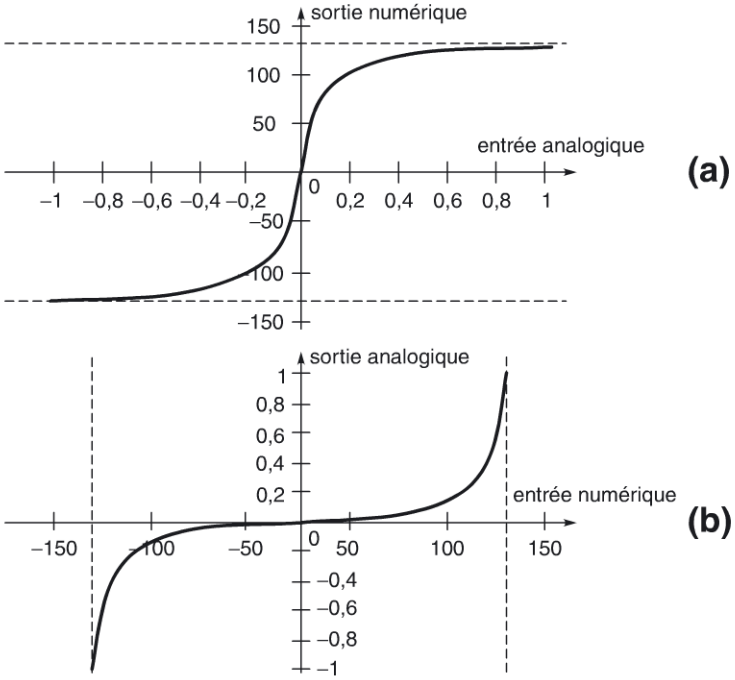

Figure 6.18 – Lois A de compression et d'expansion. Loi de compression (a) : sortie numérique variant de –128 à +128 en fonction de l'entrée analogique variant de –1 à +1. Loi d'expansion (b) : sortie analogique variant entre –1 et +1 en fonction de l'entrée numérique variant de –128 à +128.

6.3 Restitution du signal

6.3.1 Problématique

La restitution du signal a pour but de redonner un signal continu temporellement à partir de valeurs discrètes connues à des instants kT_e, T_e étant la période d'échantillonnage. Pour reconstituer la continuité du signal, il faut effectuer une **interpolation** entre deux instants de dis-

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

crétisation. Cette interpolation sera précédée du système permettant de transformer un nombre binaire représentant l'amplitude d'un signal à un instant donné en une valeur continue en amplitude, procédé inverse de la quantification. Il est important de remarquer que, dans ce cas, la transformation du code numérique (ensemble fini de valeurs) en une valeur analogique ne produit aucune erreur sur le signal contrairement au processus de quantification.

À partir des échantillons $V_s(n)$, ce circuit, appelé convertisseur numérique-analogique, donne un signal analogique $V_s(t)$ (*cf.* figure 6.19).

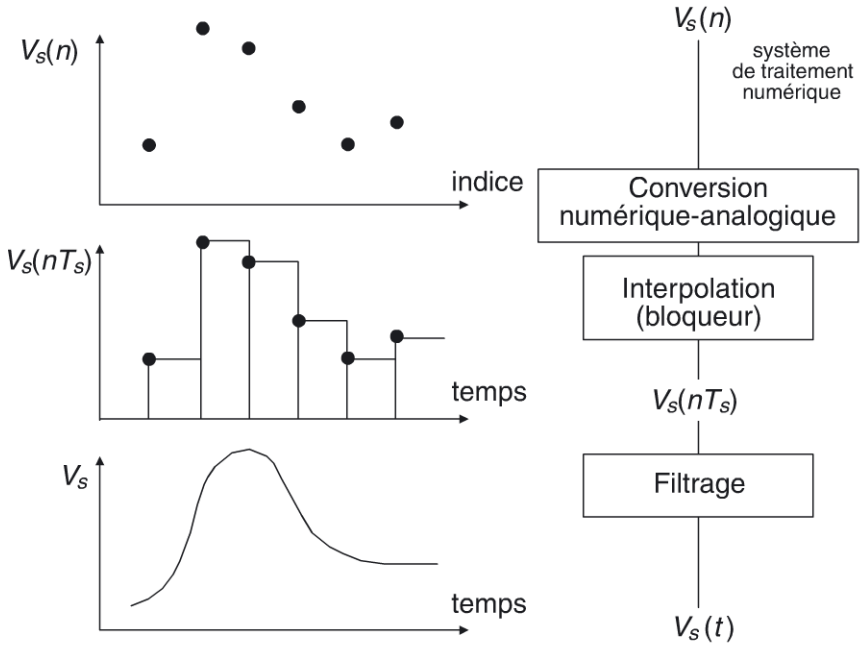

Figure 6.19 – Chaîne de restitution d'un signal échantillonné.

Mais on souhaite une restitution plus continue qui puisse représenter fidèlement la forme analogique du signal, telle qu'elle aurait été obtenue avec un système de traitement analogique. Aussi on procède à une interpolation suivie d'un filtrage. Le rythme de la restitution, définie par la période T_s, est bien entendu fonction de la période d'échantillonnage T_e du signal.

Copyright © 2017 Dunod.

Cette question de la restitution peut se poser sous la même forme que celle étudiée au paragraphe 6.1.1. Connaissant le spectre du signal échantillonné, la restitution consiste à extraire de ce spectre le spectre de base à l'aide d'un filtrage fréquentiel ou d'un calcul équivalent sur les échantillons du signal.

6.3.2 Interpolation idéale

L'interpolation parfaite consiste à utiliser l'interpolation de Shannon. En effet la relation 6.10, démontrée au paragraphe 6.1.2, permet d'obtenir le signal initial $s(t)$ avec les seuls échantillons $s(kT_e)$ aux instants kT_e :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \frac{\sin(\pi F_e (t - kT_e))}{\pi F_e (t - kT_e)}$$

Cette méthode consiste à effectuer la somme des fonctions $\mathrm{sinc}(x)$ relatives à chaque point de l'échantillonnage, en les pondérant de la valeur de l'amplitude de ces points. Cette interpolation idéale exprime la reconstitution d'un signal analogique de spectre borné à partir du signal échantillonné suivant la base constituée par la famille de fonctions (*cf.* figure 6.20) :

$$\left\{ \frac{\sin(\pi F_e (t - kT_e))}{\pi F_e (t - kT_e)} \; ; \quad \text{avec} \quad k \in Z \right\}$$

Mais l'interpolation idéale en temps réel est difficilement réalisable, car la formule d'interpolation précédente ne satisfait pas à la condition de causalité, en effet, comme nous l'avons vu cette interpolation correspond au filtrage par une fonction fréquentielle de type porte (filtre idéal non réalisable).

Malgré cette difficulté théorique, cette interpolation est utilisée dans les applications nécessitant une grande qualité de restitution en limitant la sommation : oscilloscopes numériques de haute gamme ou restitution des signaux sonores issus des disques CD-audio (*cf.* exemple du paragraphe 6.3.6).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

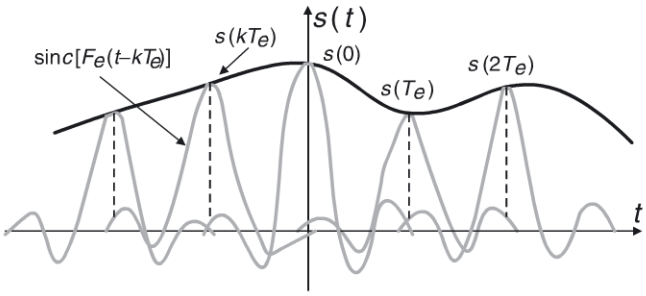

Figure 6.20 – Reconstitution quasi parfaite d'un signal échantillonné.

6.3.3 Interpolation linéaire

Le problème inverse consiste à considérer que le lissage du signal crénelé sera effectué par un filtrage passe-bas simple du 1e ou 2e ordre qui revient à réaliser en première approximation une interpolation linéaire. Cette hypothèse étant faite, il s'agit alors de déterminer la distance minimale qui doit séparer dans le temps deux échantillons successifs pour que, à partir de ces points, on puisse reconstituer « correctement » le signal au moyen d'une interpolation linéaire. Pour perdre le moins possible d'information contenue dans le signal, il faut augmenter la cadence d'échantillonnage par rapport à la fréquence théorique de Shannon, c'est-à-dire sur-échantillonner le signal. C'est une pratique assez coûteuse, car elle conduit à un accroissement important des échantillons à traiter.

La fréquence d'échantillonnage ou de sur-échantillonnage va dépendre à la fois de la méthode d'interpolation et de l'erreur que l'on tolère sur le signal reconstitué à partir des échantillons. Dans le cas de l'interpolation linéaire simple (identique à l'opération que l'on réalise lorsque l'on joint les points expérimentaux pour obtenir un graphique continu), l'erreur sur le signal $s(t)$ par rapport au signal reconstitué $s_r(t)$ est :

$$\varepsilon = \frac{s(t) - s_r(t)}{s(t)}$$

Copyright © 2017 Dunod.

Prenons l'exemple d'un signal sinusoïdal pur de période T_0 ; cette erreur est maximale pour les sommets de la fonction, c'est-à-dire pour $t = T_0/4$, et avec deux points échantillonnés de part et d'autre de ce sommet (*cf.* figure 6.21). Le point que l'on cherche à interpoler est $s(T_0/4) = 1$.

Étant donné une période d'échantillonnage de T_e, les points échantillonnés $s_r(t)$ de part et d'autre du sommet ont une amplitude identique égale à :

$$s_r\left(\frac{T_0}{4} \pm \frac{T_e}{2}\right) = \sin\left[\frac{2\pi}{T_0} \cdot \left(\frac{T_0}{4} \pm \frac{T_e}{2}\right)\right]$$

Donc, l'erreur ε est donnée par :

$$\varepsilon = 1 - \sin\left[\frac{2\pi}{T_0} \cdot \left(\frac{T_0}{4} - \frac{T_e}{2}\right)\right] = 1 - \cos\left[\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_e}{2}\right]$$

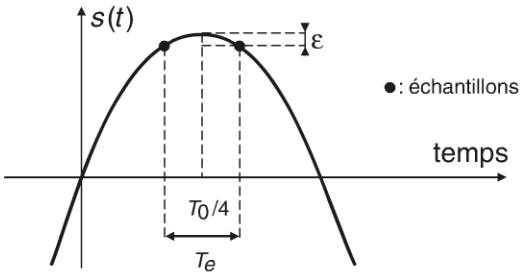

Figure 6.21 – Erreur maximale dans le cas d'une interpolation linéaire d'un signal sinusoïdal échantillonné.

En utilisant le développement de la fonction cos au premier ordre ($\cos(x) = 1 - x^2/2$), il vient :

$$\varepsilon = \frac{\pi^2}{2} \cdot \left(\frac{T_e}{T_0}\right)^2$$

Il est intéressant d'exprimer ce résultat sous la forme de la valeur minimale de la fréquence d'échantillonnage F_e à utiliser pour un signal

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

de fréquence donnée F_0 pour obtenir une erreur inférieure à ε, soit :

$$F_e \geq F_0 \frac{2,2}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Si on admet une erreur de 1 %, la fréquence d'échantillonnage doit être $22F_0$. Ainsi pour obtenir une qualité de reconstitution correcte, il est nécessaire d'utiliser un sur-échantillonnage de 11 fois supérieur à la fréquence d'échantillonnage donnée par le théorème de Shannon. Il est très important de noter que, pour réaliser une restitution correcte, sans avoir recours à un filtrage très fort (proche du filtrage idéal), une solution consiste donc à prendre une fréquence d'échantillonnage beaucoup plus grande que la fréquence d'échantillonnage limite du théorème de Shannon.

6.3.4 Restitution par bloqueur

La restitution par bloqueur, illustrée sur la figure 6.19, correspond, d'un point de vue représentation mathématique, à l'échantillonnage régulier ou bloqueur dans le cas particulier où la durée de l'impulsion τ est égale à T_e (*cf.* paragraphe 6.1.4). Par conséquent, le spectre du signal en sortie du bloqueur est donné par la relation suivante (*cf.* équation 6.18) :

$$S(f) = \frac{\sin(\pi T_e f)}{\pi T_e f} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - kF_e)$$

Le spectre initial du signal échantillonné est déformé de façon importante par la fonction sinc de pseudo-période F_e (*cf.* figure 6.22). Aussi pour isoler le spectre de base, correspondant à $k = 0$, il n'est plus nécessaire d'avoir un filtre idéal à front raide car la déformation du spectre par le système bloqueur atténue déjà fortement les spectres latéraux.

Cette déformation conduit à une atténuation du spectre d'autant plus importante que le produit $T_e f_m$ sera plus grand avec T_e durée des paliers constants et f_m la fréquence maximum du signal initial (*cf.* tableau 6.1). On retrouve encore une règle identique au cas précédent de l'interpolation linéaire : la déformation (0,14 db) devient négligeable si on

Copyright © 2017 Dunod.

considère une fréquence d'échantillonnage supérieure à 10 fois la fréquence maximale du signal.

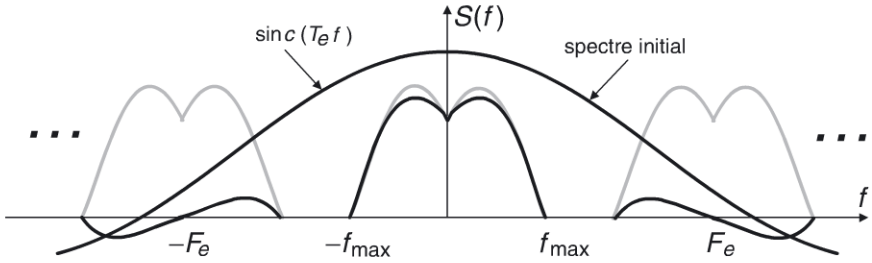

Figure 6.22 – Déformation du spectre du signal obtenu par restitution par bloqueur.

Tableau 6.1 – Valeur de l'affaiblissement en db en fonction du produit $T_e f_m$.

Produit $T_e f_m$	Affaiblissement (en db) : $20 \log \left(\frac{\sin(\pi T_e f_m)}{\pi T_e f_m} \right)$
0,1	0,14
0,2	0,58
0,3	1,33
0,4	2,42
0,5	3,92 ($f_m = F_e/2$)
0,7	9,69 ($f_m > F_e/2$)

6.3.5 Filtre de restitution

Le filtre de restitution sera calculé de la même manière que le filtre anti-repliement étudié au paragraphe 6.1.3. Pour une atténuation désirée A entre la dernière composante du signal à f_m et la première composante du spectre à éliminer à $F_e - f_m$, la pente du filtre p, en db/octave, est (*cf.* équation 6.11) :

$$p = \frac{A \log 2}{\log \left[\frac{F_e - f_{\max}}{f_{\max}} \right]} = \frac{A \log 2}{\log (n-1)}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

Pour le calcul des caractéristiques du filtre, il est nécessaire de tenir compte des atténuations du spectre obtenu après interpolation ou blocage comme nous l'avons étudié dans le paragraphe précédent.

Considérons une restitution avec bloqueur pour un signal de fréquence maximale 10 KHz et une fréquence de restitution (échantillonnage) de 40 KHz ($F_e = 4\,f_m$). Soient les conditions imposées suivantes : le filtrage passe-bas désiré doit atténuer au maximum de 1 db à la fréquence maximale f_m du signal et d'au moins 50 db pour la fréquence à éliminer $F_e - f_m$. Comme nous l'avons vu, la restitution avec bloqueur atténue déjà le spectre par la fonction sinc, soit :

– à f_m : $\text{sinc}(1/4) = 0,9$ ou $-0,9$ db

– à $F_e - f_m$: $\text{sinc}(3/4) = 0,3$ ou $-10,5$ db

En conséquence, le filtre de restitution doit introduire un affaiblissement au plus de 0,1 db à f_m et d'au moins 39,5 db à $F_e - f_m$, soit une atténuation A de 39,4 db. En appliquant la relation précédente, la pente du filtre est :

$$p = \frac{39,4 \log 2}{\log 3} \approx 24 \text{ db/octave}$$

Nous obtenons ainsi un filtre de restitution du 4e ordre. Si nous n'avions pas pris en compte l'atténuation due à l'interpolation par bloqueur, l'atténuation de 49 db nécessaire aurait conduit à mettre en place un filtre de pente $p \approx 30$ db/octave, soit un filtre du 5e ordre.

En conclusion, nous pouvons remarquer que deux paramètres ont une influence prépondérante sur la qualité de la restitution : la fréquence d'échantillonnage utilisée et les caractéristiques du filtre de restitution. La fréquence d'échantillonnage doit être la plus petite possible pour des raisons de limitation du nombre d'échantillons, mais par contre l'augmentation de la fréquence d'échantillonnage ou sur-échantillonnage permet de s'affranchir de la réalisation d'un filtre complexe. Comme nous le verrons dans l'exemple du paragraphe suivant, un compromis entre ces deux paramètres est la solution la plus efficace.

Copyright © 2017 Dunod.

6.3.6 Restitution par sur-échantillonnage

Un exemple de restitution de signaux numériques avec sur-échantillonnage est donné par la diffusion des signaux audio enregistrés sur un support disque optique : CD audio (Compact Disk). La chaîne d'enregistrement des signaux sonores sur disques optiques est représentée sur la figure 6.23. La fréquence d'échantillonnage F_e des signaux enregistrés a été fixée, par normalisation internationale, à 44,1 KHz. La quantification du signal est réalisée sur 16 bits. Par un filtre anti-repliement, le signal enregistré est limité à la fréquence de $F_m = 20$ KHz. Le signal, numérisé et enregistré sur le support CD, est composé d'échantillons, correspondant à un temps de mesure T_e de $22,68\ \mu$s ($T_e = 1/F_e$), avec un spectre périodique de période F_e (*cf.* figure 6.24).

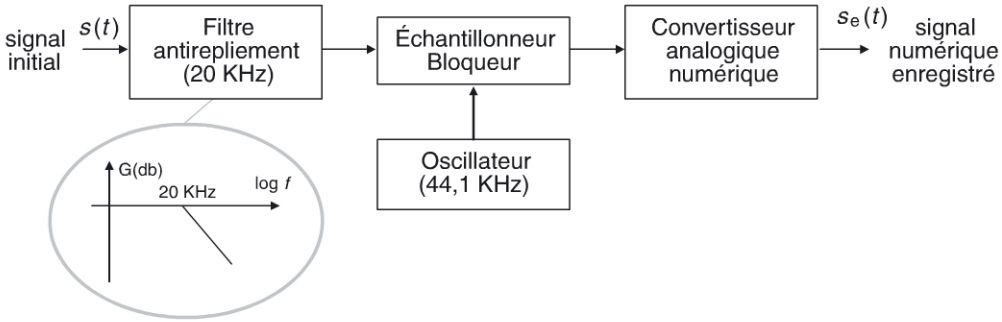

Figure 6.23 – Chaîne d'enregistrement d'un signal audio sur disque optique.

Les caractéristiques de cette numérisation étant données, la reproduction de ce signal doit mettre en œuvre d'une part une conversion numérique-analogique et d'autre part une sortie de cette valeur à une fréquence permettant une restitution la plus correcte possible. L'analyse de cette correction de la restitution est faite sur la base d'un signal de sortie identique au signal d'entrée qui a été enregistré. En particulier le spectre du signal de sortie doit être identique ou proche du spectre du signal d'entrée

Pour obtenir ce résultat, la première approche consiste à utiliser une fréquence de restitution identique à la fréquence d'échantillonnage. Puis

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

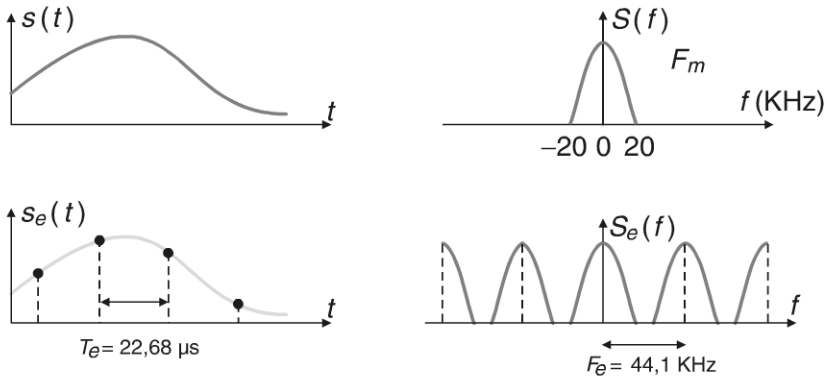

Figure 6.24 – Caractéristiques temporelle et spectrale du signal sonore initial à enregistrer et du signal enregistré sur le support CD-audio.

ensuite, pour éliminer les spectres « parasites » dus à la périodisation, il faut mettre en œuvre un filtre permettant d'extraire le spectre du signal initial (*cf.* figure 6.25). Ce procédé correspond au principe de l'interpolation idéale. Dans cet exemple, le calcul de la pente du filtre passe-bas à réaliser est obtenu à partir de la relation 6.11 :

$$p = \frac{A \log 2}{\log\left[\dfrac{F_e - F_m}{F_m}\right]} = \frac{40 \log 2}{\log\left(\dfrac{24,1}{20}\right)} = 148,7 \text{ db/octave}$$

Ce filtre passe-bas correspond à un filtre du 25e ordre, c'est-à-dire un filtre extrêmement difficile à réaliser (oscillations, gain non constant sur la bande passante...). En effet cette première méthode est la traduction directe de la relation théorique de reconstitution exacte du théorème d'échantillonnage (*cf.* équation 6.10). Le filtre passe-bas idéal, représenté par la porte de largeur $F_e/2$, est remplacé par un filtre passe-bas de fréquence de coupure $F_e/2$ et avec une pente aussi grande que possible.

Pour contourner cette difficulté, la technique du sur-échantillonnage va être mise en œuvre. Le principe du sur-échantillonnage est donc de prélever des échantillons du signal à une cadence F'_e supérieure à la

Copyright © 2017 Dunod.

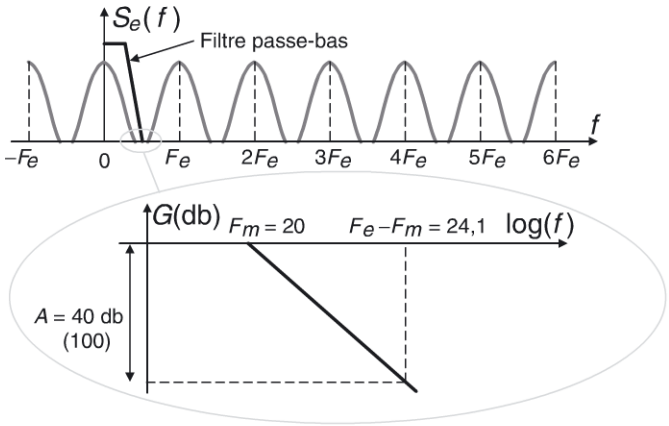

Figure 6.25 – Restitution du signal audio par extraction du spectre initial avec un filtre passe-bas : équivalence de l'interpolation idéale.

limite de Shannon F_e : $F'_e > F_e$. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, ce sur-échantillonnage du signal permet ensuite de réaliser beaucoup plus facilement la reconstruction du signal.

Dans l'exemple qui nous intéresse ici, il n'est pas possible de sur-échantillonner le signal puisque les données sont déjà produites et disponibles sur un support fixé. Dans ce cas, la méthode du sur-échantillonnage consiste à **calculer** des échantillons intermédiaires entre deux échantillons réels du signal afin d'obtenir un signal numérique correspondant à une fréquence d'échantillonnage plus grande. Les points étant ainsi plus rapprochés, la reconstitution est alors grandement facilitée. Le calcul des points intermédiaires est basé sur la relation théorique 6.10. Dans l'exemple des signaux audio sur CD, le sur-échantillonnage est réalisé avec une fréquence quadruple : trois échantillons sont calculés entre deux échantillons initiaux connus.

L'ensemble des échantillons ainsi obtenus, échantillons initiaux et échantillons calculés, forme le nouveau signal sur-échantillonné $s'_e(t)$, ayant quatre fois plus d'échantillons. Ce signal correspond à un échantillonnage du signal initial $s(t)$ qui aurait été réalisé avec la fréquence d'échantillonnage F'_e ($F'_e = 4\,F_e$). Aussi le spectre $S'_e(f)$ de ce signal sur-échantillonné $s'_e(t)$ est composé du spectre $S(f)$ périodisé avec

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

la fréquence F'_e (*cf.* figure 6.26). Donc, pour obtenir l'expression du spectre $S'_e(f)$ à partir du spectre $S_e(f)$, il suffit d'utiliser un filtre fréquentiel composé d'une porte de largeur F_e et périodisée avec la fréquence F'_e. Soit :

$$S'_e(f) = S_e(f) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_{F_e}(f - kF'_e)$$

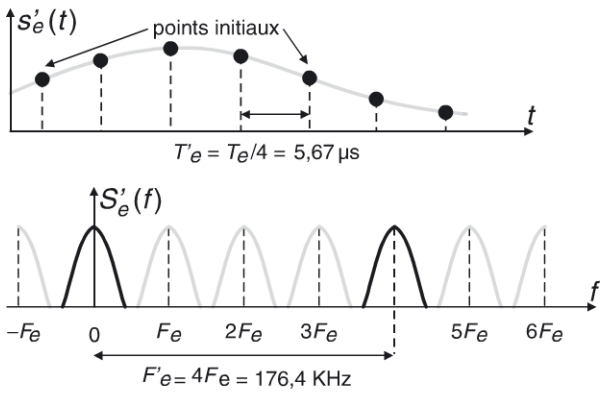

Figure 6.26 – Réalisation d'un sur-échantillonnage quadruple et son effet sur le spectre du signal résultant.

Cette équation peut s'exprimer sous la forme équivalente suivante :

$$S'_e(f) = S_e(f) \cdot \left[\Pi_{F_e}(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF'_e) \right] = S_e(f) \cdot [\Pi_{F_e}(f) * \mathrm{Pgn}_{F'_e}(f)]$$

Cette relation va permettre d'établir la relation exacte de calcul des échantillons intermédiaires en prenant la transformée de Fourier de la relation précédente :

$$s'_e(t) = s_e(t) \cdot \left[F_e \frac{\sin(\pi F_e t)}{\pi F_e t} * T'_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT'_e) \right]$$

En utilisant la relation ($F'_e = 4F_e$), il vient :

$$s'_e(t) = s_e(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi} \delta(t - kT_e/4)$$

Copyright © 2017 Dunod.

En utilisant la relation 6.1 définissant $s_e(t)$, l'échantillon de rang k est calculé à partir de la relation suivante :

$$s'_e\left(kT'_e\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_e(nT_e) \cdot \frac{\sin\left(\pi(k/4 - n)\right)}{\pi(k - 4n)}$$

La seule difficulté de cette technique réside dans le calcul des échantillons entre deux échantillons réels. La relation utilisée, correspondant à une somme infinie, a été tronquée et limitée à 48 valeurs de chaque côté de l'échantillon calculé :

$$s'_e\left(kT'_e\right) = \sum_{n=-48}^{+48} s_e(nT_e) \cdot \frac{\sin\left(\pi(k/4 - n)\right)}{\pi(k - 4n)}$$

Pour réaliser ce calcul, la fonction sinc(x) a été discrétisée sur 96 valeurs symétriquement par rapport à l'axe des ordonnées, donc sur une durée de $96T'_e = 544,2\ \mu$s. Cette durée correspond à 12 pseudo-périodes T_e de cette fonction. Les coefficients de la relation sont quantifiés sur 12 bits et ensuite stockés en mémoire statique EPROM.

Enfin pour éliminer les spectres « parasites » dus à la périodisation, il faut mettre en œuvre un filtre permettant d'extraire le spectre du signal initial (*cf.* figure 6.27). Dans cet exemple, le calcul de la pente du filtre

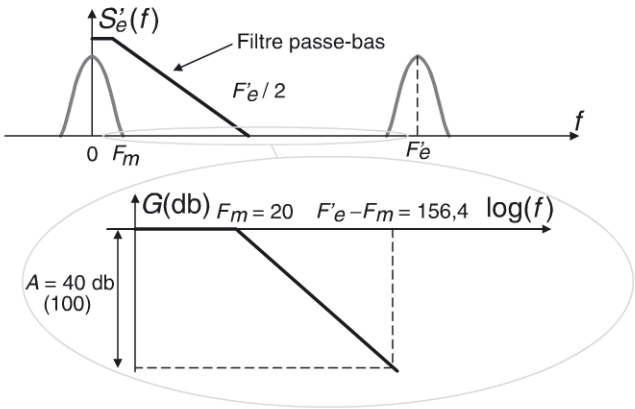

Figure 6.27 – Restitution du signal audio par extraction du spectre initial avec un filtre passe-bas : technique du sur-échantillonnage.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

passe-bas à réaliser est obtenu à partir de la relation 6.11 ; soit pour une atténuation A de 100 (40 db), il vient :

$$p = \frac{A \log 2}{\log\left[\dfrac{F'_e - F_m}{F_m}\right]} = \frac{40 \log 2}{\log\left(\dfrac{156,4}{20}\right)} = 13,5 \text{ db/octave}$$

Ce filtre passe-bas correspond à un filtre du 2e ordre, c'est-à-dire un filtre extrêmement facile à réaliser par rapport au cas précédent. Cette technique est donc celle mise en œuvre dans l'ensemble des lecteurs de CD audio actuellement utilisés.

Copyright © 2017 Dunod.

7 ANALYSE SPECTRALE DES SIGNAUX DISCRETS

7.1 LES DIFFÉRENTES REPRÉSENTATIONS FRÉQUENTIELLES

L'analyse fréquentielle des signaux apporte une information supplémentaire importante. Pour les différents cas de signaux, classés selon les caractéristiques continu ou discret et périodique ou transitoire, la représentation fréquentielle possède des propriétés particulières équivalentes continue ou discrète et périodique ou non périodique (*cf.* figure 7.1). De plus les méthodes, utilisées pour calculer ces représentations spectrales, ne sont pas les mêmes selon ces différents types de signaux (*cf.* tableau 7.1).

En effet, le spectre d'un signal continu est non périodique, qu'il soit périodique (cas **1**) ou non (cas **2**), il est obtenu à partir du développement en série de Fourier pour le cas 1 et de la transformée de Fourier ou de l'intégrale de Fourier pour le cas 2. Le spectre d'un signal discret et non périodique (cas **3**) est continu et périodique et obtenu à partir de l'intégrale de Fourier. Par contre, le calcul du spectre d'un signal périodique et discret (cas **4**) utilise une nouvelle transformée : la transformée de Fourier discrète ou TFD.

D'une façon générale, si l'on désire avoir une représentation spectrale numérique (calcul par ordinateur), le calcul des raies spectrales implique une discrétisation en fréquence, ce qui a pour conséquence de rendre le signal temporel périodique et discret. Le calcul de façon

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

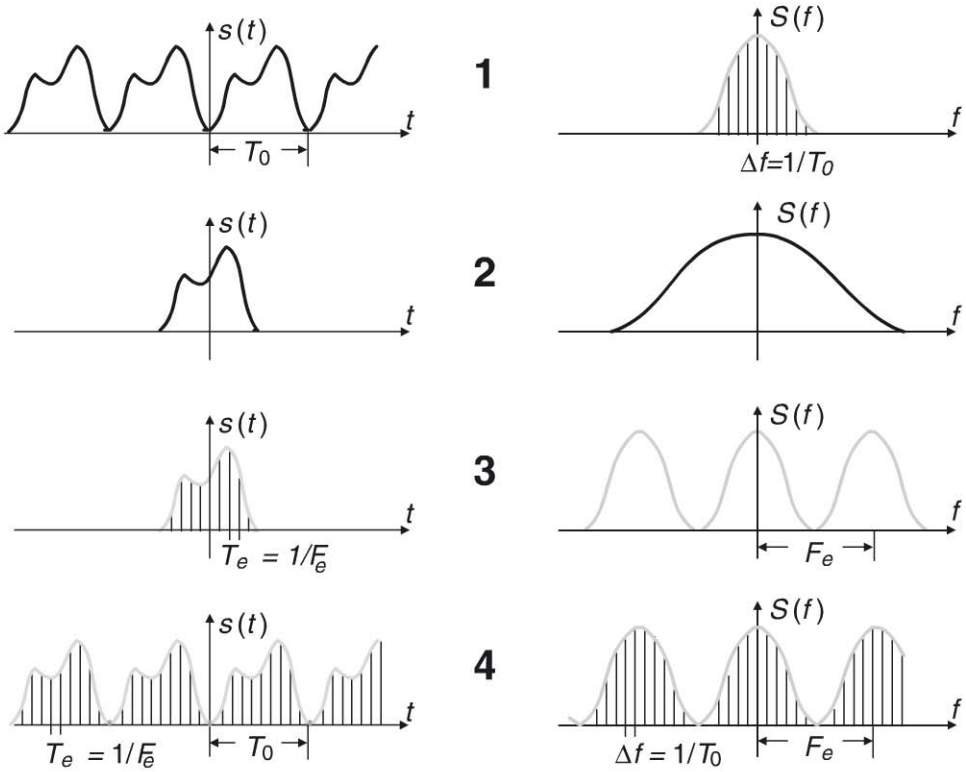

Figure 7.1 – Représentations temporelles et spectrales des signaux classés selon leurs caractéristiques : périodiques ou non périodiques, continus ou discrets.

pratique est limité à une tranche du signal, ce qui revient à des transformées identiques pour un signal non périodique et un signal périodique, c'est-à-dire que le signal transitoire doit être considéré comme périodiquement répété en dehors de son domaine d'existence.

7.2 Transformée de Fourier discrète

7.2.1 Définition

Dans le but de calculer la transformée de Fourier d'un signal $s(t)$ à l'aide d'un ordinateur, celui-ci n'ayant qu'un nombre limité de mots de taille

Copyright © 2017 Dunod.

Tableau 7.1 – Correspondance entre les caractéristiques des signaux et des représentations spectrales associées.

Signal	Spectre	
	Méthode de calcul	*Caractéristiques*
1 - continu et périodique	Série de Fourier	Discret et non périodique
2 - continu et non périodique	Intégrale de Fourier	Continu et non périodique
3 - discret et non périodique	Intégrale de Fourier	Continu et périodique
4 - discret et périodique	Transformée de Fourier discrète (TFD)	Discret et périodique

finie, on est amené à discrétiser le signal (échantillonnage) et à tronquer temporellement ce signal. On obtient ainsi une suite de N termes représentée par :

$$s_{e,\Pi}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e) \tag{7.1}$$

Appelons s_k les valeurs du signal $s_{e,\Pi}(t)$ aux instants kT_e. Le spectre $S_{e,\Pi}(f)$ de ce signal échantillonné limité à N termes $s_{e,\Pi}(t)$ est donné sous la forme de N éléments de valeurs S_m espacés de F_e/N suivant une expression identique :

$$S_{e,\Pi}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} S_m \cdot \delta\left(f - m\frac{F_e}{N}\right) \tag{7.2}$$

De la même façon que la transformée de Fourier $S(f)$ du signal analogique $s(t)$ s'exprime sous la forme :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi ft} \cdot \mathrm{d}t$$

On appelle Transformée de Fourier Discrète (TFD ou DFT : *Discrete Fourier Transform*) d'un signal défini par N échantillons s_k, la suite de

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

N termes S_m définie par :

$$S_m = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi \frac{k \cdot m}{N}} \tag{7.3}$$

La transformée de Fourier discrète réalise la correspondance entre deux suites de N termes (*cf.* figure 7.2).

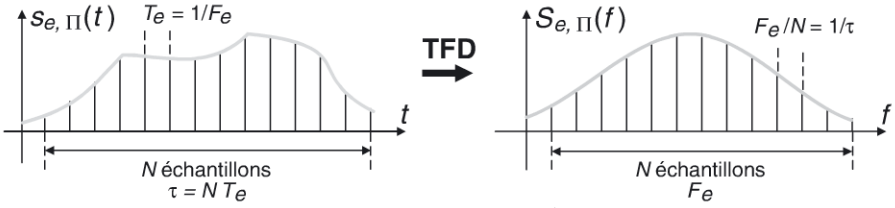

Figure 7.2 – Transformée de Fourier discrète.

Si les N échantillons ont été prélevés avec une fréquence d'échantillonnage F_e ($F_e = 1/T_e$), la durée du signal échantillonné, sur laquelle a été calculée la transformée de Fourier discrète, est donnée par :

$$\tau = N \cdot T_e = \frac{N}{F_e} \tag{7.4}$$

En conséquence, le spectre de ce signal échantillonné, composé aussi de N termes, est calculé sur un domaine fréquentiel $[0, F_e]$ avec une précision ou distance fréquentielle entre points égale à :

$$\Delta f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{N \cdot T_e} = \frac{F_e}{N} \tag{7.5}$$

De même que pour la transformée de Fourier d'un signal continu, on peut définir une transformation inverse qui s'écrit :

$$s_{e,\Pi}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot \delta(t - kT_e) \quad \text{avec } s_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} S_m \cdot \mathrm{e}^{j2\pi \frac{k \cdot m}{N}} \tag{7.6}$$

Copyright © 2017 Dunod.

7.2.2 Transformée de Fourier et TFD

Étant donné la définition de la transformée de Fourier discrète ou TFD que nous venons d'introduire, il est intéressant de répondre à deux questions concernant la relation entre la transformée de Fourier et la TFD :

– d'une part, le signal échantillonné de N points étant considéré comme un signal continu transitoire, quelle est la transformée de Fourier de ce signal ?
– d'autre part, connaissant la transformée de Fourier d'un signal continu, quelle est la relation entre les points de la transformée de Fourier discrète de ce signal échantillonné et les valeurs de la transformée de Fourier à ces mêmes fréquences ?

a) Transformée de Fourier du signal échantillonné tronqué et la TFD

Soit un signal $s(t)$, échantillonné à la fréquence F_e ($F_e = 1/T_e$) et tronqué par une porte de largeur τ ($\tau = NT_e$) qui prélève N points d'amplitude s_k de ce signal, soit :

$$s_{e,\Pi}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot \delta(t - kT_e)$$

La transformée de Fourier de ce signal est donc donnée par :

$$S_{e,\Pi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot \delta(t - kT_e) \right] \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi ft} \cdot \mathrm{d}t$$

Soit le résultat suivant :

$$S_{e,\Pi}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi fkT_e}$$

Or pour obtenir la transformée de Fourier discrète, il faut échantillonner dans le domaine fréquentiel par pas de $1/\tau (1/\tau = F_e/N)$, soit :

$$S_{e,\Pi,e}(f) = S_{e,\Pi}(f) \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - m/\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_{e,\Pi}(m/\tau) \cdot \delta(f - m/\tau)$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Cette expression doit être tronquée, puisque le nombre des échantillons de la représentation spectrale est limité à N :

$$S_{e,\Pi,e,\Pi}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} S_{e,\Pi}(m/\tau) \cdot \delta(f - m/\tau)$$

Nous avons bien obtenu la relation de définition de la transformée de Fourier discrète (*cf.* équation 7.3) :

$$S_{e,\Pi,e,\Pi}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi \frac{km}{N}} \right] \cdot \delta(f - m/\tau)$$

b) Transformée de Fourier et la TFD

Considérons un signal $s(t)$ et sa transformée de Fourier $S(f)$. À la suite $s(kT_e) = s_k$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ correspondent les échantillons de la transformée de Fourier discrète S_m avec $m \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ par la relation 7.3 :

$$S_m = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi \frac{k \cdot m}{N}}$$

La question, qui se pose, est donc le lien qui existe entre les valeurs de $S(f)$ aux fréquences mF_e/N et S_m pour $m \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. En posant $\tau = NT_e$, dans le cas où le signal est périodique de période τ, à spectre borné $F_{\max}$, et étant donné que :

– la largeur de la troncature temporelle est égale à la période τ ;

– le théorème de Shannon doit être respecté : $F_e \geq 2F_{\max}$

Il y a coïncidence, à un facteur multiplicatif près, entre $S(mF_e/N)$ et S_m :

$$S_m = \frac{\tau}{T_e} \cdot S\left(m\frac{F_e}{N}\right) = N \cdot S\left(m\frac{F_e}{N}\right)$$

Ce résultat provient essentiellement du fait que la fonction sinus cardinal (sinc), qui agit sur le spectre en le déformant, ne va pas produire cet effet car elle s'annule pour toutes les raies du spectre en $1/\tau$.

Copyright © 2017 Dunod.

c) Interprétation du résultat de la TFD

Après le calcul de la transformée de Fourier discrète, on obtient une suite de N termes. Comme nous l'avons vu précédemment, les N échantillons temporels ayant été prélevés avec une fréquence d'échantillonnage F_e ($F_e = 1/T_e$) et sur une durée τ ($\tau = N/T_e$), le spectre, composé de N termes, est calculé sur un domaine fréquentiel $[0, F_e]$ avec une précision ou distance fréquentielle entre points égale à $\Delta f = F_e/N$.

L'interprétation des N échantillons S_m obtenus peut se faire en s'appuyant sur une analogie avec la représentation spectrale obtenue avec le développement en série de Fourier. Chaque échantillon peut être considéré comme un « harmonique » du spectre du signal. D'autre part le calcul est réalisé avec un indice positif des échantillons variant entre $[0, N-1]$ qui correspond à un domaine fréquentiel $[0, F_e[$. Mais il serait plus exact de la représenter sur un intervalle $]-F_e/2, F_e/2]$. Ainsi l'interprétation des échantillons est présentée sur le tableau 7.2.

Tableau 7.2 – Interprétation des échantillons calculés par TFD.

Échantillons	Fréquence $[0, F_e]$	Fréquence $[-F_e/2, F_e/2]$	Interprétation
S_0	0	0	Composante continue
S_1	Δf	Δf	Fondamentale ou 1re harmonique
S_2	$2\Delta f$	$2\Delta f$	2e harmonique
S_3	$3\Delta f$	$3\Delta f$	3e harmonique
...			
$S_{N/2-1}$	$F_e/2 - \Delta f$	$F_e/2 - \Delta f$	$(N/2-1)$e harmonique
$S_{N/2}$	$F_e/2f$	$F_e/2f$	$(N/2)$e harmonique (fréquence de Nyquist)
$S_{N/2+1}$	$F_e/2 + \Delta f$	$-F_e/2 + \Delta f$	$(N/2+1)$e harmonique/ – $(N/2-1)$e harmonique
...			
S_{N-3}	$F_e - 3\Delta f$	$-3\Delta f$	$(N-3)$e harmonique/ – 3e harmonique
S_{N-2}	$F_e - 2\Delta f$	$-2\Delta f$	$(N-2)$e Harmonique/ – 2e harmonique
S_{N-1}	$F_e - \Delta f$	$-\Delta f$	$(N-1)$e harmonique / -1e harmonique

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Cette interprétation des échantillons obtenus montre bien que la précision d'analyse fréquentielle du spectre est donné par Δf qui est directement lié à la fenêtre d'observation du signal τ ($\tau = 1/\Delta f$). Pour une fréquence d'échantillonnage F_e constante, l'augmentation de la précision en fréquence Δf passe par une augmentation du nombre de points N et donc de la fenêtre d'observation τ.

7.3 Transformée de Fourier rapide

La transformée de Fourier rapide **TFR** ou **FFT** (*Fast Fourier Transform*) est simplement un algorithme permettant de réduire le nombre d'opérations, en particulier le nombre de multiplications, pour calculer la TFD. Ce temps de calcul est en effet primordial pour réaliser des systèmes numériques en « temps réel ».

a) Comparaison TFD et TFR

En considérant la relation permettant de calculer la TFD (*cf.* équation 7.3), les opérations à effectuer pour obtenir ces N valeurs de la transformée de Fourier discrète dans le cas de N échantillons du signal initial sont :

– $N \cdot N = N^2$ multiplications complexes ;

– $N \cdot (N - 1)$ additions complexes.

Étant donné que la durée d'exécution d'une addition complexe est négligeable devant la durée d'une multiplication complexe, le coût de calcul de la transformée de Fourier discrète va donc essentiellement dépendre du temps de réalisation d'une multiplication complexe.

Il existe différents algorithmes de transformée de Fourier rapide. Le plus connu et le plus utilisé est celui de Cooley-Tukey (appelé aussi à entrelacement temporel). Le nombre des multiplications complexes est $(N/2)\log(N)$. Le gain en fonction du nombre d'échantillons est important, sachant que le calcul de TFD se fait généralement sur un minimum de 512 ou 1 024 échantillons et que le temps de calcul d'une multiplication est prépondérant par rapport à l'addition, le temps de calcul

Copyright © 2017 Dunod.

d'une TFD par FFT peut être réduit d'un facteur supérieur à 100 (*cf.* tableau 7.3) :

$$N^2/\frac{N}{2}\log(N) = 2N/\log(N)$$

Tableau 7.3 – Amélioration des temps de calcul d'une transformée de Fourier discrète par utilisation d'un algorithme à entrelacement temporel.

Nombre d'échantillons	Rapport du nombre de multiplications complexes
8	5
128	36
512	114
1 024	205
2 048	372

b) Algorithme de transformée de Fourier rapide

L'algorithme de Cooley-Tukey, appelé aussi algorithme de réduction à base 2 dans le domaine temporel, s'applique dans le cas où le nombre N d'échantillons s_k s'exprime sous la forme 2^L et permet alors de simplifier le problème par une décomposition dichotomique. Posons :

$$W_N^{mk} = \mathrm{e}^{-j2\pi\frac{km}{N}}$$

Cette fonction a les propriétés suivantes :

$$W_N^{2mk} = W_{N/2}^{mk} \qquad \text{et pour } m < N/2 \quad W_N^{mk+N/2} = -W_N^{mk}$$

Pour calculer les N échantillons de la DFT $\{S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{N-2}, S_{N-1}\}$, on utilise l'expression de base :

$$S_m = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot W_N^{mk} \qquad \text{pour m } \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

En séparant les échantillons d'ordre pair et d'ordre impair, il vient :

$$S_m = \sum_{i=0}^{N/2-1} s_{2i} \cdot W_N^{m(2i)} + \sum_{i=0}^{N/2-1} s_{2i+1} \cdot W_N^{m(2i+1)}$$

$$= \sum_{i=0}^{N/2-1} s_{2i} \cdot W_{N/2}^{mi} + W_N^m \cdot \sum_{i=0}^{N/2-1} s_{2i+1} \cdot W_{N/2}^{mi}$$

Ce résultat montre que les échantillons S_m de la DFT d'ordre N s'exprime sous la forme de deux DFT d'ordre $N/2$:

$$S_m = S_{1(N/2),m} + W_N^m \cdot S_{2(N/2),m} \tag{7.7}$$

avec $S_{1(N/2),m}$ transformée d'ordre $N/2$ effectuée sur les échantillons d'ordre pair et $S_{2(N/2),m}$ transformée d'ordre $N/2$ effectuée sur les échantillons d'ordre impair.

Ainsi nous avons donc à calculer 2 transformées d'ordre $N/2$ et $N/2$ multiplications complexes pour terminer le calcul. Si l'on considère l'opérateur « papillon », représenté sur la figure 7.3, le calcul d'une DFT d'ordre N conduit à faire le calcul de deux DFT d'ordre $N/2$ et de terminer un calcul en utilisant un opérateur « papillon » avec le coefficient W_N^m (*cf.* figure 7.4). En effet l'équation 7.7 peut être précisée selon l'intervalle d'appartenance de l'indice m :

- pour $0 \leq m' \leq N/2 - 1$: $S_{m'} = S_{1,m'} + W_N^{m'} \cdot S_{2,m'}$
- pour $N/2 \leq m'' \leq N - 1$: $S_{m''} = S_{1,m''-N/2} - W_N^{m''-N/2} \cdot S_{2,m''-N/2}$

  en posant $m' = m'' - N/2$: $S_{m''} = S_{1,m'} - W_N^{m'} \cdot S_{2,m'}$

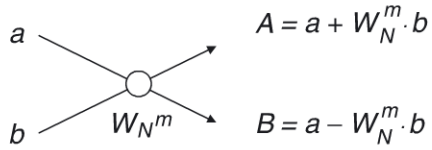

Figure 7.3 – Opérateur de base pour le calcul de la TFR : opérateur « papillon ».

Copyright © 2017 Dunod.

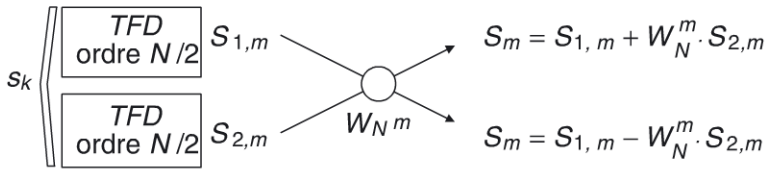

Figure 7.4 – Calcul d'une TFR d'ordre *N* à partir de deux TFR d'ordre *N*/2.

Cette analyse peut être réalisée L fois si $N = 2^L$. On obtient alors à la fin du processus de dichotomie une transformée d'ordre 2 dont la matrice de calcul ne demande pas de multiplication car :

$$W_2^1 = -1 \quad \text{et} \quad W_2^0 = +1$$

Ainsi l'algorithme complet du calcul peut être représenté sous la forme de L étapes de calcul de type « papillon » commençant par le calcul des $N/2$ transformées d'ordre 2 (*cf.* figure 7.5). Pour illustrer ce principe de calcul nous allons considérer le cas $N = 8$. Pour réaliser le calcul de la TFD, nous disposons des 8 échantillons temporels s_k avec $k \in [0, 7]$ et nous allons calculer les 8 échantillons fréquentiels S_m avec $m \in [0, 7]$. L'expression, utilisée pour calculer les S_m en fonction des s_k, est la suivante :

$$S_m = \sum_{k=0}^{7} s_k \cdot W_8^{mk}$$

Calculons les valeurs de W_8^{mk}. Seules les 8 premières valeurs de W_8^{mk} sont différentes puisque cette fonction est identique modulo $N = 8$, soit :

$$W_8^0 = -W_8^4 = 1 \quad W_8^1 = -W_8^5 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - j)$$

$$W_8^2 = -W_8^6 = -j \quad W_8^3 = -W_8^7 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j)$$

Un premier découpage dichotomique conduit à réaliser deux TFD d'ordre 4 et un calcul « papillon » avec les échantillons résultants $S_{i,m}$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

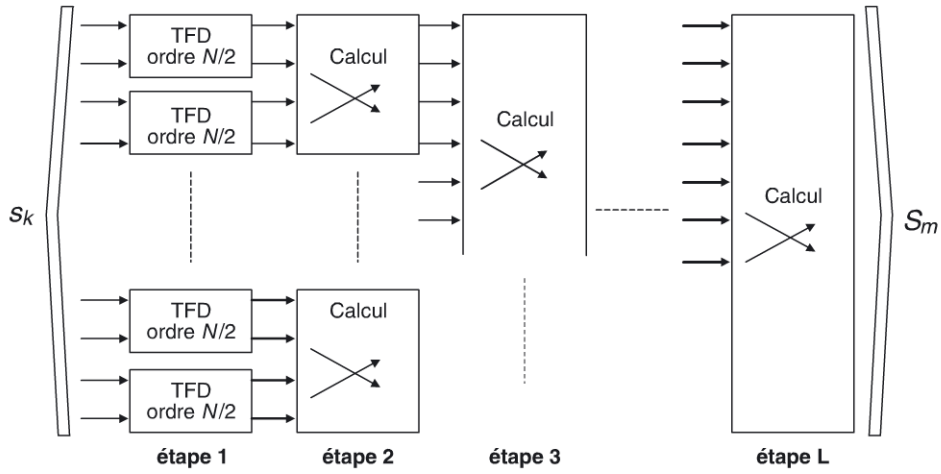

Figure 7.5 – Représentation schématique de la TFR suivant l'algorithme de réduction à base 2 ou avec entrelacement temporel.

Les deux transformées de Fourier discrètes sont calculées à partir des équations suivantes :

– échantillons pairs : $S_{1,m} = \sum_{k=0}^{3} s_{2k} \cdot W_4^{mk}$ pour $m \in [0, 3]$

– échantillons impairs : $S_{2,m} = \sum_{k=0}^{3} s_{2k+1} \cdot W_4^{mk}$ pour $m \in [0, 3]$

avec les quatre valeurs de la fonction W_4^{mk} :

$$W_4^0 = -W_4^2 = 1 \quad \text{et} \quad W_4^1 = -W_4^3 = -j$$

Ensuite les échantillons de la DFT complète sont obtenus à l'aide du calcul « papillon » avec les coefficients W_8^{mk} :

– pour $0 \leq m \leq 3$: $S_m = S_{1,m} + W_8^m \cdot S_{2,m}$

– pour $4 \leq m \leq 7$: $S_m = S_{1,m-4} + W_8^{m-4} \cdot S_{2,m-4}$

Les coefficients des expressions, donnant $S_{1,m}$ et $S_{2,m}$, étant très simples (1 ou j), la méthode de découpage peut se limiter à cette étape et conserver ainsi comme premier calcul des TFD d'ordre 4. Les algorithmes, construits sur ce principe, sont appelés « FFT Radix-4 ».

Copyright © 2017 Dunod.

En continuant le découpage dichotomique, nous obtenons alors le calcul de 4 TFD d'ordre 2 à réaliser suivi du calcul « papillon » avec les échantillons résultants $S_{i,j,m}$. Les quatre transformées de Fourier discrètes sont calculées à partir des équations suivantes :

– échantillons pairs et impairs de $S_{1,m}$ pour $m \in [0, 1]$:

$$S_{1,1,m} = \sum_{k=0}^{1} s_{4k} \cdot W_2^{mk} \qquad S_{1,2,m} = \sum_{k=0}^{1} s_{4k+2} \cdot W_2^{mk}$$

– échantillons pairs et impairs de $S_{2,m}$ pour $m \in [0, 1]$:

$$S_{2,1,m} = \sum_{k=0}^{1} s_{4k+1} \cdot W_2^{mk} \qquad S_{2,2,m} = \sum_{k=0}^{1} s_{4k+3} \cdot W_2^{mk}$$

avec les deux valeurs de la fonction W_2^{mk} : $W_2^0 = -W_2^1 = 1$

Étant donné les valeurs des coefficients W_2^{mk}, une TFD d'ordre 2 correspond à un opérateur de type « papillon » sans coefficient, donc une simple somme ou différence de nombres complexes (coût de calcul négligeable). Ensuite les échantillons intermédiaires $S_{1,m}$ et $S_{2,m}$ sont obtenus à l'aide du calcul « papillon » avec les coefficients $W_2^{mk} W_2^{mk}$ équivalents :

– pour $0 \leq m \leq 1$:

$$S_{1,m} = S_{1,1,m} + W_4^m \cdot S_{1,2,m} = S_{1,1,m} + W_8^{2m} \cdot S_{1,2,m}$$
$$S_{2,m} = S_{2,1,m} + W_4^m \cdot S_{2,2,m} = S_{2,1,m} + W_8^{2m} \cdot S_{2,2,m}$$

– pour $2 \leq m \leq 3$:

$$S_{1,m} = S_{1,1,m-2} - W_4^{m-2} \cdot S_{1,2,m-2} = S_{1,1,m-2} - W_8^{2(m-2)} \cdot S_{1,2,m-2}$$
$$S_{2,m} = S_{2,1,m-2} - W_4^{m-2} \cdot S_{2,2,m-2} = S_{2,1,m-2} - W_8^{2(m-2)} \cdot S_{2,2,m-2}$$

Finalement nous obtenons dans ce cas le schéma général du calcul de la TFD d'ordre 8 qui conduit à un calcul de 4 TFD d'ordre 2 (ou opérateur

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

« papillon » sans coefficient), suivi de deux étapes de calcul « papillon » (*cf.* figure 7.6).

Il est important de noter que pour un calcul immédiat sous cette forme les échantillons s_k doivent être classés dans un ordre permuté. Cette permutation est due aux entrelacements successifs et se traduit par un retournement ou une inversion de la représentation binaire des indices (transformation 0->1 et 1->0 des indices codés en binaire).

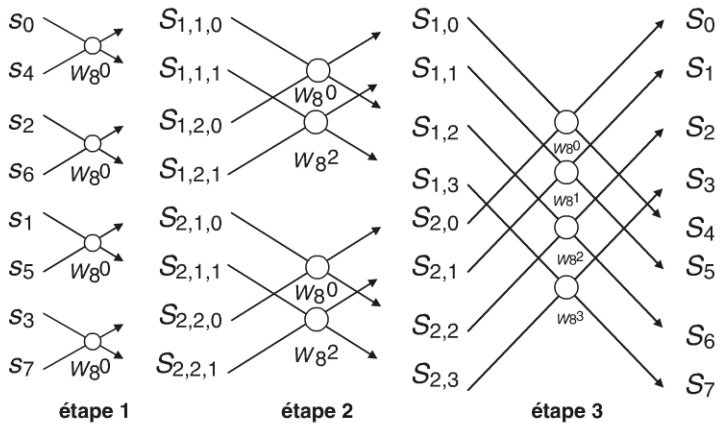

Figure 7.6 – Représentation schématique de la TFR selon la méthode à entrelacement temporel pour 8 échantillons.

Ainsi les programmes de TFR ou FFT suivant cette méthode commencent toujours par un classement des échantillons et ensuite réalise le calcul des différentes étapes. De nombreux programmes, qui implémentent cette méthode, existent dans les différents langages de haut niveau et sont souvent disponibles dans les bibliothèques scientifiques de base (**www.intersrv.com/~dcross/fft.html**). Dans tous les cas le calcul d'une TFR se traduit par un temps important. Pour améliorer ces temps de calcul de transformée de Fourier rapide et obtenir des résultats en « temps réel », par exemple dans les systèmes de type radar, il est nécessaire d'utiliser des processeurs de traitement de signaux (DSP : *Digital Signal Processor*). Ces processeurs possèdent des unités de calculs rapides. La mise en œuvre de ce type d'algorithmes, disponible dans les bibliothèques de programmes fournies avec ces processeurs,

Copyright © 2017 Dunod.

est aisée et conduit à des performances très intéressantes. Considérons ainsi le processeur TMS 320C25 (Texas Instruments), nous avons les résultats suivants : 200 μs pour 64 échantillons, 3 ms pour 256 et 20 ms pour 1 024. Les programmes écrits en langage de haut niveau (C ou autre) et compilés sur des processeurs 32 bits (ex : 68 040 de chez Motorola), conduisent à des temps de calcul de l'ordre de quelques 100 ms ou plus pour un nombre d'échantillons égal à 1 024.

7.4 Convolution et corrélation numériques

7.4.1 Convolution discrète

De la même manière que pour la transformée de Fourier, il est possible de définir la convolution discrète. Considérons deux signaux $x(t)$ et $y(t)$; l'échantillonnage donne les suites de termes : $x(iT_e)$ $(= x_i)$ et $y(iT_e)$ $(= y_i)$. La convolution discrète z de x et de y, formée des points $z(iT_e)$ $(= z_i)$, est définie à partir de l'écriture discrétisée de la relation de définition 3.4 :

$$z_k = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i \cdot y_{k-i} \quad \text{avec } k \text{ quelconque} \tag{7.8}$$

Mais, pour N échantillons de x_i et y_i, la convolution discrète s'exprime par :

$$z_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y_{k-i} \quad \text{avec } k \in [0, N-1] \tag{7.9}$$

Il est important de remarquer que ce calcul nécessite de connaître y_i en dehors de l'intervalle précédemment défini ; en effet nous avons besoin des échantillons correspondant à l'intervalle $i \in \{-N+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N-1\}$. Pour pouvoir réaliser effectivement le calcul, plusieurs solutions sont possibles pour définir les échantillons y_i (*cf.* figure 7.7) :

Cas 1 : les échantillons en dehors de l'intervalle $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ sont considérés comme nuls : $x_i = 0$ et $y_i = 0$ pour $i < 0$ ou $i \geq N$. Dans ce

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

cas il est préférable de calculer la convolution sur un intervalle qui fait intervenir symétriquement les échantillons de y_i et donc de calculer la convolution sur $2N - 1$ points :

$$z_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y_{k-i} \qquad \text{avec } k \in [0, 2N - 1]$$

Cas 2 : les échantillons en dehors de l'intervalle $\{0, 1, \ldots, N - 1\}$ sont considérés comme identiques, c'est-à-dire comme si la fonction était périodique et de période NT_e.
Cas 3 : enfin les échantillons en dehors de l'intervalle $\{0, 1, \ldots, N - 1\}$ peuvent être connus et alors utilisés pour le calcul. Ou si ils ne le sont pas, la convolution peut alors être calculée sur un intervalle moitié de l'intervalle de connaissance des échantillons y_i, ici $N/2$.

Le premier cas conduit à des résultats présentant des distorsions, alors que les deux dernières solutions conduisent à des résultats beaucoup plus acceptables et semblent être les plus communément utilisées.

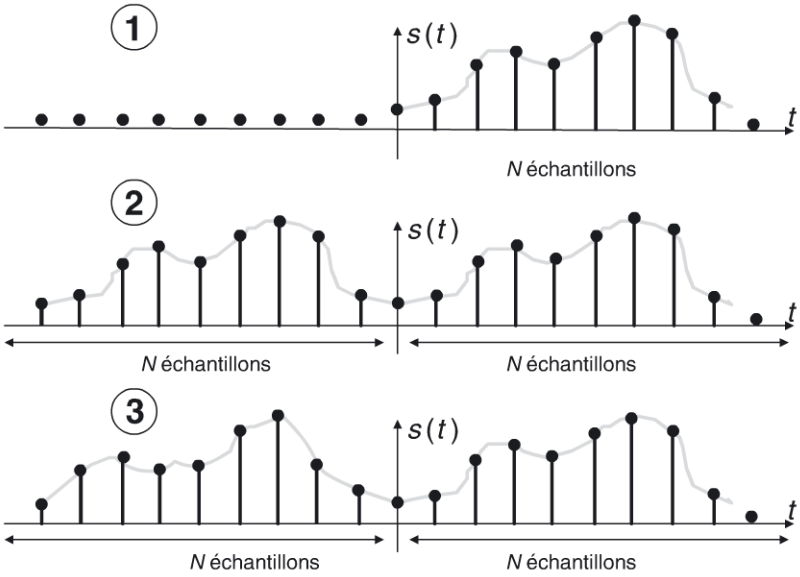

Figure 7.7 – Les différentes solutions pour le calcul d'une convolution ou d'une corrélation discrète.

Copyright © 2017 Dunod.

7.4.2 Corrélation discrète

De même, il est possible de définir la corrélation discrète. Soient deux signaux $x(t)$ et $y(t)$; l'échantillonnage donne les suites de termes : $x(iT_e)$ $(= x_i)$ et $y(iT_e)$ $(= y_i)$. La corrélation discrète $C_{xy,k}$ de x et y est définie à partir de la relation 3.23 qui conduit à la relation discrétisée suivante :

$$C_{xy,k} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i \cdot y_{i-k} \quad \text{avec } k \text{ quelconque} \tag{7.10}$$

Mais, pour un nombre N échantillons de x_i et y_i, la corrélation discrète est donnée par :

$$C_{xy,k} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y_{i-k} \quad \text{avec } k \in [0, N-1] \tag{7.11}$$

Comme pour la convolution discrète, il est nécessaire de connaître des valeurs de y_i en dehors de l'intervalle initial et les trois solutions proposées précédemment sont possibles. Le premier cas où l'on considère des échantillons nuls en dehors de l'intervalle initial conduit à des résultats présentant des distorsions par rapport au calcul analytique réalisé sur des signaux définis sur tout l'axe des temps. L'expression discrétisée de la corrélation est alors la suivante (*cf.* figure 7.8) :

$$C_{xy,k} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y_{i-k} \quad \text{avec } k \in [0, 2N-1] \tag{7.12}$$

Le calcul sur $2N$ points permet d'avoir une fonction de corrélation symétrique. En considérant la solution où la corrélation est calculée sur la moitié des N points initiaux, nous obtenons alors un résultat identique à celui obtenu avec un calcul analytique réalisé sur des signaux définis sur tout l'axe des temps. L'expression discrétisée de la corrélation est alors la suivante (*cf.* figure 7.9) :

$$C_{xy,k} = \sum_{i=0}^{N/2-1} x_i \cdot y_{i-k} \quad \text{avec } k \in [0, N/2-1] \tag{7.13}$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

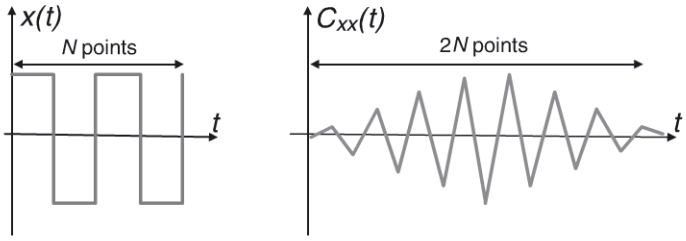

Figure 7.8 – Calcul de la corrélation discrète en supposant les échantillons nuls en dehors de l'intervalle.

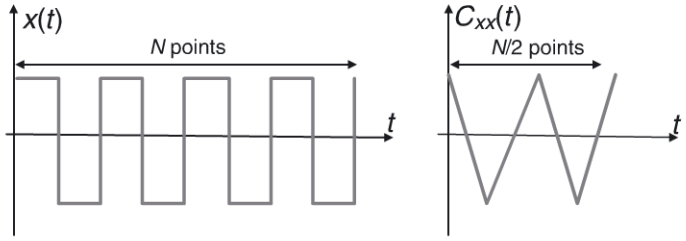

Figure 7.9 – Calcul de la corrélation discrète en utilisant la moitié de l'intervalle sur lequel sont connus les échantillons.

ou

$$C_{xy,k} = \sum_{i=(N/2)-1}^{N-1} x_i \cdot y_{i-k} \quad \text{avec } k \in [0, N/2-1] \tag{7.14}$$

7.5 Les fenêtres de pondération

7.5.1 Effet du fenêtrage temporel

Comme nous l'avons étudié au paragraphe 3.2, le traitement analogique ou numérique d'un signal de durée finie ou tronqué $s_\Pi(t)$ conduit à une déformation de son spectre. Dans le cadre de la TFD que nous venons d'étudier, le signal est obligatoirement limité aux N échantillons numériques avec lesquels la TFD est calculée, c'est-à-dire à une durée $\tau(= NT_e)$. Cette effet a été modélisé par la relation suivante :

$$s_\Pi(t) = s(t) \cdot \Pi_\tau(t)$$

Copyright © 2017 Dunod.

et donc un spectre en fréquence donné par :

$$S_{\Pi}(f) = S(f) * \left[\tau \cdot \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f}\right]$$

Dans le cas d'un signal périodique, le spectre, obtenu par transformée de Fourier discrète, est donc un ensemble de fonctions sinc(τf) centrées sur les fréquences qui composent le signal théorique initial. Ainsi cette qualité du résultat peut être incommode pour l'étude du spectre, en particulier lorsque le spectre est composé de nombreuses raies, proches les unes des autres.

Pour caractériser cette « déformation » du spectre due à la fenêtre temporelle de type porte (fenêtre naturelle) $g_{\text{fen}}(t) = \Pi_{\tau}(t)$, nous allons définir les quatre paramètres suivants en considérant la valeur absolue de la fonction sinus cardinal (*cf.* figure 7.10) :

– la largeur à mi-hauteur du pic principal par rapport à la largeur de sa base dans le cas de la fenêtre naturelle :

$$L = \frac{L_{mi-h}}{L_{\text{base}}}$$

– l'amplitude du premier lobe secondaire par rapport à celle du pic principal généralement normé à 1 :

$$A = \frac{H_{1-l}}{H = 1}$$

– les positions des 2 premiers lobes secondaires par rapport à la position du pic central :

$$P_1 = \frac{P_{1-l}}{L_{\text{base}}/2} \qquad \text{et} \qquad P_2 = \frac{P_{2-l}}{L_{\text{base}}/2}$$

Dans le cas du traitement analogique des signaux, cette déformation spectrale est inévitable et correspond à la fenêtre de mesure ou fenêtre naturelle (fonction porte) et cela conduit à des paramètres de déformation, mesurés sur la figure 7.10 ou calculés directement sur la fonction sinc (*cf.* annexes) :

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

Fenêtre	L	A	P_1	P_2
naturelle	0,6	0,217	1,43	2,46

Par contre dans le cas d'un traitement numérique du signal (transformée de Fourier discrète), il est possible d'utiliser des fonctions-fenêtres $g_{\text{fen}}(t)$ différentes de la fenêtre naturelle $\Pi_\tau(t)$ permettant d'obtenir une représentation spectrale meilleure au sens des paramètres définis. En effet les déformations spectrales obtenues sont directement liées au spectre de la fenêtre utilisée : fenêtre naturelle ⇒ déformation de type sinc. Il serait souhaitable que les déformations obtenues soient moins importantes :

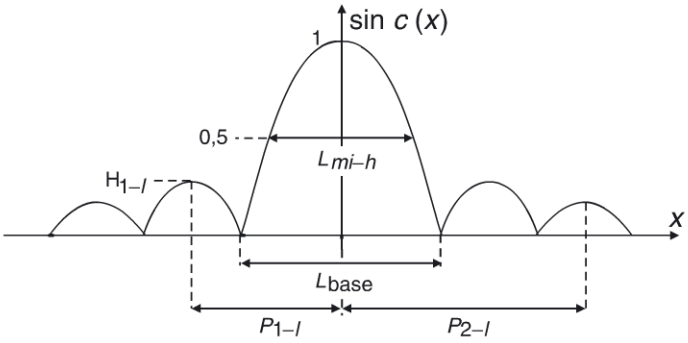

Figure 7.10 – Caractérisation de la déformation du spectre due au fenêtrage.

– largeur à mi-hauteur du pic principal L la plus petite possible ;

– l'amplitude relative A du 1er lobe secondaire la plus faible possible ;

– les positions P_{1-l} et P_{2-l} des 2 premiers lobes secondaires les plus éloignées possibles.

Cette fenêtre $g_{\text{fen}}(t)$ agit sur les échantillons s_k pour obtenir de nouveaux échantillons $s_{k,f}$ avec les valeurs numériques de la fonction fenêtre discrétisée aux instants kT_e : $g_{\text{fen}}(kT_e) = g_{\text{fen},k}$. Soit :

$$s_{k,f} = s_k \cdot g_{\text{fen},k}$$

Copyright © 2017 Dunod.

Dans le cas d'un signal périodique, le spectre sera donc un ensemble de fonctions, transformées de Fourier de la fonction-fenêtre $g_{\text{fen}}(t)$, centrées sur les fréquences qui composent le signal.

De nombreuses études ont été réalisées afin d'obtenir des fenêtres temporelles $g_{\text{fen}}(t)$ minimisant la déformation (*Smoothing Windows*), c'est-à-dire possédant un spectre plus proche des caractéristiques souhaitées. Ainsi, la première fenêtre utilisée a été la fenêtre « triangulaire » ou fenêtre de Bartlett qui a pour équation :

$$g_{\text{fen}}(t) = \Lambda_\tau(t) \quad \text{pour } |t| \leq \tau/2 \quad \text{et} \quad g_{\text{fen}}(t) = 0 \quad \text{pour } |t| \geq \tau/2$$

Il est assez évident de calculer le spectre de cette fenêtre en utilisant le résultat obtenu dans le paragraphe 3.3.2 en calculant la fonction d'autocorrélation d'un signal porte :

$$\Lambda_\tau(t) = \frac{2}{\tau} \cdot [\Pi_{\tau/2}(t) * \Pi_{\tau/2}(t)]$$

Donc la transformée de Fourier de la fonction $\Lambda\tau(t)$ est donnée par :

$$\Lambda_\tau(t) \longleftrightarrow F\frac{\tau}{2} \cdot \left[\frac{\sin(\pi(\tau/2)f)}{\pi(\tau/2)f}\right]^2$$

En utilisant cette fenêtre triangulaire nous obtenons le spectre possédant les caractéristiques suivantes :

Fenêtre	L	A	P_1	P_2
naturelle	0,6	0,217	1,43	2,46
triangulaire	0,89	0,047	2,86	5,92

Si les caractéristiques correspondant aux lobes secondaires sont effectivement améliorées, par contre la largeur du pic principal est augmenté. D'autres fenêtres plus complexes dans leurs expressions mathématiques et surtout dans le calcul du spectre sont utilisées en fonction de leurs caractéristiques. Nous présentons ci-après les principales fenêtres avec leur expression $g_{\text{fen}}(t)$; leurs caractéristiques et leurs domaines d'utilisation sont indiqués dans le tableau 7.4. Soit :

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

– fenêtre naturelle ou porte (cas traité précédemment) :

$$g_{\text{fen}}(t) = \Pi_\tau(t)$$

– fenêtre de Bartlett ou triangulaire (cas traité précédemment) :

$$g_{\text{fen}}(t) = \Lambda_\tau(t) \quad \text{pour } |t| \leq \tau/2$$

$$\text{et} \quad g_{\text{fen}}(t) = 0 \quad \text{pour } |t| \geq \tau/2$$

– fenêtre de Hanning :

$$g_{\text{fen}}(t) = 0,5 \cdot [1 - \cos(2\pi t/\tau)]$$

– fenêtre de Hamming :

$$g_{\text{fen}}(t) = 0,54 - 0,46 \cdot \cos(2\pi t/\tau)$$

– fenêtre de Blackman :

$$g_{\text{fen}}(t) = 0,42 - 0,5 \cdot \cos(2\pi t/\tau) + 0,08 \cdot \cos(4\pi t/\tau)$$

– fenêtre de Blackman-Harris :

$$g_{\text{fen}}(t) = 0,42323 - 0,49755 \cdot \cos(2\pi t/\tau) + 0,07922 \cdot \cos(4\pi t/\tau)$$

– fenêtre de Blackman exacte :

$$g_{\text{fen}}(t) = \frac{7938}{18608} - \frac{9240}{18608} \cdot \cos(2\pi t/\tau) + \frac{1430}{18608} \cdot \cos(4\pi t/\tau)$$

– fenêtre exponentielle :

$$g_{\text{fen}}(t) = \mathrm{e}^{a \cdot t} \quad \text{avec } a = \mathrm{Ln}(b)/\tau \quad \text{et } b \text{ : valeur finale}$$

– fenêtre à « toit plat » :

$$g_{\text{fen}}(t) = 0,2810639 - 0,5208972 \cdot \cos(2\pi t/\tau) + 0,1980399 \cdot \cos(4\pi t/\tau)$$

Copyright © 2017 Dunod.

Tableau 7.4 – Comparaisons des fenêtres temporelles.

Fenêtre	L	A	P_1	P_2	Remarques
naturelle	0,6	0,217	1,43	2,46	*référence*
triangulaire	0,89	0,047	2,86	5,92	pic secondaires faibles et éloignés
Hanning	1	0,025	2,3	3,3	lobes secondaires faibles, fenêtre très utilisée
Hamming	0,91	0,0015	2,4	3,6	pic central étroit, lobes secondaires faibles
Blackman	1,2	0,0015	3,5	4,5	lobes secondaires faibles et éloignés
Blackman-Harris	1,2	0,0004	3,5	4,5	lobes secondaires très faibles
Blackman exacte	1,15	0,0005	3,5	4,4	lobes secondaires très faibles
à « toit plat »	1,8	0,01	3,3	4,5	résolution très bonne en amplitude
exponentielle (*b/0;1*)	0,8	—	—	—	pic central très étroit, composante continue
Kaiser-Bessel ($\beta = 9$)	1,2	0,0005	3,2	3,8	lobes secondaires très faibles

– fenêtre de Kaiser-Bessel :

$$g_{\text{fen}}(t) = \frac{I_0\left(\beta \cdot \sqrt{1 - [(t - \tau/2)/(\tau/2)]}\right)}{I_0(\beta)} \qquad \text{avec } 2\pi \leq \beta \leq 3\pi$$

et $I_0(x) = J_n(jx)$: la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0 (*cf.* annexes)

– fenêtre de Parzen :

$$g_{\text{fen}}(t) = 1 - 6 \cdot \left(\frac{|t|}{\tau}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{|t|}{\tau}\right)^3 \qquad \text{pour } |t| \leq \tau/2$$

$$g_{\text{fen}}(t) = 2 \cdot \left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right)^3 \qquad \text{pour } \tau/2 \leq |t| \leq \tau$$

$$g_{\text{fen}}(t) = 0 \qquad \text{pour } |t| \geq \tau$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Copyright © 2017 Dunod.

– fenêtre de Gauss (courbe de Gauss tronquée) :

$$g_{\text{fen}}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\cdot\sigma^2}} \cdot \Pi_\tau(t) \qquad \text{pour } |t| \leq \tau/2 \quad \text{et } \tau = k\sigma \quad (k \in [1, 5])$$

$$g_{\text{fen}}(t) = 0 \qquad \text{pour } |t| \geq \tau/2$$

Ces différentes fenêtres réalisent toujours un compromis entre la largeur du pic central et les caractéristiques des lobes secondaires (hauteur et position). Dans tous les cas, l'utilisation de fenêtre numérique va améliorer la lisibilité du spectre obtenu. Le choix de la fenêtre la plus adaptée à une application est très difficile à réaliser. En pratique, il est conseillé de commencer par utiliser la fenêtre naturelle afin de ne pas produire de lissage par une fenêtre de pondération. Dans une deuxième étape, il est important de spécifier l'analyse spectrale recherchée : identification de deux fréquences très proches (élimination des lobes secondaires), comparaison des puissances respectives des pics de fréquences (fenêtres à faible déformation par lissage), résolution en fréquences et en puissance, etc. Ensuite la meilleure méthode consiste à tester l'effet des différentes fenêtres sur le spectre.

Ainsi cette possibilité est souvent offerte dans des appareils de mesure haut de gamme : oscilloscope numérique avec fonctions de traitement du signal intégrées.

7.5.2 Transformée de Fourier à fenêtre glissante

Considérons un signal $s(t)$ pondéré par une fenêtre temporelle de fonction réelle $g_{\text{fen}}(t)$, centrée autour du temps α ; le signal résultant, paramétré par α, peut s'écrire :

$$s_{\Pi,\alpha}(t) = s(t) \cdot g_{\text{fen}}(t - \alpha)$$

Le spectre de ce signal, paramétré aussi par α, est obtenu à partir de la transformée de Fourier selon la relation de base 2.13 :

$$S_{\Pi,\alpha}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_{\Pi,\alpha}(\theta)\cdot \mathrm{e}^{-j2\pi f\theta}\cdot \mathrm{d}\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\theta)\cdot g_{\text{fen}}(\theta - \alpha)\cdot \mathrm{e}^{-j2\pi f\theta}\cdot \mathrm{d}\theta$$

Copyright © 2017 Dunod.

Cette transformée de Fourier, ou plus exactement cet ensemble de transformées de Fourier, est appelé la transformée de Fourier à fenêtre glissante. Nous pouvons remarquer que cet ensemble de transformées de Fourier, paramétrées par α, contient plus d'informations que nécessaire pour reconstruire le signal initial non tronqué. Ainsi nous avons la relation :

$$s(t) = \iint_{\Re^2} S_{\Pi,\alpha}(f) \cdot g_{\text{fen}}(t-\alpha) \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi f t} \cdot \mathrm{d}f \cdot \mathrm{d}\alpha$$

Dans le cas où l'on considère une fenêtre de pondération de type Gauss (*cf.* paragraphe précédent), nous avons une transformée de Fourier à fenêtre glissante, dite transformée de Gabor :

$$S_{\Pi,\alpha}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\theta) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(\theta-\alpha)^2}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi f\theta} \cdot \mathrm{d}\theta \qquad (7.15)$$

Remarque

les transformées de Fourier et de Gabor peuvent être interprétées comme une décomposition sur une base de fonctions sinusoïdales pour la première (décomposition en série de Fourier) et sur une base de fonctions sinusoïdales dont l'enveloppe est une gaussienne centrée en α. L'avantage de la transformée de Gabor sur celle de Fourier concerne les signaux de durée finie ayant une répartition limitée en fréquence, le calcul de la transformée de Fourier nécessitant dans ce cas un traitement numérique de précision sur une durée longue (annulation des composantes fréquentielles élevées).

7.5.3 La transformée en ondelettes

a) Principe de base de la transformée par ondelettes

Le but de ce paragraphe est simplement de donner les idées de base de cette analyse par ondelettes, actuellement encore peu répandue. Le principe de base est d'utiliser des fenêtres de pondération de fonction réelle $g_{\text{fen},\alpha,\beta}(t)$, qui sont centrée autour d'un temps α et liées par un rapport d'homothétie de β. Ainsi nous avons l'ensemble exprimé par :

$$g_{\text{fen},\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot g_{\text{fen}}\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right) \quad \text{avec } \alpha \in \Re \text{ et } \beta > 0$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

La fonction génératrice $g_{\text{fen}}(t)$ est appelée ondelette mère. La transformée par ondelettes d'un signal $s(t)$ aura donc pour expression de ces coefficients :

$$O_s(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot g_{\text{fen},\alpha,\beta}(t) \cdot \mathrm{d}t \tag{7.16}$$

Ce calcul de la transformée par ondelettes peut être vu comme une « comparaison » du signal avec un signal de base (ondelette mère) décalé temporellement et comprimé ou dilaté.

De la même manière que pour la transformée de Gabor, il est possible de reconstruire le signal initial en connaissant les coefficients de la transformée par ondelettes. Soit l'expression de $s(t)$ à une constante près :

$$s(t) = \iint_{\Re^2} \frac{1}{\beta^2} O_s(\alpha, \beta) \cdot g_{\text{fen},\alpha,\beta}(t) \cdot \mathrm{d}\alpha \cdot \mathrm{d}\beta$$

La fonction ondelette-mère doit posséder les propriétées suivantes :

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\text{fen}}^2(t) \cdot \mathrm{d}t} = 1 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|G_{\text{fen}}(f)|^2}{|f|} \cdot \mathrm{d}f = k \quad \text{(avec k borné)}$$

Différentes fonctions ondelettes qui respectent les propriétés précédentes sont utilisées :

– ondelette de Morlet :

$$g_{\text{fen}}(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2} \cdot \cos(5 \cdot t)$$

– ondelette de Haar :

$$\begin{aligned} g_{\text{fen}}(t) &= 1 && \text{pour } 0 < t < 1/2 \\ g_{\text{fen}}(t) &= -1 && \text{pour } 1/2 < t < 1 \\ g_{\text{fen}}(t) &= 0 && \text{pour } t \notin [0, 1] \end{aligned}$$

– ondelette obtenue par dérivées de gaussiennes (exemple de la dérivée seconde) :

$$g_{\text{fen}}(t) = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{\pi}} \cdot \left(1 - t^2\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

Copyright © 2017 Dunod.

b) Exemple de transformée par ondelettes

La mise en œuvre numérique nécessite de restreindre les intervalles de variation de α et β. Ainsi, nous avons la fonction-ondelette couramment utilisée :

$$g_{\text{fen},m,n}(t) = 2^{m/2} \cdot g_{\text{fen}}(2^m \cdot (t - n \cdot 2^{-m})) \quad \text{avec } m, n \in \aleph$$

En accroissant m, le temps est compressé et donc la fréquence centrale et la largeur de bande sont dilatées. Le paramètre m peut être considéré comme un facteur d'échelle et 2^{-m} comme un pas d'échantillonnage. Si on considère F_0 comme la fréquence centrale de la fenêtre $g_{\text{fen},m,n}(t)$, celle-ci peut varier selon $2^{-m}F_0$. Ainsi il est possible d'ajuster le facteur d'échelle m pour déceler les différentes fréquences contenues dans le signal.

Considérons un signal constitué de la succession de deux sinusoïdes de périodes respectives T_0 et $T_0/2$, limitées pour chacune à une période, soit (*cf.* figure 7.11) :

$$s(t) = \sin(2\pi F_0 t) \cdot \Pi_{T_0/2}(t - T_0/2) + \sin(2\pi(2F_0)t) \cdot \Pi_{T_0/4}(t - (T_0 + T_0/4)$$

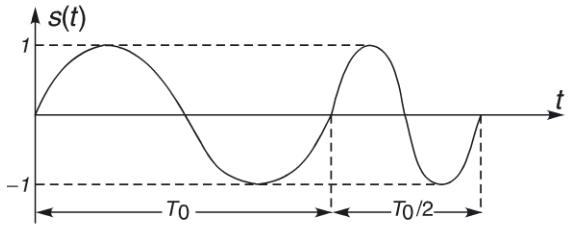

Figure 7.11 – Exemple d'un signal simple de durée limite.

En utilisant la transformée de Fourier, le spectre de ce signal s'exprime par la relation complexe suivante :

$$S(f) = \frac{1}{j\pi} \cdot \left[\cos\left(\pi \frac{T_0}{2} f\right) \cdot e^{-j2\pi f \frac{T_0}{2}} \cdot \frac{f}{f^2 - F_0^2} + \cos\left(\pi \frac{T_0}{4} f\right) \cdot e^{-j2\pi f [T_0 + \frac{T_0}{4}]} \cdot \frac{f}{f^2 - 4F_0^2} \right]$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

Cette représentation ne facilite pas la compréhension du spectre du signal $s(t)$. Considérons maintenant une analyse par ondelettes en utilisant comme fonction ondelette mère une seule période d'une sinusoïde :

$$g_{\text{fen},m,n}(t) = 2^{\frac{m}{2}} \sin\left(2^m(t - n2^{-m})\right)$$

soit par exemple :

$$\begin{array}{lll} g_{\text{fen},1,0}(t) = \sqrt{2}\sin(2t) & \text{avec } T_0 = 1/2 & \text{et } 0 \leq t \leq \pi \\ g_{\text{fen},0,0}(t) = \sin(t) & \text{avec } T_0 = 1 & \text{et } 0 \leq t \leq 2\pi \end{array}$$

Le calcul de la transformée par condelettes consiste à calculer les coefficients selon la relation 7.16 ou encore à comparer les différentes fonctions ondelettes comprimées et décalées avec le signal ; il vient :

$$O_s(m, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot g_{\text{fen},m,n}(t) \cdot \mathrm{d}t$$

$$O_s(0, 0) = 1 \quad \text{et} \quad O_s(0, 1) = 0$$

et $\quad O_s(1, 0) = 0, \quad O_s(1, 1) = 0, \quad O_s(1, 2) = 1$ et $O_s(1, 3) = 0$

Il est possible de représenter cette transformée par ondelettes dans un diagramme fréquence temps (*cf.* figure 7.12). Cette représentation montre que la transformée par ondelettes indique non seulement le contenu en fréquence mais aussi les instants d'existence de ces fréquences.

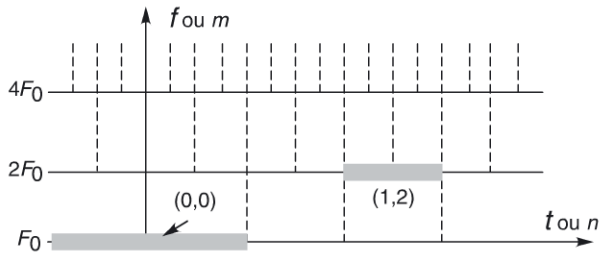

Figure 7.12 – Représentation d'une transformée par ondelettes.

Cette transformée par ondelettes est particulièrement utile pour l'analyse de signaux présentant des discontinuités (signal carré, signal avec des parasites impulsionnels). Cette transformée par ondelettes s'applique à des problèmes très variés :

Copyright © 2017 Dunod.

– une analyse dite multi-échelle : différents niveaux de paramètrage des fonctions ondelettes ;
– une analyse avec suppression de tendance : annulation d'une valeur moyenne en évolution en utilisant une analyse multi-échelle ;
– une analyse avec suppression du bruit : choix des ondelettes-mères en adéquation avec le type de signal à extraire du bruit.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Copyright © 2017 Dunod.

FILTRAGE NUMÉRIQUE 8

8.1 INTRODUCTION

8.1.1 Filtrage numérique : définition

On appelle « **filtre numérique** » un système utilisé pour modifier la distribution fréquentielle d'un signal numérique selon des spécifications données. Un filtre numérique peut être vu comme un procédé de calcul permettant de transformer un signal numérique d'entrée (séquence de nombres) en un signal numérique de sortie (seconde séquence de nombres) pour obtenir la modification voulue du signal. Le problème du filtrage numérique consiste donc à déterminer l'équation régissant cette transformation des signaux numériques qui d'une part doit représenter la réponse fréquentielle spécifiée et d'autre part peut être effectivement réalisée. La transformation peut être implantée sous forme de logiciel (algorithme) ou matériel (circuits électroniques).

Les filtres numériques sont, pour les signaux échantillonnés, les équivalents des filtres analogiques pour les signaux continus. En raison du développement des circuits intégrés rapides, les filtres numériques deviennent plus intéressants que les filtres analogiques en apportant de nombreux avantages : précision, fiabilité, stabilité, adaptabilité et facilité de commande.

De la même manière, le problème consiste à réaliser un filtre donnant une réponse fréquentielle $H(f)$ donnée (prédéfinie à l'aide d'un gabarit : plan de Bode, etc.), une réponse impulsionnelle $h(t)$ fixée ou éventuellement une réponse indicielle voulue.

Dans le cas général de ces filtres, la valeur de la sortie numérique $y(kT_e) = y_k$ à l'instant kT_e est fonction de l'entrée $x(kT_e) = x_k$ au même

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

instant kT_e, des N entrées numériques précédentes $x(iT_e) = x_i$ pour tout $i \in \{k-1, \ldots, k-N\}$ et de plus des sorties numériques précédentes $y(iT_e) = y_i$ pour tout $j \in \{k-1, \ldots, k-N\}$ (*cf.* figure 8.1) :

$$y_k = F_{\text{onction}}(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_{k-N}, y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_{k-N})$$

Les notions de filtrage numérique abordées concerneront principalement des systèmes linéaires invariants : la sortie d'un tel système est liée à l'entrée par l'opération de convolution (*cf.* paragraphe 3.1). Cela impose que la fonction générale précédente donnant les échantillons de sortie y_k, soit une combinaison linéaire des éléments x_i et y_i :

$$y_k = \sum_{i=0}^{N} a_i \cdot x_{k-i} - \sum_{j=1}^{N} b_j \cdot y_{k-j} \tag{8.1}$$

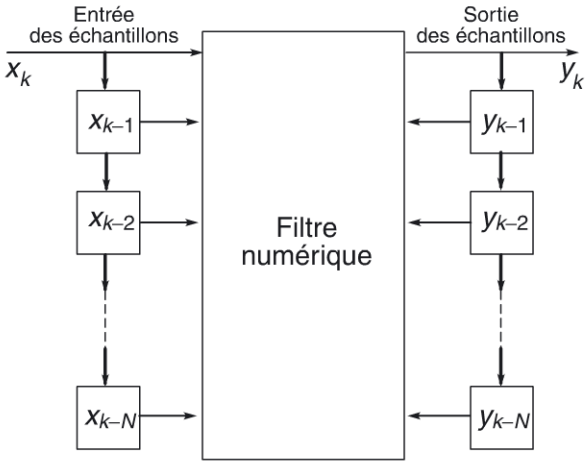

Figure 8.1 – Représentation schématique d'un filtre numérique.

Cette équation générale des filtres numériques est appelée **équation aux différences**. À partir de cette expression, nous pouvons distinguer deux grandes familles de filtres : les **filtres non récursifs** pour lesquels tous les coefficients b_i sont nuls et les **filtres récursifs** pour lesquels au moins un coefficient b_i est non nul ou encore définis comme des filtres possédant une boucle de contre-réaction.

Copyright © 2017 Dunod.

Pour les filtres non récursifs, l'équation est donc limitée à :

$$y_k = \sum_{i=0}^{N} a_i \cdot x_{k-i} \tag{8.2}$$

Mais dans le cadre des systèmes linéaires invariants, nous pouvons utiliser l'équation de convolution discrète, établie au paragraphe 7.4.2, qui est liée aux échantillons de la réponse impulsionnelle h_i :

$$y_k = \sum_{-\infty}^{+\infty} h_i \cdot x_{k-i} \tag{8.3}$$

Cette équation de convolution amène à définir deux types de filtres numériques : les filtres à réponse impulsionnelle finie (**RIF**) ou filtres à moyenne ajustée (**MA**) pour lesquels il sera possible d'utiliser l'équation 8.3 qui doit être alors limitée au domaine d'existence de la réponse impulsionnelle ; soit la forme :

$$y_k = \sum_{i=0}^{N} h_i \cdot x_{k-i} \tag{8.4}$$

Ainsi les filtres à réponse impulsionnelle finie pourront être réalisés directement à partir de filtres non récursifs. En effet l'équation 8.4 correspond à l'équation 8.2 pour laquelle les coefficients a_i sont les valeurs échantillonnées h_i de la réponse impulsionnelle $h(t)$. Il est important de noter que ces filtres peuvent aussi être réalisés à partir de filtres récursifs.

L'autre catégorie de filtres numériques sont dits à réponse impulsionnelle infinie (**RII**) ou filtres généraux (**ARMA**) pour lesquels la relation 8.4 ne sera pas applicable et il sera nécessaire d'utiliser l'équation générale 8.1. Il est possible de définir une catégorie particulière des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie, appelés filtres autorégressifs (**AR**) pour lesquels nous avons la relation suivante (cas particulier de la relation 8.1) :

$$y_k = x_k - \sum_{j=1}^{N} b_j \cdot y_{k-j}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Copyright © 2017 Dunod.

Enfin il ne faut pas oublier que, comme pour les filtres analogiques et puisque nous disposons d'une transformée de Fourier discrète (TFD), il est possible d'appliquer le produit dans l'espace des fréquences discrètes après une TFD et un retour dans l'espace des temps discrets par une transformée de Fourier discrète inverse. Nous avons ainsi le même schéma que celui présenté au paragraphe 3.2 :

Temps	x_k	$\rightarrow$	convolution par h_k	$\rightarrow$	y_k
	$\downarrow$ Transformée de Fourier discrète				$\uparrow$ Transformée de Fourier discrète
	$\downarrow$				$\uparrow$
Fréquence	X_k	$\rightarrow$	produit par H_k	$\rightarrow$	Y_k

Ainsi la conception et la réalisation des filtres numériques doivent être abordées selon les trois aspects essentiels suivants :

– modèle du filtre numérique : modèle obtenu par analogie avec un filtre analogique ou modèle direct dans des cas spécifiques ;

– synthèse du filtre numérique basée sur : l'équation aux différences (cas général), l'équation de convolution pour les filtres à réponse impulsionnelle finie ou la transformée de Fourier discrète ;

– réalisation du filtre numérique : algorithme ou composants électroniques numériques.

Nous allons introduire un autre outil permettant un traitement plus facile des signaux discrets, en particulier dans le cadre des filtres numériques dont la synthèse est basée sur l'utilisation de l'équation aux différences : la transformée en z.

Copyright © 2017 Dunod.

8.1.2 Transformée en z

Dans le cas des signaux analogiques, on dispose de transformées (transformée de Fourier ou transformée de Laplace) permettant d'étudier et de traiter les signaux dans des domaines plus aisés (respectivement plan fréquentiel ou domaine de Laplace). Dans le cas des signaux discrets, ces transformées sont très limitées, en particulier pour les signaux possédant une infinité d'échantillons.

Pour cela, une transformée des signaux discrets a été introduite : la transformée en z. Cette transformée en z, notée $S(z)$, d'un signal $s(t)$ causal, échantillonné à la période T_e, s'exprime à l'aide de la variable complexe z selon la relation suivante :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k \cdot z^{-k} \tag{8.5}$$

L'origine de cette transformée en z s'explique en considérant le calcul de la transformée de Laplace d'un signal échantillonné causal. Soit le signal causal $s(t)$ échantillonné à la fréquence F_e, le signal échantillonné s'exprime par :

$$s_e(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$$

La transformée de Laplace $S(p)$ de ce signal échantillonné causal $s_e(t)$, obtenue en remplaçant $j2\pi f$ par p dans la transformée de Fourier, est :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s_e(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt} \cdot \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e) \right] \cdot \mathrm{e}^{-pt} \cdot \mathrm{d}t$$

Étant donné les propriétés de δ, il vient :

$$S(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \mathrm{e}^{-pkT_e}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

En effectuant le changement de variables $z = e^{pT_e}$, nous retrouvons la transformée en z du signal $s(t)$ définie par la relation 8.5.

La propriété la plus importante de cette transformée est le retard temporel. Connaissant la transformée en z $S(z)$ d'un signal $s(t)$, on cherche à obtenir la transformée en z du même signal $s(t)$ retardé du temps mT_e : $s(t - mT_e)$. À partir de l'expression 8.5, il vient :

$$s(t) \xrightarrow{z} S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) \cdot z^{-k}$$

et :

$$s(t - mT_e) \xrightarrow{z} \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e - mT_e) \cdot z^{-k}$$

En posant $k' = k - m$ et étant donné que le signal $s(t)$ est causal, nous obtenons :

$$s(t - mT_e) \xrightarrow{z} \sum_{k'=-m}^{+\infty} s(k'T_e) \cdot z^{-k'-m} = \left[\sum_{k'=0}^{+\infty} s(k'T_e) \cdot z^{-k'}\right] \cdot z^{-m} = S(z) \cdot z^{-m}$$

Ainsi, « z^{-1} » est appelé l'opérateur retard et fait correspondre à un signal le même signal retardé d'un échantillon.

8.1.3 Filtrage numérique simple : lissage temporel

Avant d'étudier la mise en place de filtre numérique à partir des relations 8.1 et 8.4, la capacité de calcul qu'offrent les systèmes numériques permet de réaliser des opérations numériques de filtrage linéaire simple comme la moyenne temporelle glissante d'ordre N. Ce type de traitement numérique va permettre de réaliser un « lissage » du signal d'entrée conduisant par exemple à la suppression d'un bruit résiduel ou à l'atténuation d'un bruit de type impulsif. Par contre ce type de traitement peut modifier fortement le signal informatif. La plus courante de ces techniques est donc la moyenne temporelle glissante d'ordre N qui

Copyright © 2017 Dunod.

s'exprime par :

$$y_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_{k-i}$$

Nous pouvons remarquer que cette opération correspond à l'équation aux différences 8.2 des filtres non récursifs pour laquelle les coefficients a_i sont tous égaux à $1/N$.

L'utilisation de cette technique de lissage temporel sur un signal de bruit blanc donne de bons résultats. Soit un bruit blanc uniforme d'amplitude variant entre -1 et $+1$ avec une moyenne nulle et un écart type de 0,6, l'amplitude du bruit peut être diminuée jusqu'à un intervalle $[-0,6, +0,6]$ avec un écart type de 0,18 dans le cas de 10 valeurs moyennées (*cf.* figures 8.2 et 8.3). Plus le nombre N de valeurs moyennées sera grand, meilleur sera le lissage ; par contre le signal informatif est lui aussi moyenné et perd donc de l'information. Pour illustrer ce phénomène, prenons l'exemple de deux signaux classiques : échelon unité $u(t)$ et impulsion de largeur unité. Dans les deux cas, la transition brusque du signal u(t) ou le pic de l'impulsion sont fortement atténués par le lissage (*cf.* figures 8.4 et 8.5). Nous verrons à la fin du chapitre une méthode permettant de conserver les transitions (technique de la valeur médiane). En conclusion cette technique est efficace sur les signaux lentement variables par rapport aux bruits qui doivent être éliminés (bruit blanc, bruit de type impulsif, ...).

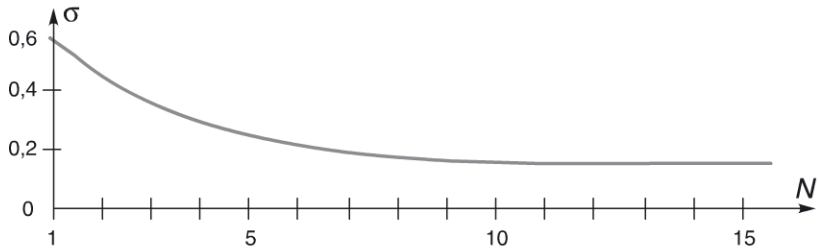

Figure 8.2 – Résultat sur l'écart type d'un traitement par lissage temporel d'un bruit blanc uniforme en fonction du nombre *N* de valeurs moyennées.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

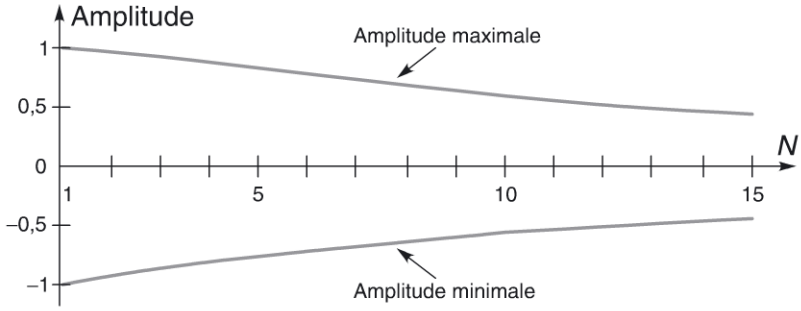

Figure 8.3 – Résultat sur l'amplitude d'un traitement par lissage temporel d'un bruit blanc uniforme en fonction du nombre *N* de valeurs moyennées.

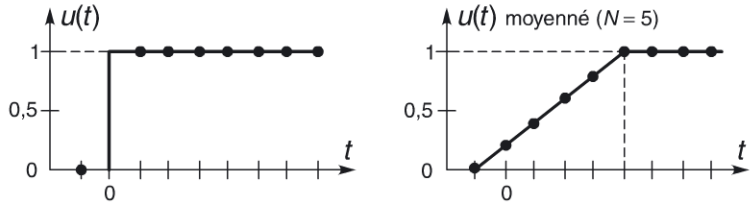

Figure 8.4 – Effet d'un traitement par lissage temporel sur un signal « échelon unité ».

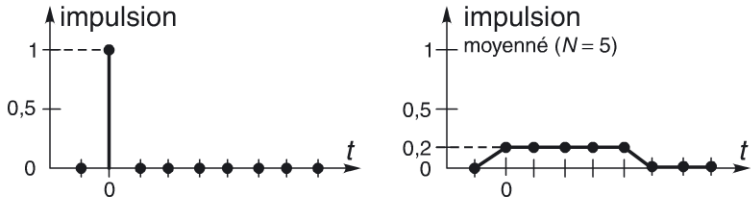

Figure 8.5 – Effet d'un traitement par lissage temporel sur un signal « impulsion unité ».

8.2 Synthèse des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie

La conception et la réalisation des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie sont essentiellement basées sur la fonction de transfert $H(z)$: gabarit de filtrage de type passe-bas, passe-haut, passe-bande ou

Copyright © 2017 Dunod.

coupe-bande. La première étape est donc l'obtention de cette fonction de transfert à partir de l'équation aux différences.

8.2.1 Équation aux différences

Nous considérons des filtres numériques linéaires et invariants dans le temps correspondant aux filtres analogiques décrits par des équations différentielles à coefficients constants. Dans cette hypothèse, les systèmes sont représentés par des équations aux différences de la forme (*cf.* équation 8.1) :

$$y_k = \sum_{i=0}^{N} a_i \cdot x_{k-i} - \sum_{j=1}^{N} b_j \cdot y_{k-j} \quad \text{ou} \quad \sum_{j=0}^{N} b_j \cdot y_{k-j} = \sum_{i=0}^{N} a_i \cdot x_{k-i} \quad \text{avec } b_0 = 1$$

Cette équation aux différences est une équation linéaire à coefficients constants d'ordre N du filtre numérique. En appliquant la transformée en z à l'équation générale précédente et soient $Y(z)$ et $X(z)$ les transformées en z de y_k et x_k, il vient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left[\sum_{j=0}^{N} b_j \cdot y_{k-j} \right] z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\sum_{i=0}^{N} a_i \cdot x_{k-i} \right] z^{-k}$$

soit :

$$Y(z) \cdot \sum_{j=0}^{N} b_j \cdot z^{-j} = X(z) \cdot \sum_{i=0}^{N} a_i \cdot z^{-i}$$

Par analogie avec les filtres analogiques, un filtre numérique peut être caractérisé par sa fonction de transfert en z ou « transmittance » en z $H(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i \cdot z^{-i}}{\sum_{j=0}^{N} b_j \cdot z^{-j}} \tag{8.6}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

ou dans le cas d'un filtre non-récursif :

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N} a_i \cdot z^{-i} \tag{8.7}$$

Ensuite la question fondamentale à résoudre est comment obtenir $H(z)$ pour des caractéristiques bien définies (gain, phase, ...) correspondant par exemple à un filtre analogique défini par son équation différentielle ou par sa fonction de transfert $H(p)$: c'est le domaine très vaste de la synthèse des filtres numériques. Les méthodes qui permettent de déterminer une fonction de transfert $H(p)$ répondant à des spécifications données de gain et de phase ou à des réponses impulsionnelles ou indicielles sont bien connues dans le cas des filtres analogiques. Une première approche à cette problématique est de réaliser une transposition du filtre analogique en filtre numérique.

8.2.2 Synthèse des filtres numériques par transformation de *H(p)* en *H(z)*

Le procédé le plus utilisé pour calculer la fonction de transfert d'un filtre numérique, consiste à transposer la fonction de transfert $H_p(p)$ de son homologue analogique du plan « p » dans le plan « z » par une règle de transformation reliant p à z. Pour réaliser cette transformation et déterminer la fonction de transfert $H_z(z)$ dans le plan z, il suffit de définir une relation $p = F_{\text{onction}}(z)$, d'où :

$$H_z(z) = H_p(p = F_{\text{onction}}(z))$$

La relation exacte entre p et z est donnée par la définition même de la transformée en z vue dans le paragraphe précédent :

$$z = \mathrm{e}^{pT_e}$$

soit :

$$p = \frac{1}{T_e} \cdot \mathrm{Ln}\ (z) \tag{8.8}$$

Copyright © 2017 Dunod.

Dans le domaine étudié des filtres linéaires invariants, $H_p(p)$ se présente sous la forme d'un quotient de deux polynômes en p. Mais si on réalise la transformation de $H_p(p)$ en $H_z(z)$ en utilisant la relation 8.8, la forme résultante de $H_z(z)$ ne sera pas un quotient de deux polynômes en z. Comme nous l'étudieront, cela conduit à des difficultés de réalisation. Aussi, il est nécessaire de rechercher une règle de transformation qui permet de conserver la forme « quotient de deux polynômes ».

De nombreuses méthodes ont été développées pour réaliser cette transformation. Elles correspondent à différents types d'analogie dans le sens où une méthode va privilégier telle ou telle propriété : gain, réponse impulsionnelle, réponse indicielle, etc. Ainsi, les principales méthodes sont les suivantes :

- transformation standard ou méthode de l'invariance impulsionnelle ;
- méthode de l'invariance indicielle ;
- transformation adaptée ;
- transformation d'Euler ou équivalence de la dérivation ;
- transformation homographique ou équivalence de l'intégration.

Pour chacune de ces transformations, nous décrirons brièvement la méthode pour transformer $H(p)$ en $H(z)$, les conditions pour pouvoir réaliser cette transformation et, enfin, les avantages et inconvénients de cette méthode.

a) Transformation standard ou méthode de l'invariance impulsionnelle

Par cette méthode on obtient un filtre numérique dont la réponse impulsionnelle est égale à la réponse impulsionnelle échantillonnée du filtre analogique correspondant. En considérant la fonction de transfert $H(p)$ ou $H(f)$ et la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre analogique, la réponse impulsionnelle, échantillonnée à la période T_e, s'exprime par :

$$h_e(t) = T_e \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} h(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Copyright © 2017 Dunod.

Le coefficient T_e correspond au fait que la réponse impulsionnelle étant échantillonnée, la fonction de transfert est périodisée avec la fréquence F_e. Soit la relation :

$$H_e(f) = H(f) * \mathrm{Pgn}_{F_e}(f) \quad \text{d'où} \quad h_e(t) = h(t) \cdot [T_e \cdot \mathrm{Pgn}_{T_e}(t)]$$

Par conséquent la transformée en z $H_e(z)$ de $h_e(t)$ est donnée par :

$$H_e(z) = T_e \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} h(kT_e) \cdot z^{-k}$$

Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas du premier ordre de fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{a_i}{p - p}$$

La transformée de Laplace inverse nous donne la réponse impulsionnelle du filtre analogique (*cf.* annexes) :

$$h(t) = a_i \cdot \mathrm{e}^{p_i t}$$

La transformée en z du filtre numérique de réponse impulsionnelle $h_e(t)$, échantillonnée de $h(t)$, s'écrit donc :

$$H_e(z) = T_e \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} [a_i \cdot \mathrm{e}^{p_i k T_e}] \cdot z^{-k}$$

La somme sur k est une progression géométrique dont la limite permet d'obtenir finalement l'expression de $H_e(z)$:

$$H_e(z) = T_e \cdot \frac{a_i}{1 - \mathrm{e}^{p_i T_e} \cdot z^{-1}}$$

Ainsi la transformation à réaliser pour obtenir le filtre numérique à partir du filtre analogique caractérisé par sa fonction de transfert $H(p)$ est :

$$\frac{1}{p - p_i} \longrightarrow T_e \cdot \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \tag{8.9}$$

Copyright © 2017 Dunod.

Si un filtre quelconque peut s'exprimer sous la forme de r filtres du premier ordre en parallèle, cette méthode consiste à réaliser dans $H(p)$ la transformation suivante :

$$H(p) = \sum_{i=0}^{r} \frac{a_i}{p - p_i} \longrightarrow H(z) = \sum_{i=0}^{r} T_e \cdot \frac{a_i}{1 - \mathrm{e}^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \tag{8.10}$$

La transformation standard ou méthode de l'invariance impulsionnelle est caractérisée par :

– condition : la fréquence de coupure haute du filtre doit être très inférieure à la fréquence de Shannon ;
– domaine d'application : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres passe-bas ou des filtres passe-bande ;
– inconvénient : le principal inconvénient réside dans le fait qu'il faille réaliser la décomposition en éléments simples pour calculer l'équation aux différences du filtre numérique.

b) Méthode de l'invariance indicielle

Par cette méthode on obtient un filtre numérique dont la réponse indicielle est égale à la réponse indicielle échantillonnée du filtre analogique correspondant. La réponse indicielle $s_{\text{ind}}(t)$ s'obtient en utilisant la relation suivante (*cf.* équation 3.12) :

$$s_{\text{ind}}(t) = h(t) * u(t)$$

La fonction $u(t)$ est la fonction unité ou échelon d'Heaviside, précédemment étudiée, qui a pour transformée de Laplace $1/p$. La transformée en z de cette fonction est très simple à établir :

$$U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u(kT_e) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Les transformées de Laplace et en z de l'équation donnant $s_{\text{ind}}(t)$ sont respectivement :

$$S_{\text{ind}}(p) = H(p) \cdot U(p) = \frac{H(p)}{p}$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

et :

$$S_{\text{ind}}(z) = H(z) \cdot U(z) = H(z) \cdot \frac{z}{z-1}$$

En considérant que $[H(p)/p]$ peut être mis sous la forme d'une somme d'éléments simples du premier ordre, nous pouvons utiliser la transformation précédente (*cf.* équation 8.9). Mais à cette expression $[H(p)/p]$ correspond $[H(z)(z/1 - z)]$, par conséquent, nous considérerons la transformation suivante :

$$\frac{1}{p - p_i} \longrightarrow \frac{z-1}{z} \cdot \frac{T_e}{1 - \mathrm{e}^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \tag{8.11}$$

Ainsi, pour un filtre quelconque s'exprimant sous la forme de r filtres du premier ordre en parallèle, nous avons la relation complète donnant $H(z)$:

$$H(p) = \sum_{i=0}^{r} \frac{a_i}{p - p_i} \longrightarrow H(z) = \left[T_e \cdot \frac{z-1}{z}\right] \sum_{i=0}^{r} \frac{a_i}{1 - \mathrm{e}^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \tag{8.12}$$

La transformation par la méthode de l'invariance indicielle est caractérisée par :

- condition : la fréquence de coupure haute du filtre doit être inférieure à la fréquence de Shannon ;
- domaine d'application : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres passe-bas ou des filtres passe-bande ;
- inconvénient : le principal inconvénient réside dans le fait qu'il faille réaliser la décomposition en éléments simples pour calculer l'équation aux différences du filtre numérique.

c) Transformation adaptée

Par cette méthode, appelée aussi *matched transform*, on obtient un filtre numérique dont les pôles de la fonction de transfert ou transmittance sont conservés. En considérant que $H(p)$ est sous la forme d'un produit d'éléments simples du premier ordre (filtre analogique ne présentant

Copyright © 2017 Dunod.

que des pôles), cette méthode consiste à réaliser dans $H(p)$ la transformation identique à la précédente, c'est-à-dire celle de l'équation 8.9. Pour un filtre quelconque s'exprimant sous la forme de r filtres du premier ordre en série, nous obtenons alors la relation complète :

$$H(p) = \prod_{i=0}^{r} \frac{a_i}{p - p_i} \longrightarrow H(z) = T_e \cdot \prod_{i=0}^{r} \frac{a_i}{1 - \mathrm{e}^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \qquad (8.13)$$

d) Transformation d'Euler ou équivalence de la dérivation

Étant donné une équation différentielle reliant deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, la méthode, qui correspond à une démarche classique en analyse numérique, consiste à donner une approximation de la dérivée d'une fonction continue. Dans le cas de la transformation d'Euler, l'approximation réalisée est la plus simple :

$$y(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \longrightarrow y_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$$

Cette approximation correspond également à l'approximation d'une intégrale par la « méthode des rectangles » :

$$x(t) = \int_0^t y(t) \cdot \mathrm{d}t \longrightarrow x_k = x_{k-1} + T_e \cdot y_k$$

La transformée de Laplace de l'équation différentielle initiale est :

$$Y(p) = p \cdot X(p) \qquad \text{d'où} \quad H(p) = p$$

La transformée en z de l'équation différentielle initiale discrétisée est :

$$Y(z) = \frac{1}{T_e} \cdot [X(z) - X(z) \cdot z^{-1}] = \frac{1 - z^{-1}}{T_e} \cdot X(z)$$

soit : $H(z) = \dfrac{1 - z^{-1}}{T_e}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

Cette méthode consiste donc à réaliser dans $H(p)$ la transformation suivante :

$$p \longrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e} \tag{8.14}$$

La transformation d'Euler ou par équivalence à la dérivation est caractérisée par :

– domaine d'application : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres analogiques simples ;

– inconvénient : le principal inconvénient est la distorsion des caractéristiques en hautes fréquences.

e) Transformation homographique ou équivalence de l'intégration

De la même manière que précédemment, cette méthode consiste à donner une approximation de l'intégrale d'une fonction continue. Dans ce cas, l'approximation réalisée est celle de la « méthode des trapèzes » :

$$x(t) = \int_0^t y(t) \cdot \mathrm{d}t \longrightarrow x_k = x_{k-1} + \frac{T_e}{2} \cdot [y_k + y_{k-1}]$$

La transformée en z de l'équation différentielle discrétisée est :

$$X(z) = X(z) \cdot z^{-1} + \frac{T_e}{2} \cdot [Y(z) + Y(z) \cdot z^{-1}]$$

soit $\quad H(z) = \dfrac{2}{T_e} \cdot \dfrac{[1 - z^{-1}]}{[1 + z^{-1}]}$

Soit après une transformation en z, cette méthode consiste donc à réaliser dans $H(p)$ la transposition suivante :

$$p \longrightarrow \frac{2}{T_e} \cdot \frac{[1 - z^{-1}]}{[1 + z^{-1}]} \tag{8.15}$$

La transformation homographique ou par équivalence à l'intégration ou encore appelée transformation bilinéaire est caractérisée par :

Copyright © 2017 Dunod.

– domaine d'application : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres dont la caractéristique fréquentielle est constante dans des domaines de fréquences données ;
– avantage : le principal avantage de ce filtre est sa stabilité.

f) Exemples de synthèses de filtres numériques

Nous allons synthétiser deux filtres analogiques (filtre passe-bas du premier ordre et filtre passe-bas du deuxième ordre – *cf.* paragraphe 3.2.2) à l'aide des deux dernières transformations étudiées (transformation par équivalence à la dérivation et transformation par équivalence à l'intégration).

• Filtre passe-bas du premier ordre :

Soit la constante de temps du filtre ($RC = \tau$), la représentation en transformée de Laplace de la fonction de transfert $H(p)$ d'un filtre passe-bas du premier ordre est :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau \cdot p}$$

Considérons le filtre numérique passe-bas obtenu par équivalence de la dérivation. Étant donné une période d'échantillonnage de T_e, nous avons la relation de transformation 8.14 à appliquer. Nous obtenons ainsi $H(z)$:

$$H(z) = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{\tau}{T_e}\right) - \dfrac{\tau}{T_e} \cdot z^{-1}}$$

Le calcul de l'équation aux différences est alors immédiat, soit le résultat suivant :

$$y_k = \frac{\dfrac{\tau}{T_e}}{1 + \dfrac{\tau}{T_e}} \cdot y_{k-1} + \frac{1}{1 + \dfrac{\tau}{T_e}} x_k$$

Avec l'application numérique suivante : $\tau = 1$ ms ($R = 1$ KΩ, $C = 1\ \mu$F), et $T_e = 100\ \mu$s, l'équation aux différences à résoudre est :

$$y_k = 0,9090909 \cdot y_{k-1} + 0,090909 \cdot x_k$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Il est primordial de déterminer d'une part les échantillons x_k entrées du filtre :

– réponse impulsionnelle : $x_1 = 1$, $x_k = 0$ pour tout $k > 1$;

– réponse indicielle : $x_k = 1$ pour tout $k \geq 1$

et d'autre part les conditions initiales, c'est-à-dire y_0, soit :

– $y_0 = 1$ (valeur estimée ou connue de la solution).

Considérons maintenant le même filtre numérique passe-bas obtenu par la méthode de l'équivalence à l'intégration. Nous avons la relation de transformation 8.15 à appliquer et nous obtenons ainsi $H(z)$:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{\left(1 + \dfrac{2\tau}{T_e}\right) + \left(1 - \dfrac{2\tau}{T_e}\right) \cdot z^{-1}}$$

Le calcul de l'équation aux différences est alors immédiat et donne le résultat suivant :

$$y_k = \frac{1}{1 + \dfrac{2\tau}{T_e}} \cdot \left[\left(\frac{2\tau}{T_e} - 1\right) \cdot y_{k-1} + x_k + x_{k-1}\right]$$

Avec la même application numérique que précédemment : $\tau = 1$ ms ($R = 1$ KΩ, $C = 1$ μF), et $T_e = 100$ μs, l'équation aux différences à résoudre est :

$$y_k = 0,904761 \cdot y_{k-1} + 0,047619 \cdot (x_k + x_{k-1})$$

Il est primordial de déterminer d'une part les échantillons x_k d'entrées du filtre :

– réponse impulsionnelle : $x_1 = 1$, $x_k = 0$ pour tout $k > 1$;

– réponse indicielle : $x_k = 1$ pour tout $k \geq 1$;

et d'autre part les conditions initiales, c'est-à-dire y_0, et x_0 soit :

– $x_0 = 0$ (signal causal) ;

Copyright © 2017 Dunod.

– $y_0 = 1$ (valeur estimée ou connue de la solution).

Les figures 8.6 et 8.7 représentent les résultats obtenus pour les deux filtres numériques en comparaison des réponses théoriques pour respectivement la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle.

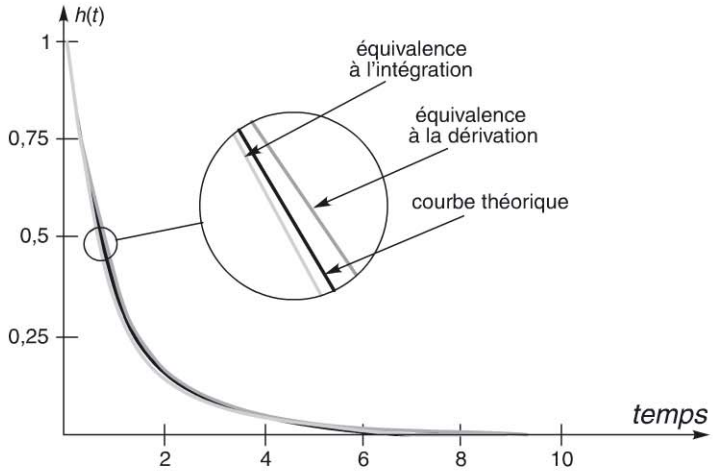

Figure 8.6 – Réponses impulsionnelles de deux filtres numériques passe-bas du premier ordre : filtre numérique synthétisé par équivalence de la dérivation et par équivalence de l'intégration. Comparaison avec la réponse théorique.

D'une façon générale, ces résultats montrent que les deux filtres numériques ont une réponse quasiment identique à celle du filtre analogique. D'une façon plus détaillée, nous pouvons remarquer que la synthèse du filtre numérique avec l'équivalence à la dérivation a un comportement initial meilleur, mais ensuite converge moins vite vers la réponse du filtre analogique théorique.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

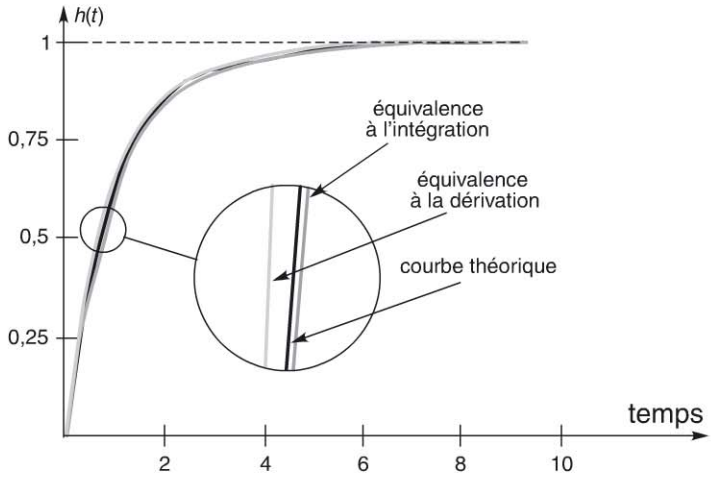

Figure 8.7 – Réponses indicielles de deux filtres numériques passe-bas du premier ordre : filtre numérique synthétisé par équivalence de la dérivation et par équivalence de l'intégration. Comparaison avec la réponse théorique.

Remarque

il est nécessaire de réaliser un calcul numérique précis des coefficients de l'équation aux différences pour obtenir des résultats corrects au niveau de la synthèse par programme (*cf.* paragraphe suivant).

• Filtre passe-bas du deuxième ordre :

En considérant une fréquence propre $F_0(\omega_0 = 2\pi F_0)$ et un coefficient d'amortissement m, la représentation de la fonction de transfert $H(p)$ d'un filtre passe-bas du deuxième ordre est :

$$H(p) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot m \cdot p + p^2}$$

Considérons le filtre numérique passe-bas du deuxième ordre obtenu par équivalence de la dérivation. Étant donné une période d'échantillonnage de T_e, nous avons la relation de transformation 8.14 à appliquer.

Copyright © 2017 Dunod.

Nous obtenons ainsi la transmittance en z suivante :

$$H(z) = \frac{\omega_0^2 T_e^2}{(1 + 2\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2) - 2 \cdot (1 + \omega_0 m T_e) \cdot z^{-1} + z^{-2}}$$

À partir de cette transmittance en z, le calcul de l'équation aux différences donne le résultat suivant :

$$y_k = b_1 \cdot y_{k-1} + b_2 \cdot y_{k-2} + a_0 \cdot x_k$$

avec les valeurs des coefficients :

$$b_1 = \frac{2 \cdot (1 + \omega_0 m T_e)}{1 + 2\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}$$

$$b_2 = \frac{-1}{1 + 2\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}$$

et :

$$a_0 = \frac{\omega_0^2 T_e^2}{1 + 2\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}$$

Avec l'application numérique suivante $T_e = 2$ ms ($F_e = 500$ Hz), $F_0 = 50$ Hz et $m = 0,1$; les coefficients de l'équation aux différences à résoudre sont :

$$b_1 = 1,39805 \quad b_2 = -0,65770 \quad \text{et} \quad a_0 = 0,25965$$

Les échantillons x_k d'entrées du filtre et les conditions initiales sont les suivantes :

– réponse impulsionnelle : $x_1 = 1$, $x_k = 0$ pour tout $k > 1$;

– $y_0 = y_{-1} = 1$ (valeur estimée ou connue de la solution).

Considérons le filtre numérique passe-bas du deuxième ordre obtenu par équivalence de l'intégration. Étant donné une période d'échantillonnage de T_e, nous avons la relation de transformation 8.15 à appliquer. Nous obtenons ainsi la transmittance en z suivante :

$$H(z) = \frac{\omega_0^2 \cdot T_e^2 \cdot (1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{(4 + 4\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2) - 2 \cdot (4 - \omega_0^2 T_e^2) \cdot z^{-1} + (4 - 4\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2) \cdot z^{-2}}$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

À partir de cette transmittance en z, le calcul de l'équation aux différences donne le résultat suivant :

$$y_k = b_1 \cdot y_{k-1} + b_2 \cdot y_{k-2} + a_0 \cdot x_k + a_1 \cdot x_{k-1} + a_2 \cdot x_{k-2}$$

avec les valeurs des coefficients :

$$b_1 = \frac{2 \cdot (4 - \omega_0^2 T_e^2)}{4 + 4\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}$$

$$b_2 = -\frac{4 - 4\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}{4 + 4\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}$$

$$a_0 = a_2 = -\frac{\omega_0^2 T_e^2}{4 + 4\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}$$

et $$a_1 = 2 \cdot a_0$$

Avec la même application numérique suivante $T_e = 2$ ms ($F_e = 500$ Hz), $F_0 = 50$ Hz et $m = 0,1$; les coefficients de l'équation aux différences à résoudre sont :

$$b_1 = 1,55193 \qquad b_2 = -0,89181$$

et $$a_0 = a_2 = 0,084971 \qquad a_1 = 0,169942$$

Les échantillons x_k d'entrées du filtre et les conditions initiales sont les suivantes :

– réponse impulsionnelle : $x_1 = 1$, $x_k = 0$ pour tout $k > 1$;

– $x_0 = x_{-1} = 0$ (signal causal) ;

– $y_0 = y_{-1} = 1$ (valeur estimée ou connue de la solution).

La figure 8.8 présente les résultats obtenus pour les deux filtres numériques en comparaison de la réponse théorique pour la réponse impulsionnelle.

Les résultats obtenus pour ces deux synthèses d'un filtre passe-bas du deuxième ordre montrent clairement la plus grande efficacité de l'équivalence de l'intégration par rapport à l'équivalence de la dérivation. Ce

Copyright © 2017 Dunod.

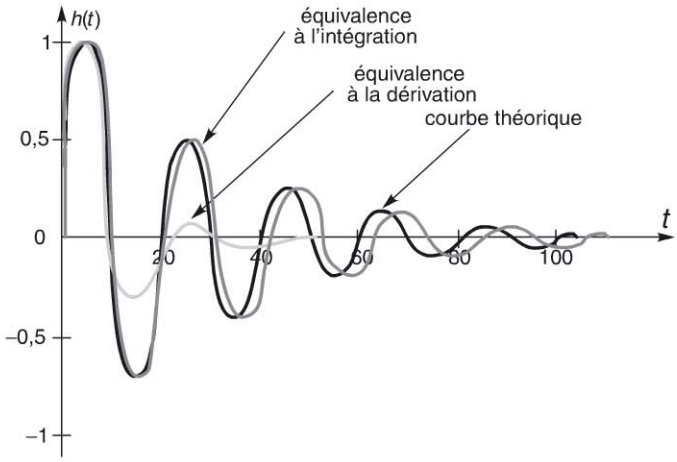

Figure 8.8 – Réponses impulsionnelles de deux filtres numériques passe-bas du deuxième ordre : filtre numérique synthétisé par équivalence de la dérivation et par équivalence de l'intégration. Comparaison avec la réponse théorique.

résultat s'explique par le fait que le filtre du deuxième ordre étant basé sur une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre comme son nom l'indique, il est relativement difficile de le synthétiser par une approximation du premier ordre (cas de l'équivalence à la dérivation).

8.3 Synthèse des filtres numériques à réponse impulsionnelle finie

La convolution intervient dans tous les systèmes de filtrage linéaire et consiste en la modification du signal d'entrée par la caractéristique temporelle du système ou réponse impulsionnelle. Le filtre analogique, étant défini par sa fonction de transfert $H(p)$ et sa réponse impulsionnelle $h(t)$, le signal de sortie $y(t)$ du filtre soumis au signal d'entrée $x(t)$ est donné par la relation connue : $y(t) = x(t) * h(t)$.

Dans le cas de filtre à réponse impulsionnelle finie, le filtrage numérique par convolution correspond à une sommation pondérée des valeurs du signal d'entrée $x(kT_e) = x_k$ par la suite des coefficients de la réponse impulsionnelle discrète $h(kT_e) = h_k$ du filtre selon la relation 8.4. La

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

réponse impulsionnelle ayant une durée finie, le nombre d'échantillons est limité. Soit N le nombre de valeurs de h_k connues :

$$y_k = \sum_{i=0}^{N-1} h_i \cdot x_{k-i} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot h_{k-i} \tag{8.16}$$

Dans beaucoup de réalisations de filtre numérique, le point de départ est la réponse fréquentielle du filtre $H(f)$ donnée par un gabarit. Partant de cette réponse fréquentielle discrétisée $H_e(f)$, il est aisé d'obtenir la réponse impulsionnelle discrétisée $h_e(t)$ par transformée de Fourier discrète. La discrétisation de la réponse impulsionnelle a conduit à la périodisation du spectre comme nous l'avons vu dans le chapitre 6, soit :

$$H_e(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} H(f - kF_e)$$

d'où la forme de $h_e(t)$, calculée sur N points, pour conserver la réponse fréquentielle :

$$\begin{aligned} h_e(t) &= T_e \cdot \sum_{-N/2}^{N/2-1} h_k \cdot \delta(t - kT_e) = \sum_{-N/2}^{N/2-1} (T_e \cdot h_k) \cdot \delta(t - kT_e) \\ &= \sum_{-N/2}^{N/2-1} h'_k \cdot \delta(t - kT_e) \end{aligned}$$

Ainsi les échantillons de la réponse impulsionnelle $h_e(t)$ sont h'_k. Dans le cas où la réponse impulsionnelle obtenue n'est pas causale, il est possible de retarder cette réponse impulsionnelle de $N/2$ points pour rendre le filtre causal.

$$h_e(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h'_{k-N/2} \cdot \delta(t - kT_e)$$

Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure F_c, correspondant à une constante de temps τ

Copyright © 2017 Dunod.

(= $1/(2\pi F_c)$). La réponse impulsionnelle, calculée dans le paragraphe 3.2.2, s'exprime à partir des échantillons suivants :

$$h_k' = \frac{T_e}{\tau} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{kT_e}{\tau}}$$

La réponse impulsionnelle est causale, mais pas finie. Aussi nous considérerons uniquement un intervalle pour lequel la fonction précédente est supérieure ou égale à 5 % de la valeur maximale. Prenons l'exemple numérique suivant :

$$\tau = 0,5 \text{ ms} \quad (F_c = 320 \text{ KHz}), \qquad T_e = 0,1 \text{ ms}$$

Le nombre d'échantillons de la réponse impulsionnelle est alors limité à 20, correspondant au temps 2 ms. Ainsi nous avons :

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h_k'	0,2	0,164	0,134	0,11	0,09	0,074	0,06	0,049	0,04	0,033

N	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
h_k'	0,027	0,022	0,018	0,015	0,012	0,01	0,008	0,007	0,005	0,004

En considérant une sollicitation de type impulsion de durée $2 \cdot T_e$, le résultat, obtenu par la relation 8.16 et représenté sur la figure 8.9, montre la bonne qualité de ce filtre numérique pour synthétiser ce filtre passe-bas très simple. Le décalage en amplitude entre la courbe de réponse théorique et la courbe calculée avec le filtre numérique est dû au premier pas de calcul et à la valeur initiale de la réponse impulsionnelle discrétisée (= T_e/τ). Un pas d'échantillonnage T_e plus petit par rapport à la constante de temps τ diminuerait fortement ce décalage.

8.4 Réalisation des filtres numériques

À partir de l'expression de la transmittance en z du filtre numérique ou de l'équation de convolution, il faut concevoir l'algorithme du calcul ou la structure matérielle permettant de réaliser ce filtre.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

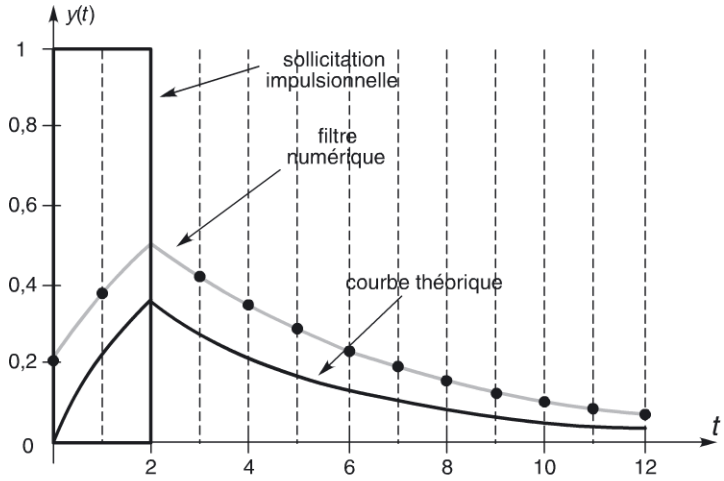

Figure 8.9 – Réponses d'un filtre numérique passe-bas du premier ordre synthétisé par l'équation de convolution.

La réalisation des filtres numériques peut être faite en utilisant les trois éléments de base (matériel ou logiciel) suivants :

– additionneur, { symbolisé par Σ } ;

– multiplieur, { symbolisé par X } ;

– retard de T_e : échantillon k par rapport à $k - 1$, { symbolisé par T }. Cette opération sera réalisée matériellement par des registres à décalage.

8.4.1 Filtres numériques synthétisés par *H(z)*

À partir de la fonction de transfert $H(z)$, obtenue selon les différentes transformations possibles, diverses structures peuvent être utilisées : structure **directe** (implémentation de l'équation aux différences), structure **canonique** (structure directe avec minimisation des composants) et structure **en éléments simples**.

a) Structure directe

Cette structure est l'application directe des expressions de la transmittance $H(z)$. Dans le cas d'un filtre non-récursif, une des structures pos-

Copyright © 2017 Dunod.

sibles est celle représentée sur le schéma de la figure 8.10 qui traduit l'équation 8.2.

De même, la traduction directe de l'expression de $H(z)$ pour un filtre récursif donne le schéma de la figure 8.11 qui traduit l'équation générale 8.1.

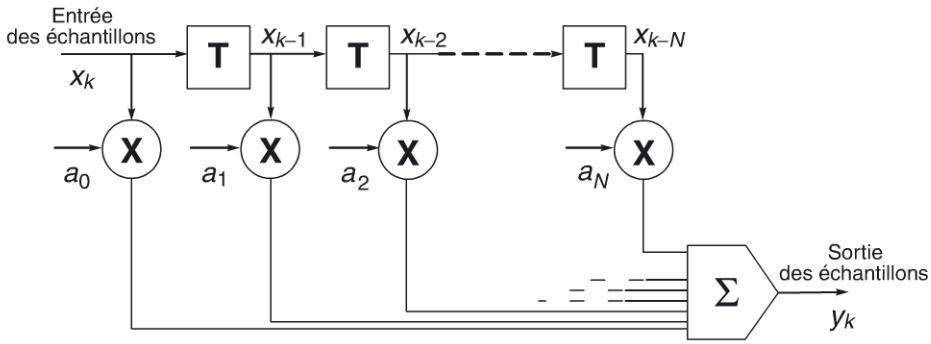

Figure 8.10 – Structure directe d'un filtre numérique non-récursif.

b) Structure canonique

Cette forme permet de minimiser le nombre d'éléments utilisés dans la réalisation du filtre. L'équation générale peut s'écrire sous la forme :

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = W(z) \cdot V(z)$$

avec $W(z) = \sum_{j=0}^{N} a_j \cdot z^{-j}$ système non récursif et $V(z) = \dfrac{X(z)}{\sum_{i=0}^{N} b_i \cdot z^{-i}}$

L'expression de $Y(z)$ est donc :

$$Y(z) = \left[\sum_{j=0}^{N} a_j \cdot z^{-j}\right] \cdot V(z)$$

En prenant la transformée en z inverse, on obtient l'expression de y_k en fonction de la valeur intermédiaire v_k qui est utilisée pour construire

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

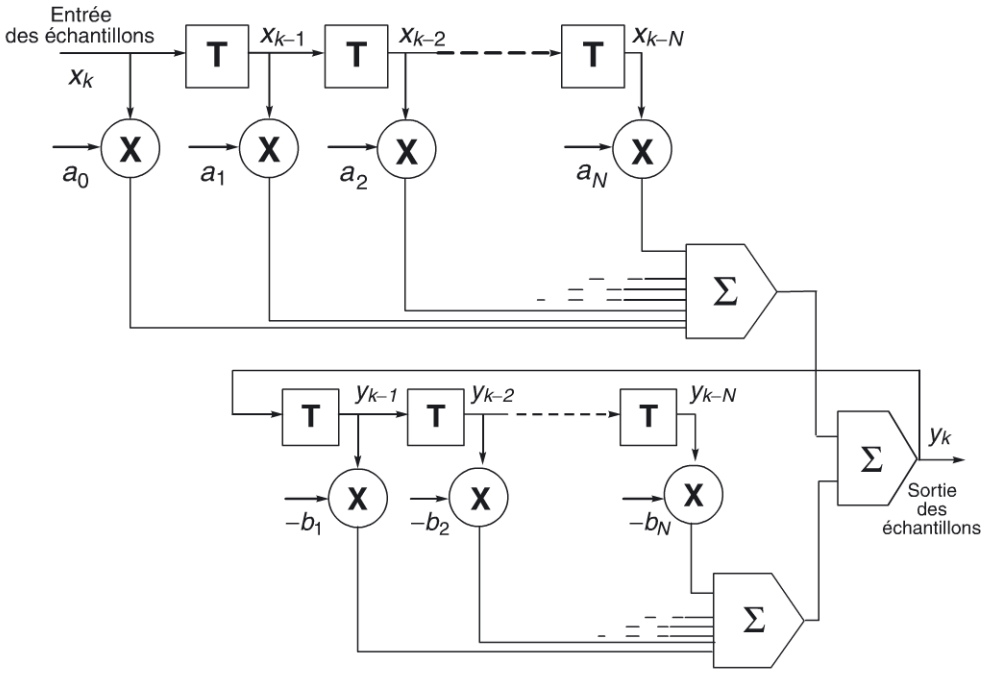

Figure 8.11 – **Structure directe d'un filtre numérique récursif.**

la structure de ce filtre (*cf.* figure 8.12) :

$$y_k = \sum_{j=0}^{N} a_j \cdot v_{k-j}$$

Le résultat montre qu'une seule structure retard est nécessaire pour la réalisation de ce filtre numérique.

c) Structure en composants simples

Il est possible d'exprimer $H(z)$ à partir d'éléments de base ou de composants simples du premier ou du second ordre $H_i(z)$:

– premier ordre :

$$H_i(z) = \frac{\alpha_i}{1 - \beta_i \cdot z^{-1}}$$

Copyright © 2017 Dunod.

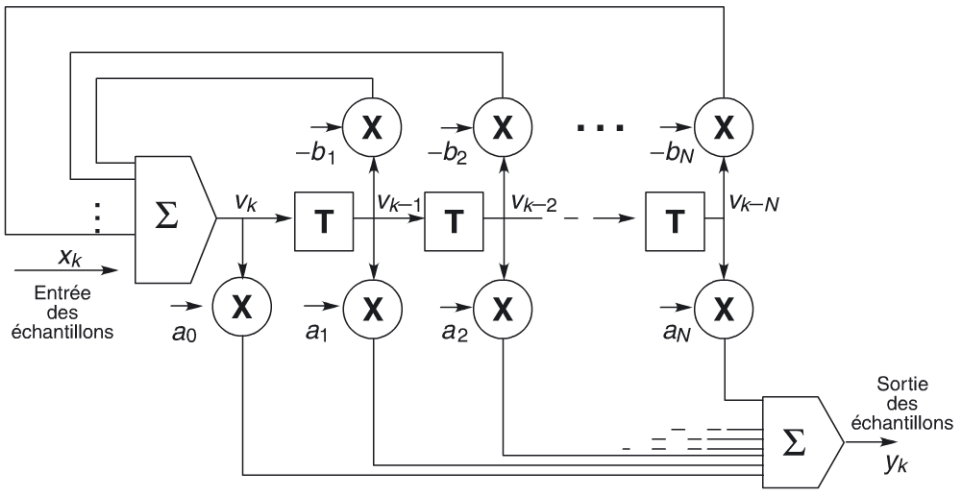

Figure 8.12 – Structure canonique d'un filtre numérique récursif.

– second ordre :

$$H_i(z) = \frac{\alpha_{i1} \cdot z^{-1} + \alpha_{i0}}{\beta_{i2} \cdot z^{-2} + \beta_{i1} \cdot z^{-1} + \beta_{i1}}$$

Ces deux éléments simples peuvent facilement se traduire en structure directe ou canonique. Pour une fonction de transfert quelconque, il suffit de l'exprimer en fonction de ces éléments de base pour réaliser ensuite une composition « produit » ou « somme » de ces éléments.

La fonction de transfert $H(z)$ peut s'écrire sous deux formes :

$$H(z) = K_1 + \sum_{i=1}^{r} H_i(z) \quad \text{somme de composants simples}$$

$$H(z) = K_2 \cdot \prod_{i=1}^{r} H_i(z) \quad \text{produit de composants simples}$$

Dans le cas d'une écriture sous la forme « somme », nous obtenons une structure parallèle (*cf.* figure 8.13) et dans le cas d'une formulation « produit », nous obtenons une structure série ou dite *en cascade* (*cf.* figure 8.14). Comme nous l'avons vu dans le domaine analogique, cette

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

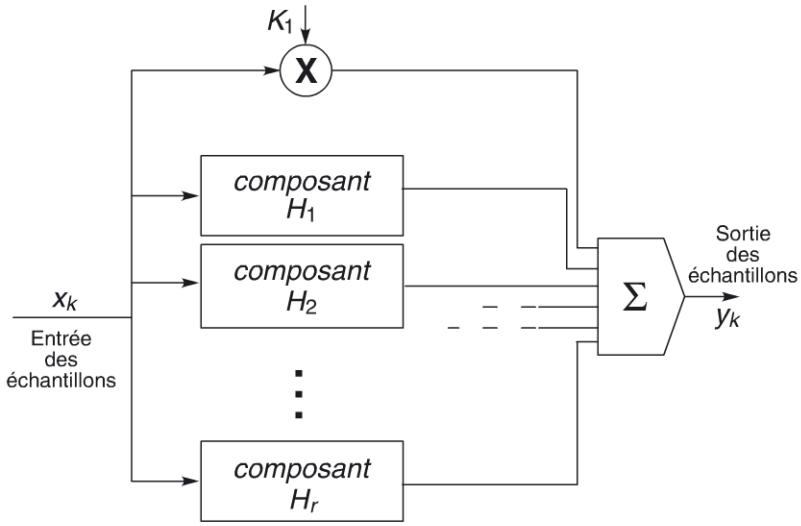

Figure 8.13 – Structure parallèle à partir d'éléments de base du premier ou du second ordre.

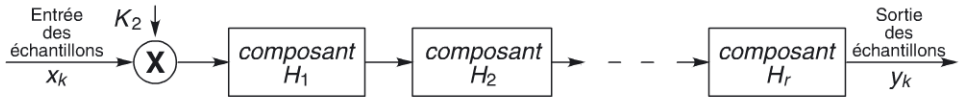

Figure 8.14 – Structure série ou en cascade à partir d'éléments de base du premier ou du second ordre.

adjonction de composants de base n'est réalisable, aussi directement, uniquement parce que nous sommes dans le domaine numérique où il n'y a pas de problème d'adaptation d'impédance.

8.4.2 Filtres numériques basés sur la convolution

Pour réaliser ces filtres à convolution, les coefficients du filtre, qui sont représentés par les N valeurs de la réponse impulsionnelle discrétisée, sont des constantes dans l'algorithme de calcul ou stockés en mémoire (EPROM) dans le cas d'une réalisation matérielle du filtre. Dans ce dernier cas, deux structures peuvent être adoptées :

– structure directe (*cf.* figure 8.15) ;

– structure transposée (*cf.* figure 8.16).

Copyright © 2017 Dunod.

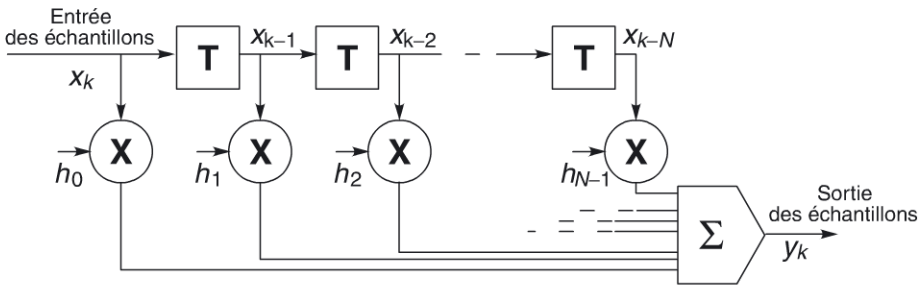

Figure 8.15 – **Structure directe d'un filtre à convolution.**

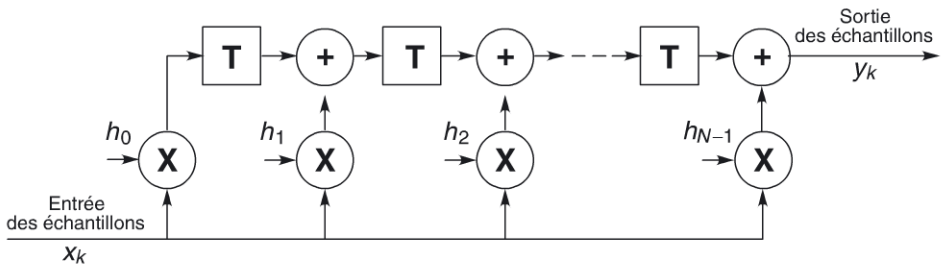

Figure 8.16 – **Structure transposée d'un filtre à convolution.**

8.5 Techniques avancées de filtrage numérique

Le domaine du filtrage numérique est très vaste car il repose uniquement sur les capacités de calcul des systèmes informatiques. Lorsque les possibilités des filtres classiques, vus précédemment, ne sont pas suffisantes pour un problème donné, il existe des extensions possibles du « filtrage numérique ».

8.5.1 « Filtres » numériques non linéaires : valeur médiane

Les filtres numériques classiques linéaires ont pour fonction de base d'éliminer certaines composantes fréquentielles qui gênent l'interprétation du signal informatif. Pour cela il est nécessaire que les fréquences à éliminer se situent dans une zone de fréquences hors de la zone occu-

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

pée par le signal utile. Pour répondre à cette limitation, il est possible de mettre en place des traitements non linéaires, appelés abusivement « filtres » numériques non linéaires.

Un de ces traitements non linéaires est le filtre de la valeur médiane. Étant donné $2N + 1$ échantillons x_k, la valeur médiane $x_{\text{med},k}$ de cet ensemble est l'échantillon qui se trouve au milieu de l'ensemble ordonné selon un ordre croissant :

$$\{x_k, x_{k-1}, \ldots, x_{k-2N}\} \xrightarrow{\text{ordre croissant}} \left\{x_{k'}, x_{k'-1}, \ldots, x_{k'-2N};\ \text{avec } x'_i \leq x'_{i+1}\right\}$$

d'où $x_{\text{med},k} = x_{k'-N}$

Ce type de filtre numérique non linéaire permet de conserver les transitions rapides mais maintenues d'un signal et d'éliminer complètement des transitions de type impulsion courte. Si nous reprenons les exemples du paragraphe 8.1.3 « lissage temporel », ils mettent parfaitement en évidence cette caractéristique du filtre de la valeur médiane : le signal « échelon unité » est conservé sans modification et l'impulsion de durée unité est éliminée (*cf.* figure 8.17). De façon plus générale, le calcul de la valeur médiane s'effectuant sur *2N+1* échantillons, cette technique permettra de sauvegarder toutes transitions rapides suivies par un plateau dont la durée est supérieure ou égale à $N \cdot T_e$ (T_e : période des échantillons). Dans le cas contraire cette transition sera éliminée.

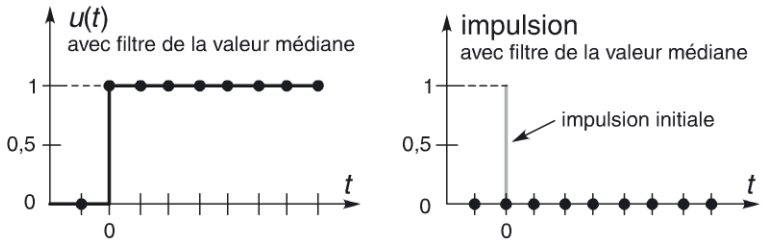

Figure 8.17 – Effet d'un filtre numérique non linéaire de la valeur médiane sur un signal « échelon unité » et sur une impulsion de durée unité.

Copyright © 2017 Dunod.

8.5.2 Filtres numériques multicadence

Les systèmes étudiés jusqu'à présent ne mettaient en œuvre qu'une seule fréquence ou cadence d'échantillonnage $1/T_e$. Il est possible de trouver certaines applications où le signal d'entrée du filtre et le signal de sortie ne fonctionnent pas à la même cadence (système multicadence). Considérons deux exemples :

– filtrage passe-bas : le signal de sortie aura par définition même du traitement effectué une fréquence plus basse et donc pourra être échantillonné à une cadence plus faible ;

– modulation : le signal de sortie qui sera l'onde porteuse du signal informatif va avoir une fréquence plus élevée que le signal informatif d'entrée (*cf.* chapitre 4).

Dans les deux cas, on cherchera à adapter le filtre à la cadence la plus petite afin de minimiser les temps de calcul. Dans le cas où il sera réalisé une réduction de la fréquence d'échantillonnage, l'opération est appelée « **décimation** » et dans le cas où une augmentation de la fréquence d'échantillonnage sera réalisée, l'opération est appelée « **interpolation** ».

Les opérations de décimation (enlever un échantillon sur n échantillons) ou d'interpolation (rajouter n échantillons entre 2 échantillons) vont conduire à des déformations spectrales. Nous avons vu en particulier le cas de l'interpolation dans l'exemple de reproduction des signaux sonores des lecteur de CD-audio traité dans le paragraphe 6.3.6.

Considérons l'exemple inverse de la décimation. Soit un signal $x_k(t)$ échantillonné à la fréquence T_{e1} et le signal de sortie $y_k(t)$ dont nous voulons diminuer la fréquence d'échantillonnage jusqu'à T_{e2} (avec $T_{e2} = T_{e1}/4$). Cette opération ne sera possible que si le spectre du signal initial est limité a priori ou par une opération de filtrage à la fréquence $1/2T_{e2}$, i.e. à la fréquence $1/8T_{e1}$. En effet la décimation est équivalente à une opération d'échantillonnage et, si le spectre du signal à échantillonner à cette nouvelle cadence T_{e2} n'a pas son spectre limité à la fréquence $1/2T_{e2}$, le phénomène de repliement va se produire.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Copyright © 2017 Dunod.

LES CHAÎNES D'ACQUISITION DE DONNÉES

9

9.1 GÉNÉRALITÉS

9.1.1 Introduction

Après avoir étudié les principales techniques de traitement du signal qu'il était possible de mettre en œuvre, nous allons nous intéresser à la mise en place d'une application d'acquisition, de traitement et de restitution de données. Les ordinateurs sont actuellement des plates-formes privilégiées pour ce type d'applications. Ils offrent en effet une très grande variété d'outils logiciels pour le développement des programmes d'acquisition et de traitement des données. Ces outils disposent en général de générateur d'interface utilisateur graphique et interactive (i.e. LabVIEW™ de National Instruments[1]). De plus l'ouverture de ces logiciels vers d'autres applications telles que la gestion des bases de données ou la communication est également un point fort.

Le point le plus délicat dans la réalisation de telles applications est le choix de la solution matérielle complète et sa mise en œuvre. Le matériel le plus répandu consiste en des cartes d'entrées/sorties numériques et/ou analogiques qui viennent s'insérer dans le bus d'extension de l'ordinateur. Le choix de ces cartes, point déterminant de l'application, fait apparaître de nombreux critères (nombre de voies d'entrées/sorties, fréquence maximale d'acquisition, précision, etc.) dont la détermination n'est pas toujours aisée et est souvent l'objet de compromis. D'autres solutions sont aussi possibles suivant les cas : interconnexion avec un ou

1. LabVIEW : programmation et application – DUNOD 2015

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

plusieurs appareils de mesure par une liaison de type série ou parallèle, liaison avec un châssis déporté d'acquisition de données, etc.

La réponse à toutes ces questions passe d'une part par la connaissance des principaux composants fonctionnels constituant ces chaînes d'acquisitions de données et d'autre part par le suivi d'une démarche stricte et complète de détermination des différents éléments.

En résumé, la mise en place technique se compose donc des quatre éléments suivants :

– Les capteurs et les actionneurs pour transformer les grandeurs ou phénomènes physiques à mesurer et à contrôler en signaux électriques : thermocouple (température), vanne (débit), etc. ;
– Le câblage et le conditionnement des signaux ;
– Le matériel d'acquisition et de restitution de données ;
– Les techniques de traitement des données (logiciel et/ou matériel).

Le premier élément (capteurs et actionneurs) concerne le domaine de la physique. Ce point, qui est succinctement décrit dans la suite de ce chapitre, est généralement bien maîtrisé par le concepteur. Le dernier point (traitement des signaux) ayant été traité dans les précédents chapitres, nous allons décrire essentiellement les deux autres points et, en particulier, les composants entrant dans la réalisation des cartes d'acquisition et de restitution de données.

En résumé, de façon plus globale, la mise en place d'une application d'acquisition de données doit obligatoirement suivre plusieurs étapes :

– Identification et caractérisation des signaux d'entrées/sorties ;
– Sélection du matériel d'acquisition et de restitution de données, avec une partie conditionnement de signaux si nécessaire ;
– Réalisation du logiciel de l'application.

9.1.2 Les types de signaux d'entrées/sorties

La méthode de traitement numérique pour le contrôle de processus nécessite de présenter les informations à l'ordinateur sous forme numérique et en retour, à la sortie de celui-ci, on dispose de l'information

Copyright © 2017 Dunod.

sous cette même forme numérique. Les capteurs et les actionneurs utilisés peuvent toutefois donner ou accepter l'image électrique d'une grandeur physique sous deux formes : **la forme numérique et la forme analogique**. Dans le premier cas, le signal électrique ne peut prendre que deux états électriques (signal dit tout ou rien) dont chacun a une signification particulière. Les interfaces entre ces capteurs ou actionneurs et le calculateur sont généralement simples puisque le codage de l'information est déjà réalisé sous une forme numérique (binaire).

Dans le deuxième cas, le signal électrique est continûment variable et représente la valeur réelle du phénomène physique avec un retard plus ou moins grand. La sortie du capteur ou l'entrée de l'actionneur sont une fonction de la grandeur physique, loi de variation en général non linéaire et étroitement liée au transducteur ou au récepteur (*cf.* figure 9.1).

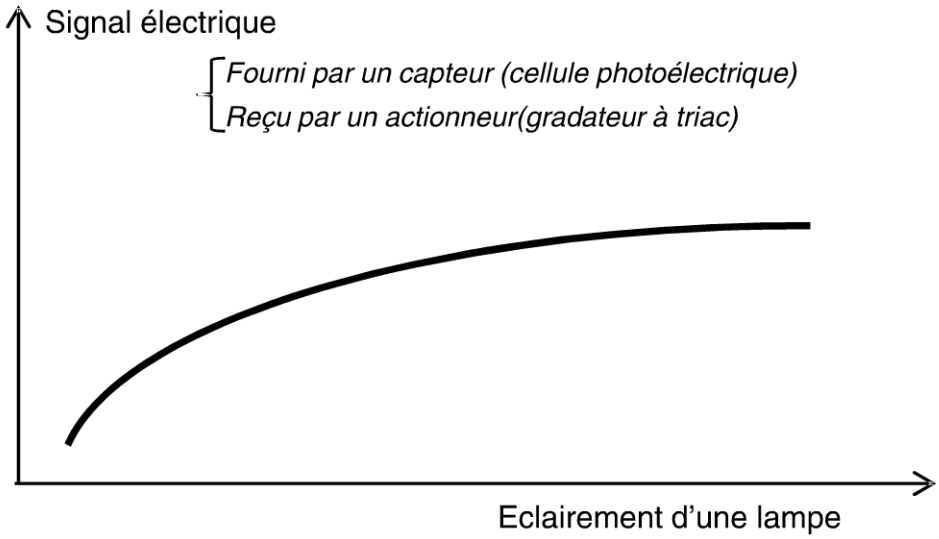

Figure 9.1 – Exemple de signal électrique analogique fourni par un capteur ou reçu par un actionneur pour le contrôle de l'éclairement d'une lampe.

Les interfaces associées à ce type de signaux électriques vont nécessiter en particulier une conversion analogique-numérique (CAN) pour un capteur et une conversion numérique-analogique (CNA) pour un actionneur, correspondant à une quantification du signal électrique

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(opération conduisant à remplacer la valeur exacte du signal analogique par une valeur approchée choisie parmi un nombre limité de valeurs).

Le matériel-interface entre le processus industriel et l'ordinateur sera donc composé d'une façon générale de tout ou partie des organes suivants (*cf.* figure 9.2) :

– Organes d'entrées :
  - Interfaces d'entrées numériques pour les capteurs fournissant des signaux tout ou rien ;
  - Interfaces d'entrées analogiques avec un convertisseur analogique/numérique (CAN) pour les capteurs fournissant des signaux électriques continûment variables.

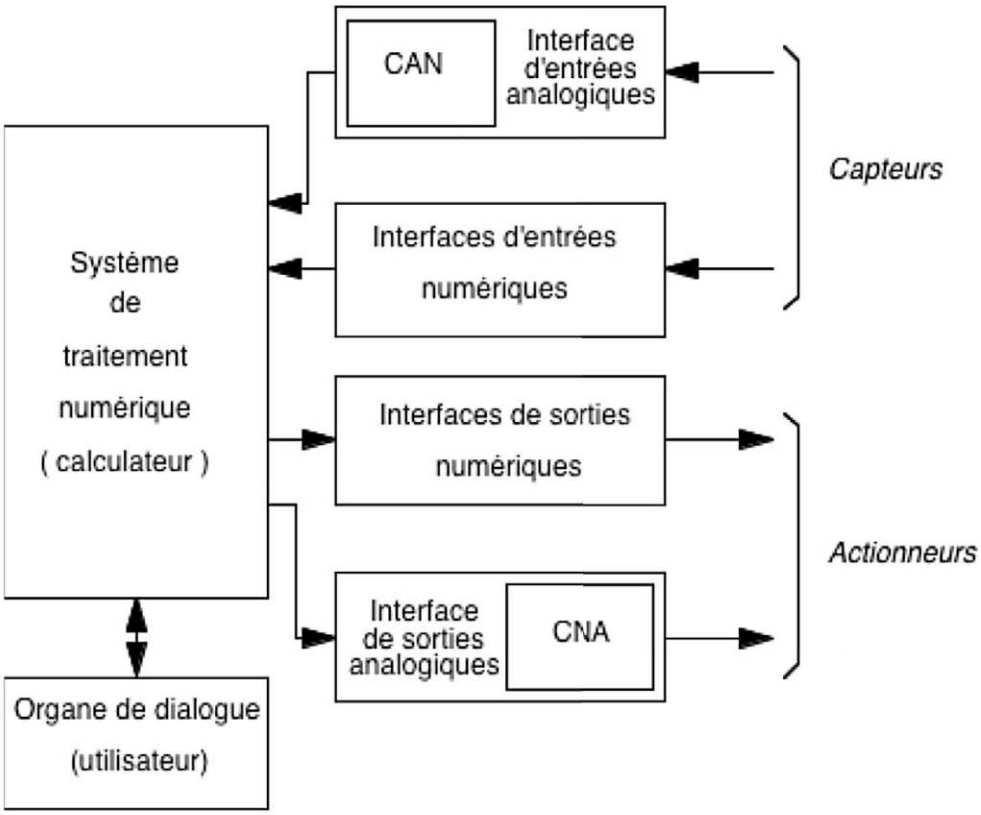

Figure 9.2 – Constitution typique d'une interface industrielle.

Copyright © 2017 Dunod.

– Organes de sorties :

- Interfaces de sorties numériques pour les actionneurs fonctionnant avec des signaux tout ou rien ;
- Interfaces de sorties analogiques avec convertisseur numérique-analogique (CNA) pour les actionneurs acceptant des signaux électriques continûment variables.

9.1.3 Codage de l'information au niveau d'un ordinateur

Les circuits électroniques, constituant les ordinateurs, fonctionnent avec les niveaux suivants :

– État haut – état logique 1 – signal électrique +5 V (signal électrique compris entre 2,4 V et 5 V en entrée et entre 2 V et 5 V en sortie) ;

– État bas – état logique 0 – signal électrique 0 V (signal électrique compris entre 0 V et 0,4 V en entrée et entre 0 V et 0,8 V en sortie).

Par conséquent, les interfaces d'entrées/sorties numériques doivent adapter les signaux extérieurs du type tout ou rien à ces niveaux de tension acceptable pour les circuits électroniques des calculateurs. Ces informations, de type tout ou rien, sont codées sur un état logique : un **bit**.

Pour les signaux électriques analogiques, il est nécessaire de réaliser un codage binaire de la valeur. Les calculateurs travaillant sur des signaux logiques en parallèle (8 signaux ou 8 bits-**octet**, 16 signaux ou 16 bits-**mot** ou encore 32 bits), le codage réalisera une correspondance entre l'amplitude d'une tension électrique et un nombre binaire, c'est le rôle des convertisseurs **CAN** ou l'inverse avec les convertisseurs **CNA**.

Il existe trois principaux types de codage correspondant à des composants spécifiques qui peuvent modifier le traitement des données dans la suite.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

a) Codage binaire simple (code naturel)

Un nombre décimal N codé en binaire sur k chiffres (a_0 à a_{k-1}) s'écrit sous la forme suivante :

$$N = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \ldots + a_{k-1} \cdot 2^{k-1}$$

Pour un codage sur 8 bits, le nombre décimale N est compris entre 0 et 255. Ce codage binaire simple ne permet que de représenter des nombres positifs.

b) Codage complément à 2 (complément vrai)

Pour coder des nombres positifs ou négatifs, on utilise le codage binaire complément à 2. Le nombre binaire négatif s'obtient à partir du nombre binaire positif, codé en binaire simple, en inversant les bits 0↔1 (complément restreint ou complément à 1) et en augmentant le résultat de 1. Le premier chiffre du nombre binaire caractérise le signe du nombre : 0 pour positif et 1 pour négatif. Ce codage a l'avantage d'être simple pour le traitement des opérations arithmétiques puisqu'il ne nécessite pas de traitement particulier pour le bit de signe. En effet, la somme d'un nombre et de son complément à 2 donne bien un résultat nul.

c) Codage binaire codé décimal (BCD)

Le nombre décimal est codé en considérant chaque chiffre du nombre et en donnant sa représentation sur 4 bits (0 à 9). Ce codage binaire codé décimal conduit à des nombres binaires plus longs puisque toutes les combinaisons binaires ne sont pas utilisées. En revanche, ce codage est très utile lors de la sortie des informations sur des afficheurs, l'information étant disponible directement sous forme décimale.

9.2 Capteurs et actionneurs

9.2.1 Introduction

Les capteurs et les actionneurs, qui se situent en début et en fin de la chaîne de contrôle industriel, sont primordiaux en ce sens que, si

Copyright © 2017 Dunod.

le choix n'est pas adapté, le reste du traitement ne pourra pas retrouver ou réinventer la bonne mesure ou la bonne commande. Par rapport au procédé, on désire prélever une information représentée par une ou plusieurs grandeurs physiques (pression, luminosité, température…). Cette information est donc transformée en signal électrique par le capteur. C'est à partir de ce signal électrique mesuré et éventuellement traité qu'une décision de commande peut être prise et envoyée vers le procédé au travers de l'actionneur qui va modifier une grandeur physique. Les possibilités de captation ou d'activation de paramètres physiques sont limitées bien que les capteurs et actionneurs soient de plus en plus performants.

Vis-à-vis du procédé, une très grande différence entre les capteurs et les actionneurs réside dans le fait que les capteurs doivent être le moins perturbants ou intrusifs possible alors que les actionneurs le sont obligatoirement par leur fonction active sur l'évolution du procédé. Ainsi on pourrait définir un capteur idéal comme étant celui qui prélève l'information pertinente (utile) au niveau du procédé sans en modifier ou perturber son fonctionnement.

9.2.2 Les caractéristiques des capteurs

À ce niveau, l'importance du capteur est bien mise en évidence. En effet le signal électrique de sortie doit être le support de l'information puisque la décision de commande ou simplement l'interprétation de la mesure est faite à partir du signal et non de l'information elle-même. Les capteurs, qui sont les « sens » du système d'acquisition de données, doivent être choisis avec beaucoup de précaution.

Ainsi les capteurs, composants essentiels de la chaîne de mesure, vont s'écarter du capteur idéal à cause des différentes caractéristiques qui peuvent être classées en trois groupes :

– Caractéristiques fondamentales : bande passante, résolution ;

– Caractéristiques intrinsèques ;

– Caractéristiques liées à l'environnement.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

a) Caractéristiques fondamentales

L'information, contenue dans la mesure que l'on va réaliser, peut être caractérisée :

– par sa **bande passante**, c'est-à-dire la totalité des fréquences utiles. Le capteur doit donc être capable de donner une image électrique correcte des variations dans cette plage fréquentielle d'observation. Prenons l'exemple d'une caméra utilisée pour enregistrer l'évolution d'un phénomène (un front de flamme par exemple). Il est impératif que le capteur caméra réponde aux deux critères de bandes passantes : sensibilité aux longueurs d'onde du phénomène lumineux observé et vitesse de prise de vue suffisante par rapport aux changements à observer (évolution du phénomène physique) ;

– par la **résolution** du capteur, qui doit être adaptée aux phénomènes. Cette résolution ou la capacité de différencier deux valeurs de la grandeur physique peut être spatiale, temporelle ou fréquentielle. En reprenant l'exemple précédent, il est clair que la résolution spatiale de la caméra sera directement liée à la possibilité d'analyser des phénomènes de dimension réduite (turbulence. . .).

b) Caractéristiques intrinsèques

Le phénomène physique, sur lequel s'appuie le capteur, et sa réalisation concrète conduisent à des caractéristiques techniques inhérentes à tous éléments mécaniques et/ou électriques :

– **Sensibilité du capteur** : évolution de la tension de sortie fournie par le capteur par rapport à l'amplitude de la variation de la grandeur physique mesurée. Cette caractéristique sera exprimée par exemple en degré par volt (°C/V), etc. ;

– **Étendue de mesures** ou plage de mesures accessible au capteur ;

– Caractéristiques de la **courbe de transfert** « signal électrique versus grandeur physique » : linéarité, décalage, etc. ;

– Précision de lecture dans le cas d'un message visuel délivré par le capteur (cadran) ;

Copyright © 2017 Dunod.

– Réversibilité ou phénomène d'**hystérésis** (par exemple dans le cas des capteurs magnétiques) : le signal de sortie du capteur dépend des mesures précédentes ;

– **Décalage du zéro** électrique du capteur (erreur d'offset ou de zéro) d'un point de vue statique (à la mise en fonctionnement) ou dynamique (dérive au cours du temps) ;

– **Domaine de non-détérioration** du capteur : pas de modifications des caractéristiques techniques du capteur ;

– **Domaine de non-destruction** du capteur : le capteur n'est pas détruit, mais les caractéristiques techniques du capteur peuvent être modifiées. En conséquence, il est nécessaire de procéder à un réétallonnage avant une nouvelle utilisation ;

– **Reproductibilité** des capteurs : une suite de mesures, réalisées dans les mêmes conditions, donnera les mêmes résultats ;

– **Interchangeabilité** des capteurs : le remplacement par un capteur identique ne modifie pas les performances de la chaîne de mesures. Cette dernière propriété est d'une grande importance pour le domaine de la maintenance des matériels.

c) Caractéristiques liées à l'environnement

Nous pouvons distinguer deux relations du capteur avec son environnement :

– L'influence du milieu dans lequel est mis le capteur sur ses caractéristiques intrinsèques. Par exemple la courbe de transfert du capteur peut être modifiée selon la température à laquelle le capteur est porté ;

– La pertinence ou la véracité de la mesure par rapport à la grandeur physique étant donné la perturbation que le capteur induit sur le système observé.

Cette dernière caractéristique rejoint la notion de capteur intrusif vu dans le paragraphe précédent. La mesure faite par un capteur correspond-t-elle à la grandeur physique existante avant la mise en place

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

du capteur ? Par exemple une sonde de température de type thermocouple (*cf.* paragraphe suivant) va modifier localement le champ de températures et par conséquent la température mesurée n'est pas celle qui existe en l'absence du capteur. La grande qualité d'une chaîne de mesures est liée au fait de pouvoir minimiser cette influence du capteur sur le phénomène physique à observer ou au moins pouvoir caractériser cette déviation. Cette étude doit être impérativement réalisée par le concepteur avant la mise en place complète de la chaîne de mesures. L'analyse de l'influence du capteur sur le procédé observé est du domaine du physicien.

9.2.3 Les principaux types de capteurs

De façon simple un capteur peut être défini comme un transducteur convertissant une grandeur physique en un signal électrique. La transformation de cette grandeur physique en variable électrique peut être directe dans quelques cas simples : la différence de potentiel entre deux métaux est directement fonction de la température, c'est l'effet thermoélectrique utilisé pour les thermocouples (*cf.* paragraphe suivant). Mais en réalité la technologie des capteurs fait souvent appel à plusieurs conversions de phénomène physique avant d'arriver au signal électrique de sortie. Par exemple la mesure d'un signal sonore à l'aide d'un microphone va s'effectuer selon les différentes phases successives suivantes : son → variation de pression d'un fluide (air) → déplacement d'une membrane → variation de capacité → signal électrique.

Le classement des capteurs peut se faire selon la grandeur à mesurer : longueur, épaisseur, force, poids, pression, déplacement, allongement, position, niveau, vitesse, température, conductivité, humidité, accélération, vibration, débit de fluides, temps, etc. À chacune de ces grandeurs peuvent correspondre un ou plusieurs types de capteurs fonctionnant selon un phénomène spécifique : variation de résistance, variation d'induction magnétique, variation capacitive, variation de fréquence, variation de quantité d'électricité, variation de flux lumineux, variation de caractéristiques du composant, etc.

Copyright © 2017 Dunod.

Nous limiterons notre étude aux grandeurs physiques les plus courantes avec un classement des différents capteurs selon la grandeur physique à mesurer. Le tableau 9.1 présente ainsi des exemples de capteurs classés selon la grandeur mesurée.

Tableau 9.1 – classement des différents capteurs selon la grandeur physique à mesurer.

Phénomène physique	Capteurs
Température	- thermocouples ; - détecteurs résistifs ; - thermistances ; - thermomètres à quartz ; - pyromètres à infrarouge, etc.
Position et déplacement	- potentiomètres ; - capteurs inductifs ; - capteurs capacitifs ; - capteurs optiques incrémentaux ; - télémètres, etc.
Pression et force, son	- jauges de contrainte (capteurs extensométriques) ; - potentiomètres ; - capteurs piézo-électriques ; - microphones, etc.
Lumière	- cellules photoélectriques ; - photo-éléments ; - surfaces photosensibles ; - caméra CCD, etc.
Niveau de fluides, débit de fluides	- capteurs à flotteurs ; - conductimètres ; - débitmètres mécaniques ; - débitmètres à ultrasons, etc.

Cette liste n'est pas exhaustive au niveau de l'ensemble des capteurs disponibles ; mais elle est représentative des capteurs mis en œuvre dans beaucoup de chaînes de mesures. Cependant, il est important de noter que de plus en plus de mesures font appel aux techniques optiques et d'imagerie qui sont plus précises, plus riches d'information et surtout moins intrusives au niveau des phénomènes observés. Aussi la grandeur physique initialement à mesurer sera transformée en une autre grandeur

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

physique mesurable par un moyen optique (acquisition d'images). Par exemple l'écoulement d'un fluide sera remplacé par le déplacement de fines particules injectées dans ce fluide. Et ainsi le film des trajectoires de ces particules permettra non seulement de remonter à la grandeur « vitesse d'écoulement », mais aussi de mettre en évidence des perturbations locales éventuelles de cet écoulement (zones de turbulence).

Parmi l'ensemble des capteurs cités dans le tableau 9.1, nous allons décrire seulement l'un des plus utilisés mais difficile à mettre en œuvre étant donné les faibles signaux délivrés et la grande sensibilité aux bruits : les thermocouples.

Le capteur thermocouple est basé sur le phénomène de thermoélectricité. Quand on joint deux métaux, il apparaît une différence de potentiel à la jonction ou soudure. Celle-ci, appelée effet Seebeck, est due à la combinaison de deux effets physiques :

– Effet Peltier : dissymétrie des distributions électroniques de deux métaux différents ;
– Effet Thomson : mouvement des électrons dans un conducteur dont la température n'est pas uniforme.

La tension ainsi obtenue est toujours de faible valeur typiquement de quelques dizaines de millivolts. Différents métaux sont ainsi associés pour couvrir diverses gammes et sensibilités de températures. Les principaux types de thermocouples, ainsi que la gamme de mesures associée, sont donnés dans le tableau 9.2.

Il est important de noter que ces métaux étant connectés au système de mesure par un câble de nature différente (cuivre en général), il est nécessaire de réaliser une soustraction des tensions dues à ces soudures dites froides car ne servant pas à mesurer une température. Cette opération s'appelle la compensation de soudure froide (*cf.* figure 9.3).

Les thermocouples se présentent généralement sous la forme d'un montage en « canne pyrométrique », c'est-à-dire encapsulés dans une gaine avec isolant. Ce type de montage est adapté à des mesures de températures très lentement variables comme la régulation d'enceintes thermostatées. En effet, la constante de temps du thermocouple est grande étant donné les différents éléments à mettre en température.

Copyright © 2017 Dunod.

Tableau 9.2 – Les principaux types de thermocouples (* : Cuivre-Nickel, ** : Nickel-Chrome, * : Nickel-Aluminium.).**

Type	Métaux		Température (°C)	Tension (mV)
E	Chromel	Constantan*	–270 à 1 000	–9 à 76
J	Fer	Constantan*	–270 à 1 200	–8 à 69
K	Chromel**	Alumel***	–270 à 1 370	–6 à 55
T	Cuivre	Constantan*	–270 à 400	–6 à 21
S	Platine-10 % Rhodium	Platine	–50 à 1 770	0 à 19

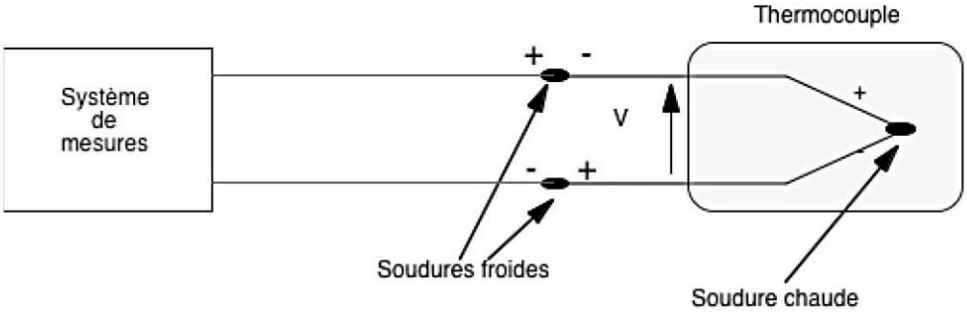

Figure 9.3 – Configuration d'une mesure de température par thermocouple.

En revanche, étant donné la protection du thermocouple, l'environnement de mesures peut être sévère : corrosif, particules en suspension, etc. Il existe un autre type de montage de thermocouples sans encapsulation qui permet d'améliorer fortement la constante de temps (ou temps de réponse) du thermocouple.

Enfin la relation entre la tension mesurée et la température est de type polynomiale, il est donc nécessaire de réaliser une linéarisation de la mesure pour obtenir le résultat en « grandeur température ». Cette linéarisation se fait avec la compensation de soudure froide réalisée en référence à la température ambiante. Là aussi cette double fonction est souvent disponible dans les systèmes de conditionnement. Ainsi pour une plage de température ambiante T_a, il faut calculer la différence de potentiel induite e_a :

$$e_a = P_1(T_a) \text{ avec } P_1 \ : \ \text{polynôme de compensation}$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Ensuite, étant donné une différence de potentiel mesurée e_m, la température mesurée correspondante est donnée par :

$$T_m = P_2(e = e_m + e_a) \text{ avec } P_2 \ : \ \text{polynôme de linéarisation}$$

Il est important de noter que les systèmes de conditionnement de signaux intègrent très souvent cette fonction.

9.2.4 Les principaux types d'actionneurs

Le but de ce paragraphe est de sensibiliser aux principes généraux utilisés pour cette fonction « actionneur ». Dans quelques cas les phénomènes physiques qui sont à la base des capteurs sont réversibles au sens entrée/sortie. Pour les capteurs, nous avons décrit des systèmes permettant de transformer une grandeur physique en une grandeur électrique mesurable. Pour les actionneurs, ces mêmes systèmes physiques peuvent être utilisés en les sollicitant électriquement pour faire varier une grandeur physique (effet piézo-électrique, effet magnétique. . .). L'exemple le plus immédiat est celui du phénomène basé sur l'induction magnétique : le déplacement du noyau de couplage magnétique provoque la variation de tension mesurée pour le capteur, un actionneur peut être réalisé en utilisant le contrôle de position d'un noyau magnétique par la tension mise aux bornes de l'enroulement.

L'actionneur le plus utilisé est celui appelé du terme générique « moteur électrique ». Le mouvement de rotation obtenu permet commander de nombreux actionneurs mécaniques (vanne, etc.). La technique des moteurs électriques a été grandement améliorée et présente un certain nombre d'avantages, comme en particulier, celui d'avoir des réglages aisés et précis : couple, vitesse, position, etc.

Le moteur est constitué de deux parties : le **stator** (partie fixe externe) et le **rotor** (partie centrale mobile). Le fonctionnement peut se résumer à l'alimentation d'enroulements, situés dans le stator et/ou le rotor, par une tension soit continue soit alternative qui va induire un mouvement de rotation au rotor. Le principe de base est le couplage électromagnétique de deux champs tournants, l'un au niveau du stator et l'autre au niveau du rotor Deux champs magnétiques tournant à la même vitesse,

Copyright © 2017 Dunod.

faisant un angle, créent un couple électromagnétique instantané qui va produire l'entraînement du rotor par rapport au stator.

Les champs magnétiques peuvent être obtenus à partir d'aimants permanents (ferrites, alnico, terres rares ou autres composés) ou de bobines alimentées par une tension électrique.

Basés sur l'application de ce principe, trois principaux types de moteurs sont disponibles :

– Les **moteurs à courant alternatif** : l'alimentation électrique est réalisée à partir de la tension alternative du secteur (50 hertz). On distingue deux classes de moteurs à courant alternatif :
  - Les **moteurs synchrones** : le stator est constitué d'un bobinage polyphasé et le rotor d'un aimant permanent ou d'un bobinage alimenté en courant continu pour les grosses machines ;
  - Les **machines asynchrones** : comme précédemment le stator est constitué d'un bobinage polyphasé relié au secteur et le rotor est formé aussi d'un bobinage polyphasé fermé sur lui-même par des résistances ;
– Les **moteurs à courant continu** : le stator est constitué d'un aimant permanent ou d'un électro-aimant et le rotor est formé d'un ensemble d'enroulements qui sont alimentés par une tension continue amenée par des balais frottant sur les collecteurs du rotor, l'ensemble balais et collecteurs en rotation formant un redresseur. Selon le branchement des enroulements du rotor, différents types de moteurs à courant continu ont été réalisés : le **moteur shunt**, le **moteur série**, le **moteur compound** et **compound additionnel** ;
  - Les **moteurs pas à pas** (variante du moteur synchrone) : le stator est constitué de bobinages polyphasés à alimentations indépendantes et le rotor est généralement formé d'un ensemble d'aimants permanents. L'alimentation successive de deux enroulements opposés du stator entraîne le moteur d'un pas (rotation entre deux pôles du rotor).

Il est impossible de citer ici tous les types de moteurs qui sont issus des familles données ci-avant. Les principales caractéristiques et

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

applications de ces différents types de moteurs sont données dans le tableau 9.3.

Tableau 9.3 – Les principales caractéristiques et les applications des différents moteurs.

Type de moteurs	Caractéristiques	Applications
moteur synchrone	– vitesse rigoureusement constante, couple très faible au démarrage, risque de décrochage	– lecteurs de CD, magnétophones, machines à tisser...
moteur asynchrone	– vitesse pratiquement constante, couple fort au démarrage, fonctionnement stable, machine simple et robuste	– nombreuses applications, traction automobile...
moteur shunt	– vitesse pratiquement autorégulée	– appareils de levage, machines outils...
moteur série	– vitesse variable dans un large domaine, couple fort au démarrage	– traction électrique...
moteur compound et compound additionnel	– vitesse rigoureusement constante, couple élevé au démarrage	– machines d'usinage...
moteur pas à pas	– commande position très simple, faibles puissances	– imprimantes...

9.3 Le câblage

Dans toute chaîne d'acquisition de données, il est très important de bien définir les spécifications du câblage entre les sources des signaux que constituent les capteurs et les entrées du système, ou entre les sorties du système et les actionneurs. Lors de la mise en œuvre de cette interconnexion, deux problèmes de nature très différente se posent :

Copyright © 2017 Dunod.

– La nature du câble à utiliser ;

– La connexion effective de ce câble aux différentes entrées/sorties.

9.3.1 La nature du câble

Les paramètres de base d'un câble sont ses caractéristiques électriques qui permettent d'obtenir une modélisation ou schéma équivalent de la ligne pour un tronçon élémentaire. Les paramètres électriques de base sont :

– Résistance linéique ;

– Inductance linéique ;

– Capacité linéique ;

– Perditance linéique (conductance transversale).

Ces paramètres intrinsèques permettent de déterminer les deux caractéristiques les plus importantes d'un câble : la **bande passante** et l'**impédance**. Ils dépendent à la fois des composants utilisés pour la réalisation du câble et de la géométrie de ce câble. Une autre caractéristique essentielle est l'immunité aux bruits. Quatre catégories de câbles sont en général utilisées pour ces applications : le câble en nappe, la paire torsadée, le câble coaxial ou de plus en plus la fibre optique. Les deux principaux supports sont :

– La « paire torsadée blindée (STP : *Shielded Twisted Pair*) » ou « paire symétrique blindée » une ligne bifilaire dans laquelle les deux conducteurs sont identiques au niveau de leurs caractéristiques électriques. C'est le support le plus simple convenant à beaucoup d'applications. Ces câbles sont constitués de paires de fils isolés et toronnés, l'ensemble étant protégé des influences mécaniques ou électriques extérieures par un manteau.

– Dans des cas particuliers comme l'éloignement d'un capteur et la présence de perturbations électriques externes fortes, Il est possible de mettre en œuvre un câble de type fibre optique pour le transport de l'information dans les applications d'acquisitions de données, il est

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

important de souligner que cela nécessite d'avoir des transformation électrique ↔ signal lumineux.

9.3.2 Les différentes configurations du câblage

Dans le cas de la mesure d'un signal de tension, qui est le cas le plus général, il est primordial d'utiliser une entrée avec une résistance élevée pour minimiser les erreurs de mesure, en particulier dans le cas de capteurs à résistance élevée comme pour une thermistance (>1 kΩ) ou un capteur de déplacement potentiomètrique (de 1 à 100 kΩ).

Il est important de préciser les termes « **masse** » et « **terre** ». La masse est par définition la référence par rapport à laquelle sera mesurée une tension. La terre est une masse particulière à laquelle les utilisateurs, les bâtiments ou certains systèmes (pylônes, etc.) sont plus ou moins reliés. Les utilisateurs, qui sont en contact physique avec la référence de masse « terre », vont avoir à manipuler des systèmes métalliques (armoires électriques, baies expérimentales, ordinateur, etc.). Pour éviter tout risque d'accident (différence de potentiel élevée entre l'utilisateur et le système manipulé), il convient alors de mettre l'objet métallique à la même référence de potentiel, au moins en ce qui concerne son enveloppe externe (coffret, armoire, etc.). Lors du câblage de cette terre, il est important d'éviter de faire des boucles. Ensuite lors de la mesure de signaux à l'aide d'un câble de type paire torsadée blindée, la mesure est effectuée entre deux points dont un est considéré comme la masse, référence du signal ou de plusieurs signaux. Il est possible de réunir le blindage du câble à cette masse du signal pour rendre efficace le blindage. Mais il est très important de noter que ce raccordement à la masse du signal ne doit se faire impérativement qu'à une seule extrémité du câble.

9.4 Le conditionnement de signaux

Dans une chaîne industrielle d'acquisition et de restitution de données, le système de conditionnement de signaux se place entre les capteurs

Copyright © 2017 Dunod.

ou les actionneurs et la chaîne industrielle de mesure. Les fonctions de conditionnement des signaux sont multiples et variées :

– Alimentation du capteur ou de l'actionneur : isolement de cette tension par rapport à celle du système de mesure, tension d'alimentation différente en niveau ou en puissance

– Amplification (adaptation de niveau) et/ou modification du type du signal (i.e. : courant en tension) afin d'éviter une transmission d'un signal de bas niveau sur de longues distances ;

– Isolement galvanique : protection du système de mesure contre les surtensions transitoires élevées pouvant survenir sur le capteur, protection contre les tensions négatives, etc. ;

– Filtrage : filtrage du bruit (filtrage passe-bas, filtre réjecteur des harmoniques du secteur...), filtrage antirepliement lié à l'échantillonnage... ;

– Traitement spécifique à des capteurs : linéarisation (thermocouples...), compensation (thermocouples, ponts de jauge...), ... ;

– Conversion analogique-numérique — CAN ou numérique analogique — CNA (dans ce cas le système de conditionnement est en fait une carte d'acquisition déportée).

Ce système peut être intégré au système de mesure (directement au niveau des cartes d'entrées/sortie) ou séparé si, par exemple, les fonctions le nécessitent : découplage, etc.

9.5 Les entrées/sorties numériques

La diversité des signaux utilisés et la différence des niveaux d'énergie entre les processus industriels et les calculateurs nécessitent, comme nous l'avons vu, l'utilisation d'interfaces industrielles qui assurent les fonctions suivantes :

– Adaptation ;

– Filtrage (des parasites dus à l'environnement) ;

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

– Isolement (protection de la partie numérique contre les surtensions) ;

– Étage tampon (mémorisation de l'information).

Dans le cas général, aussi bien en entrée qu'en sortie, l'interface doit être étudiée au niveau de ces différentes fonctions. Les deux structures d'interfaces d'entrées/sorties numériques sont complètes et, suivant le cas à traiter (signal électrique à acquérir ou à fournir) les différents modules existent ou non, et sont complexes ou non. Le module d'adaptation réalise une mise à niveau du signal par rapport au calculateur soit en puissance, soit en tension ou en courant. Les modules d'isolement et de filtrage permettent d'éliminer une partie du signal électrique entre le calculateur et le processus, seule l'information est transmise. L'étage tampon permet de mémoriser l'information transmise au niveau de l'interface si le transfert n'est pas immédiat. Dans le cas d'interface complexe, on trouve généralement un module de contrôle qui est utilisé pour gérer cette interface.

Sans décrire de façon détaillée l'ensemble des composants d'une chaîne d'E/S numériques, nous allons nous focaliser sur deux éléments importants :

– L'adaptation en puissance ;

– L'isolement électrique.

L'adaptation en puissance est en général assurée soit par relais électromécaniques, soit par relais statiques. Les **relais électromécaniques** sont d'utilisation simple et présentent un isolement électrique important de l'ordre de 1 000 V. Il se présente comme un élément possédant un gain en puissance important : la sortie bas niveau d'un ordinateur peut commander un actionneur de puissance. Il en existe une large gamme ; certains conservent leur position en cas de coupure secteur (relais bistables). Par contre, ils ont une durée de vie limitée (10^6 commutations) qui dépend fortement des caractéristiques du circuit commuté (courant, self...). D'autre part les relais électromécaniques sont limités en fréquence (temps de réponse mécanique de l'ordre de la dizaine de millisecondes) ; cette limitation présente un avantage, c'est le filtrage des parasites hautes fréquences. Les relais électromécaniques réalisent

Copyright © 2017 Dunod.

non seulement une adaptation en puissance, mais aussi un isolement électrique.

La seule fonction d'isolement peut être réalisée par des **coupleurs optoélectroniques**. Les avantages de tels composants sont nombreux : protection contre les surtensions, isolement du système jusqu'à plusieurs milliers de volts, élimination du couplage par la masse dans le cas d'alimentations séparées.

9.6 Les entrées/sorties analogiques

Le but de la conversion analogique-numérique ou numérique-analogique est de faire correspondre un nombre binaire N à une tension analogique V. Le nombre binaire N sera caractérisé par son nombre de bits (ou chiffres) a_0 à a_{n-1} pour n bits ($a_i = 1$ ou 0) :

$$N = a_{n-1}a_{n-2} \ldots a_1a_0$$

a_0 étant le bit de poids faible ou LSB (*least significant bit*) et a_{n-1} le bit de poids fort ou MSB (*most significant bit*).

Le nombre décimal N_d correspondant est :

$$N_d = a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 2^1 + a_0$$

La valeur de la tension V à traduire (CAN) ou traduite (CNA) est discrète et multiple d'une valeur de base appelé le **quantum de conversion** q (tension analogique élémentaire) ; on a la relation :

$$V_{\text{en Volt}} = q_{\text{en Volt}} \cdot N_d$$

$$\text{soit } V = q \cdot (a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 2^1 + a_0)$$

Ainsi les deux principales caractéristiques d'un convertisseur analogique-numérique ou numérique-analogique sont donc :

– Nombre de bits : n ;

– Tension analogique élémentaire : q.

La réalisation électronique des convertisseurs utilise des circuits intégrés linéaires ou amplificateurs opérationnels.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

9.6.1 La conversion numérique analogique

La conversion numérique-analogique, que nous désignerons par **CNA**, consiste à transformer une information disponible sous forme binaire en une information analogique :

$$V_s = q \cdot (a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 2^1 + a_0)$$

La tension analogique de sortie pourra donc prendre 2^n valeurs différentes que l'on peut écrire :

$$V_s = i \cdot q \text{ avec } i \in [0, 2^{n-1}]$$

En pratique, on emploie essentiellement des CNA du type parallèle et plus particulièrement :

– CNA à résistances pondérées ;

– CNA à réseau en échelle R-2R.

Les principales caractéristiques des convertisseur N/A sont (V_{ref} étant la source d'alimentation) :

– Nombre de bits : n ;

– Quantum de conversion : $|q| = V_{ref}/2^{n-1}$.

En plus de ces deux paramètres de base, nous avons cinq autres paramètres importants : valeur maximale, résolution, temps de conversion et les tensions de sortie et d'entrée.

La valeur maximale de la tension de sortie est donnée par :

$$V_{s,\max} = 2 \cdot V_{ref} \cdot [1 - \frac{1}{2^{n-1}}] \text{ ou } V_{s,\max} = 2 \cdot V_{ref} \ (n \text{ grand})$$

La résolution r d'un système est la plus petite valeur, ou incrément minimum, que ce système peut délivrer, ramenée à la valeur maximale. Soit pour un convertisseur N/A de n bits :

$$r = \frac{1}{2^n - 1} \text{ ou } r \approx \frac{1}{2^n} \ (n \text{ grand})$$

Copyright © 2017 Dunod.

Le temps de conversion (*settling time*) est le temps qui s'écoule entre l'instant où la commande de conversion est faite et l'instant où la tension de sortie atteint sa valeur finale et ne s'écarte pas de celle-ci de plus de ±1/2 quantum. Le cas le plus défavorable est le passage de la tension de sortie nulle à la tension de sortie pleine échelle.

Le temps de conversion T_{conv} d'un CNA est typiquement de l'ordre de quelques 100 ns, mais ce temps peut évoluer suivant le nombre de bits : pour un CNA 8 bits de l'ordre de 250 ns, mais pour un CNA de 18 bits le temps de conversion peut atteindre 250 µs.

9.6.2 La conversion analogique numérique

Effectuer une conversion analogique-numérique (ou A/N), c'est rechercher une expression numérique dans un code déterminé, pour représenter une information analogique. Un convertisseur A/N est un dispositif qui reçoit un signal analogique et le transforme en un signal numérique. Soit la relation :

$$V_s = q \cdot (a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 2^1 + a_0)$$

La quantité q n'est plus une caractéristique du convertisseur. En effet, la tension d'entrée maximale $V_{e,max}$ étant fixée, ainsi que le nombre de bits n, le quantum se déduit de la relation :

$$q = \frac{V_{e,max}}{2^n - 1}$$

La courbe de transfert théorique, donnant la valeur numérique de sortie N en fonction de la tension analogique d'entrée V_e, est une courbe en escalier à laquelle on peut associer l'évolution de l'erreur de conversion ou **erreur de quantification** en dent de scie entre $-1/2\ q$ et $+1/2\ q$.

En effet un mot numérique N pourra correspondre à une tension d'entrée V_e telle que :

$$N \cdot q - (1/2) \cdot q < V_e < N \cdot q + (1/2) \cdot q$$

Les diverses techniques utilisées pour réaliser des convertisseurs A/N permettent d'atteindre des caractéristiques différentes :

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

– Précision : CAN à intégration ;
– Economique et rapide : CAN utilisant des CNA ;
– Très rapide : CAN parallèle.

9.6.3 Échantillonneur/bloqueur

Dans le cas de la conversion analogique numérique et même si les temps de conversion sont de plus en plus court en particulier dans le cas de convertisseur parallèle, une hypothèse implicite est faite : la tension d'entrée du convertisseur est constante. Or, cela n'est pas toujours vérifié et peut conduire à des erreurs importantes de conversion. Aussi, un composant spécifique sera utilisé à l'entrée des convertisseurs analogique-numérique : l'échantillonneur/bloqueur.

Le rôle de l'échantillonneur-bloqueur dans un système d'acquisition de données est donc de maintenir la tension à convertir constante pendant le temps de conversion. Il fonctionne suivant deux états :

– **Échantillonneur** (*Sample*) ou plus exactement **Suiveur**, pendant lequel il suit les variations instantanées du signal d'entrée ;
– **Bloqueur** (*Hold*) pendant lequel il conserve en mémoire la dernière valeur du signal analogique existant avant le passage en mode blocage.

9.7 La mise en œuvre d'une chaîne d'acquisition de données

9.7.1 Introduction

La plus grande difficulté de mise en œuvre d'une chaîne d'acquisition de données est de réaliser l'adéquation la plus parfaite possible entre les caractéristiques des données du procédé externe et les éléments de la chaîne d'instrumentation. Cette adéquation doit être réalisée selon différents critères :

– Obtenir des données numériques les plus proches possible des données réelles ;

Copyright © 2017 Dunod.

– Minimiser le coût de cette réalisation ;
– Posséder un matériel standard pour répondre à l'évolutivité et à la réutilisabilité.

Aussi la démarche du choix d'une chaîne d'acquisition de données doit suivre une méthodologie aussi précise que possible ayant comme objectifs la détermination des paramètres importants de son application et le choix parmi des matériels existants correspondant à cette application.

Dans une chaîne d'acquisition de données, il est important de noter que les cartes d'entrées/sorties intègrent souvent des fonctions supplémentaires utilisées :

– Multiplexage permettant d'aiguiller une entrée parmi toutes les entrées vers le système de conversion ;
– Amplification variable ou programmable afin d'adapter la plage de variation en tension du signal à mesurer à un domaine proche de la tension maximale sans introduire pour cela de saturation ;
– Temporisation ou comptage pour la mesure du temps ou le déclenchement des actions d'entrées/sorties ;
– Relation normalisée avec l'ordinateur par l'intermédiaire d'un bus.

9.7.2 Architecture des cartes d'entrées/sorties analogiques

Selon les performances temporelles désirées et le coût minimum souhaité pour une fonction d'acquisition de données analogiques, trois architectures matérielles sont possibles. Ces différentes architectures matérielles reposent sur le fait que le canal d'acquisition de données analogiques peut être multiplexé à différents niveaux.

– Multiplexage des sorties des convertisseurs : dans ce cas le multiplexage est de type numérique (circuit logique) et s'effectue en fin de chaîne (*cf.* figure 9.4).
– Multiplexage des sorties des échantillonneurs/bloqueurs : dans ce cas le multiplexage est de type analogique et s'effectue juste avant la conversion analogique numérique (*cf.* figure 9.5).

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

– Multiplexage des entrées analogiques : dans ce cas le multiplexage est de type analogique et s'effectue en début de la chaîne d'acquisition de données (*cf.* figure 9.6).

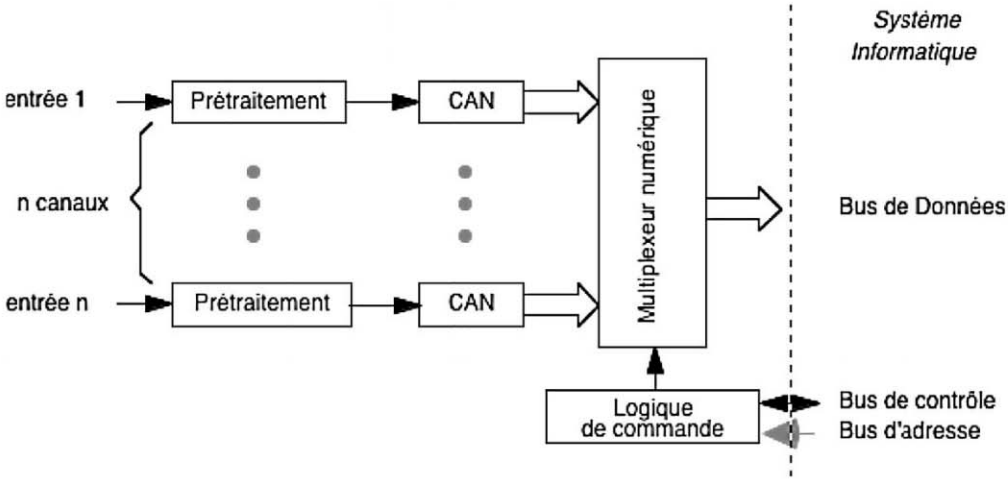

Figure 9.4 – Chaîne d'acquisition avec multiplexage logique des sorties des CAN.

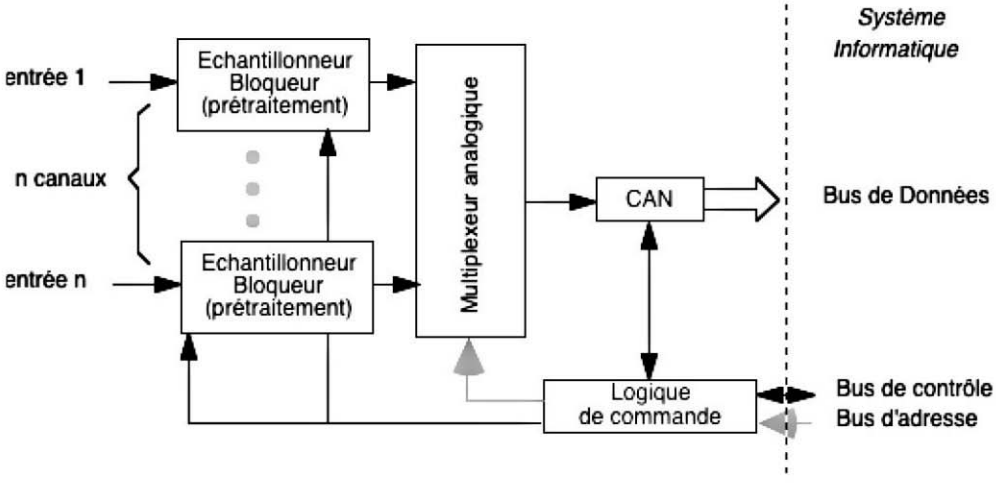

Figure 9.5 – Multiplexage des sorties des échantillonneurs/bloqueurs.

Copyright © 2017 Dunod.

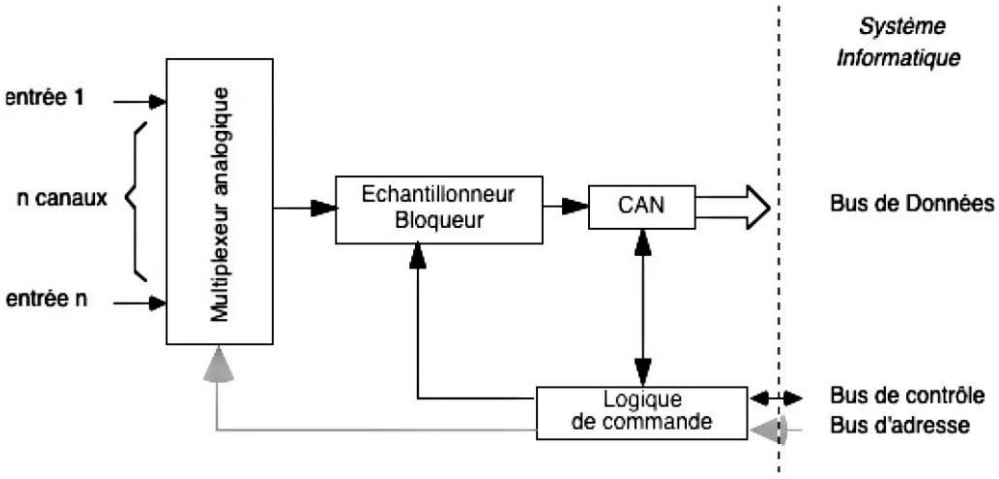

Figure 9.6 – **Multiplexage des entrées analogiques.**

9.7.3 Caractéristiques des cartes d'entrées/sorties

Le choix d'une carte d'entrées/sorties va être réalisé à partir des caractéristiques fournies par le constructeur. Chaque carte possède des spécifications techniques détaillées qui sont nécessaires lors du choix définitif. Mais dans une première étape, il est intéressant de pouvoir faire un choix à partir des critères de base. Ces caractéristiques principales (*main features*) peuvent être classées en 5 groupes :

– Le nombre des entrées analogiques ;

– Le nombre des sorties analogiques ;

– Le nombre des entrées et des sorties numériques ;

– Les compteurs ;

– Les éléments externes.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Il est très important de faire les deux remarques suivantes :

– Les entrées différentielles sont obtenues par l'association de deux entrées simples ou de mode commun ;

– La fréquence d'échantillonnage affichée pour une carte d'acquisition concerne une voie, c'est-à-dire que pour l'acquisition sur plusieurs voies en même temps, en scrutation par exemple, il est nécessaire de diviser cette fréquence par le nombre de voies utilisées.

9.7.4 Méthodologie de mise en œuvre d'une chaîne d'acquisition de données

a) Introduction

Considérons un procédé physique quelconque (chaîne de production, banc d'essais, expériences de laboratoires, etc.) qui doit être instrumenté, soit pour simplement réaliser des mesures ou des tests sur ce procédé ou pour mettre en place un contrôle complet de ce processus physique. En supposant que le procédé soit déjà équipé de capteurs et/ou d'actionneurs correctement choisis, se pose alors le problème de la mise en œuvre de la chaîne d'acquisition de données adaptée.

b) Caractérisation des signaux d'entrées/sorties

Après une analyse précise de l'ensemble des signaux d'entrée/sortie, le but est de traduire les principales caractéristiques de ces signaux (amplitude, temps, fréquence, précision, etc.) en caractéristiques de cartes d'acquisition étudiées au paragraphe précédent.

Ainsi, il est nécessaire de rappeler les différents types de signaux que l'on peut avoir à traiter et particulièrement de bien noter que cette différenciation est souvent faite par rapport aux paramètres temps ou fréquence :

– Les **signaux numériques** :

- de type tout ou rien et lentement variables (désignés comme continu) : la caractéristique essentielle du signal est liée au niveau (on-off, 0-1, 0 V - 5 V) à un instant donné. Aucune information n'est contenue dans les fronts de ce type de signal ;

Copyright © 2017 Dunod.

- de type impulsionnel et rapidement variables (désignés comme alternatif) : la caractéristique principale est liée à la fréquence ou à la durée des impulsions composant ce signal.

– Les **signaux analogiques** :

- lentement variables (de type continu) : la valeur précise de l'amplitude à un instant donné est le seul paramètre utile et de plus cette amplitude est considérée comme constante par rapport aux temps moyens d'acquisition ou de restitution de l'ordinateur ;
- variables ou rapidement variables (de type alternatif) : les caractéristiques utiles sont uniquement le temps et l'amplitude, c'est-à-dire l'évolution temporelle de la forme du signal ;
- rapidement variables ou très rapidement variables (de type alternatif) : une analyse temporelle et fréquentielle du signal est alors nécessaire afin d'extraire toute l'information du signal.

Pour terminer avec la caractérisation des signaux, le point le plus important et en même temps le plus délicat est effectivement de réaliser la correspondance entre le cahier des charges de l'application et les caractéristiques des cartes disponibles au niveau des signaux analogiques non continus.

c) Conclusion

Le concepteur d'application de mesures ou de contrôles de procédés physiques doit donc suivre une méthodologie précise afin de ne pas omettre des caractéristiques importantes qui risquent de fortement diminuer la qualité de la chaîne d'acquisition ou de restitution de données. Le résultat du suivi de cette méthodologie n'est bien évidemment pas unique puisque de nombreux facteurs ou caractéristiques restent indéterminés et dépendent de l'application comme :

– la compacité (applications embarquées) ;

– le coût (applications de grande production) ;

– des matériels déjà acquis et disponibles.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Copyright © 2017 Dunod.

LES BASES DU TRAITEMENT DES IMAGES

10

10.1 INTRODUCTION

Comme il avait été précisé dans l'introduction de cet ouvrage, le signal « image » se différencie du signal que nous avons étudié par le fait qu'il est bidimensionnel. Ainsi, à un instant donné t, l'image se caractérise par une valeur donnée k, appelée amplitude ou intensité, ayant une position dans l'espace repérée par les deux coordonnées abscisses-ordonnées (x,y) (*cf.* figure 10.1). Autrement dit, un signal « image » est modélisé par une matrice à deux dimensions n lignes et m colonnes : $I_{n,m}$. Chacune des lignes de la matrice correspond à une courbe d'évolution du signal en fonction de son intensité et l'ensemble de ces lignes forme une surface, traduction de cette image. Nous pouvons constater une complexité accrue : ce qui correspondait à une valeur du signal (amplitude) à un temps fixé se transforme par n x m valeurs de l'image (intensité). Une différence fondamentale avec un signal classique réside dans la nécessité et/ou l'intérêt de pouvoir faire des traitements et des analyses sur ce signal observé à un instant donné.

De plus, comme pour un signal classique, l'image peut aussi évoluer dans le temps avec une représentation $I_{n,m}(t)$. Cette évolution peut être observée à des instants définis régulièrement répartis ou non de façon continue sous la forme d'un film avec une cadence correspondant aux besoins de l'observation des changements dans l'image. Comme nous le verrons dans la suite, le traitement et l'analyse des images, liés au paramètre temps, vont engendrer des difficultés de temps de calcul étant donné la taille des données à traiter.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

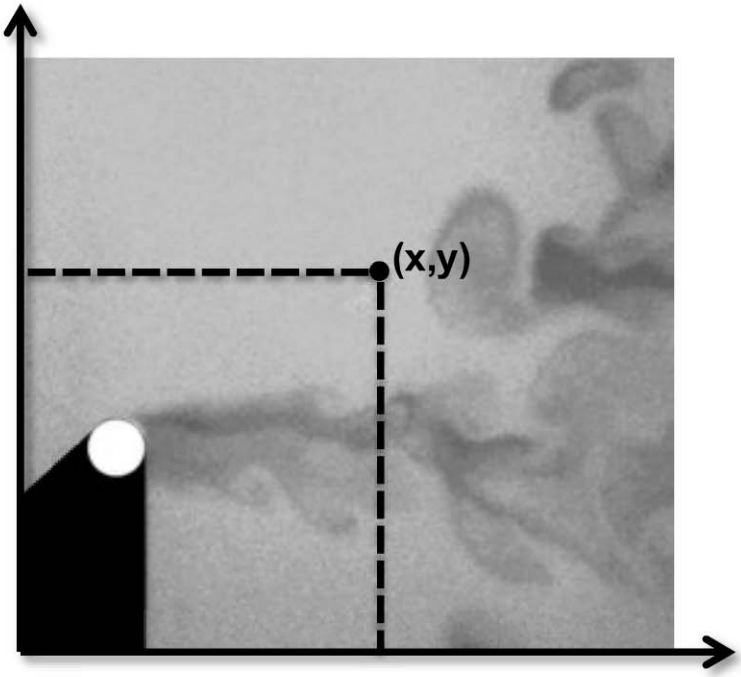

Figure 10.1 – Exemple d'une image dont chaque point est repéré par les coordonnées (point de la matrice) : visualisation d'écoulements.

Les domaines concernés par l'acquisition et le traitement des images se sont fortement étendus ces dernières années. Ainsi, nous pouvons citer :

- Les applications scientifiques (santé, cartes géographiques, recherche expérimentale, etc.) ;
- Le multimédia (photo, vidéo...) ;
- Les applications industrielles (robotique, qualité, production...) ;
- Les applications « grand public » (surveillance, affichages...).

Les besoins en termes de traitement et d'analyse des images dans ces différents secteurs sont extrêmement divers : rapidité (vidéo), fiabilité (santé), réalité (photo), robustesse (surveillance), ...

Copyright © 2017 Dunod.

En conclusion, la chaîne complète concernant les images peut être scindée en trois parties (*cf.* figure 10.2) :

– L'acquisition de l'image avec les aspects capteur et stockage ;
– Le traitement des images qui correspond à une mise en forme de l'image afin d'en extraire au mieux l'information désirée, exemple de l'élimination du bruit ;
– L'analyse de l'image ou traitement de haut niveau qui fournit l'information souhaitée : exemple d'une extraction de contours.

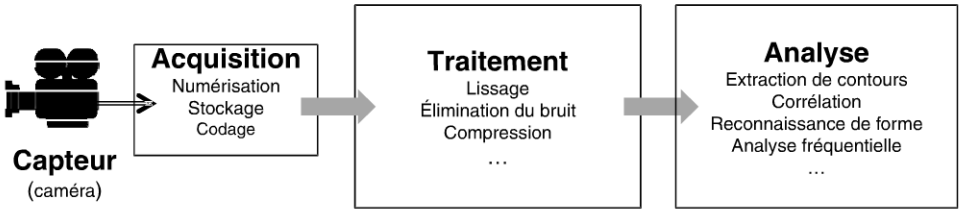

Figure 10.2 – La chaîne complète de l'acquisition et du traitement des images.

10.2 Acquisition d'un signal « image »

La phase d'acquisition de l'image, qui est une étape cruciale dans le sens où elle déterminera la capacité à l'extraction de l'information, se décompose en trois aspects :

– Le contexte de l'acquisition de l'image ;
– Le capteur de l'image ;
– La numérisation et/ou stockage de l'image.

10.2.1 Le contexte de l'acquisition

L'objet tridimensionnel (monument) ou la surface plane (observation d'un matériau poli) constitue la scène de prise de vue qui doit se traduire par une image. L'éclairage adapté constitue une condition nécessaire à cette acquisition. Celui-ci peut être un éclairage direct de lumière

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

blanche (frontal, latéral...), un éclairage arrière (objet en transparence), un éclairage monochrome par laser (observation plane d'un volume), un éclairage stroboscopique (observation filmée), etc. Cet éclairage sera plus ou moins élevé selon le type de surfaces (mate, brillante...) et cela afin d'obtenir une acquisition correcte pour une sensibilité du capteur donnée.

10.2.2 Le capteur de l'image

Les capteurs d'image sont constitués d'un ensemble de cellules photosensibles qui va convertir le signal lumineux en un signal électrique analogique. Ces capteurs photographiques peuvent être agencés en ligne et ensuite un balayage associé à un mouvement du capteur dans le temps sont nécessaires pour procéder à la capture de toute l'image ou, de façon plus courante, ces capteurs élémentaires sont organisés en matrice correspondant à l'image (voir figure 10.3).

Ces capteurs étant sensibles au flux lumineux, plus leur surface sera grande et plus leur sensibilité sera augmentée. En revanche, la taille du capteur va déterminer la précision de l'acquisition et donc, comme nous allons le voir, la capacité d'acquisition du capteur complet. En général, la taille du capteur unitaire est de l'ordre de quelques micromètres.

Les technologies pour réaliser ces capteurs sont assez proches et essentiellement de deux types :

– Capteurs CCD (*Charge-Coupled Device*) : taille très réduite, lecture rapide ;
– Capteurs CMOS (*Complementary Metal-Oxyde Semiconductor*) : consommation très faible, faible coût.

Chaque unité enregistre l'intensité lumineuse et sa couleur. Ce point d'acquisition de l'image est appelé « pixel » (*Picture Element*) ou *dot* ou point. Ainsi, un capteur d'image va se définir par sa **résolution** exprimée en nombre de pixel par unité de longueur (en général exprimé en **ppi ou dpi** : *pixels/dots per inch* ou pouce, soit 2,54 cm), cela est encore appelé la « **finesse spatiale** ». Elle peut aussi être exprimée en ppc (point par centimètre) ou en ppm (point par millimètre).

Copyright © 2017 Dunod.

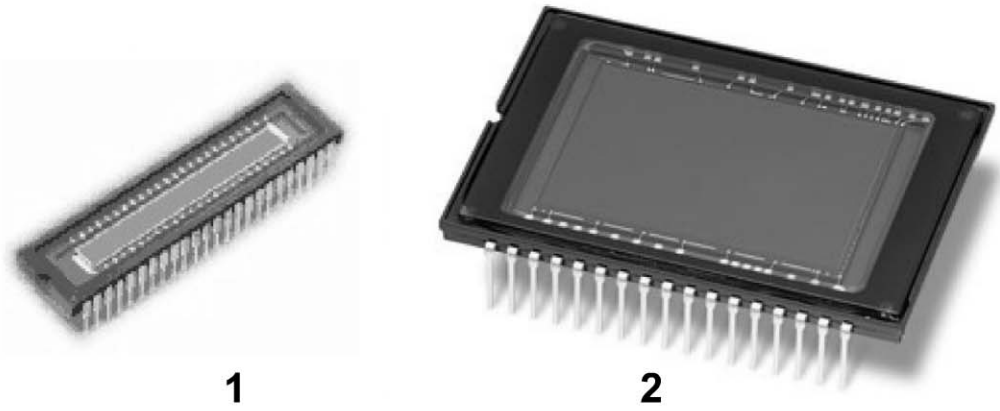

Figure 10.3 – Les deux principaux capteurs des images : 1 – barrette de capteurs linéaire, 2 – matrice de capteurs.

L'enregistrement de la couleur, en complément de l'intensité lumineuse, se fait en associant trois capteurs qui sont sensibles dans les trois couleurs fondamentales RVB (Rouge-Vert-Bleu). Cette sensibilité à une couleur est obtenue en apposant un filtre sélectif sur chaque capteur. Ainsi, nous voyons que, pour une matrice faite pour l'acquisition d'image couleur, un point ou pixel unitaire sera représenté par trois cellules (*cf.* figure 10.4). Il est important de noter que l'information couleur est parfois déterminante dans l'analyse d'une image et l'extraction de l'information.

Pour calculer la résolution d'une image numérique obtenue, il est nécessaire de connaître la capacité du capteur en termes de nombre de capteurs élémentaires (hauteur x largeur) et la taille de l'image, en supposant que l'image complète est projetée sur le capteur par une optique donnée. Prenons l'exemple d'un capteur assez classique dont la résolution est de 6 millions de pixels faisant intervenir une matrice constituée de 2 000 × 3 000 capteurs élémentaires. Considérons une image de 20 cm de hauteur par 30 cm de largeur. La résolution de cette image en noir et blanc sera donc en largeur de 3 000 pixels/30 cm ou en hauteur de 2 000 pixels/20 cm, soit de 100 ppc ou 254 dpi.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

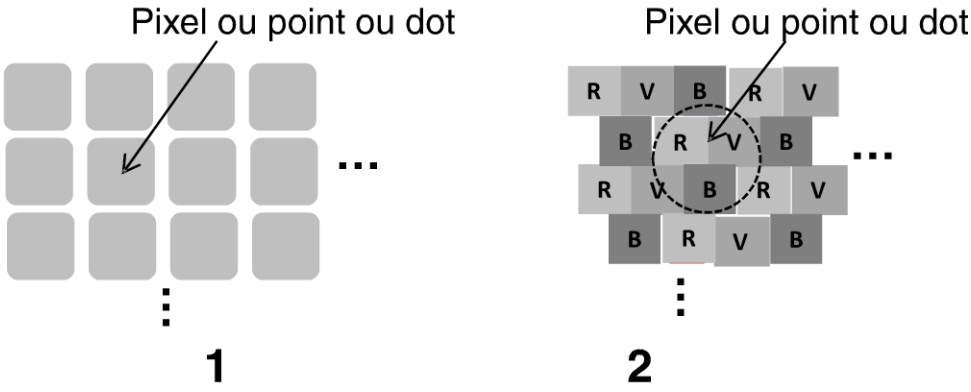

Figure 10.4 – **Les capteurs des images : 1 – intensité lumineuse (niveau de gris), 2 – couleurs RVB.**

10.2.3 La numérisation de l'image

L'acquisition, effectuée à partir du capteur précédent, conduit à une matrice dont la taille dépend de la résolution souhaitée ; mais chaque pixel a lui-même une valeur codée sur *n* bits dépendant de la quantification effectuée, soit 1 octet (255 niveaux) ou 2 octets (65 535 niveaux). Rappelons que pour une image couleur chaque pixel est représenté par 3 valeurs (couleurs RVB). Ainsi la numérisation de l'image sans aucun traitement (**image bitmap**) conduit à des tailles très importantes. Prenons un exemple simple d'une image photographique en noir/blanc (codé en 255 niveaux de gris) de 3 000 × 4 000 pixels, cela conduit à un fichier conséquent de 12 Mo pour une seule image noir/blanc. Les utilisateurs d'images à des fins de contenus informatifs ou même à des fins artistiques souhaitent généralement avoir une définition la plus grande possible (nombre de pixel élevé) afin de pouvoir procéder à des agrandissements ou à des analyses de détails.

Comme dans le cas du traitement du signal, il y aura un compromis entre la précision de l'image, donnant un certain contenu informatif, et la taille de cette image conduisant à des traitements trop longs.

Copyright © 2017 Dunod.

Ainsi la numérisation de l'image afin de la stocker et/ou de la transmettre peut se faire de deux manières différentes qui se déclinent en sous types :

– Image en représentation matricielle :
  - Image en format direct ;
  - Image en format compressé.
– Image en représentation vectorielle.

Dans le cas de la représentation matricielle, il est important de souligner que les images, qui nécessitent souvent des traitements de haut niveau pour avoir de l'extraction d'information (applications scientifiques), sont très souvent stockées sous forme bitmap, c'est-à-dire sous une forme matricielle brute sans une compression pouvant conduire à de la perte d'information. En revanche, les images utilisées par exemple dans le multimédia, où l'utilisation principale est l'observation par l'utilisateur, peuvent être compressées pour des gains de place en stockage et/ou de transmission sans nuire à la qualité de l'observation.

Les différents formats utilisés dans le cadre de cette représentation matricielle sont :

– **BitMaP** ou BMP : ce format donne des fichiers de grande taille mais sans aucune perte d'information (pas de compression) ;
– **GIF** (*Graphics Interchange Format*) : ce format est une image de type Bitmap mais avec une compression dite réversible. Mais la couleur ne peut être codée que sur 8 bits ;
– **TIFF** (*Tagged Image File Format*) : ce format est une image de type Bitmap mais souvent associé à une compression dite réversible. La couleur peut être codée sur 16 bits ou même 64 bits). Ce codage non destructif est très utilisé dans l'édition ;
– **JPEG** (*Joint Photographic Expert Group*) : ce format est en même temps une méthode de compression associée qui permet d'obtenir des fichiers de petite taille pour des qualités d'observation très correctes ; mais cette compression très efficace est destructive, l'image originale étant perdue.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Les principales méthodes de compression, qui sont caractérisées d'une part par leur capacité de réversibilité (ou *lossless*) permettant de revenir à l'original avec un calcul et d'autre part par leur taux de compression exprimé par le rapport « taille image originale/taille image compressée », sont les suivants :

– Algorithme de compression réversible (pour les codages GIF et TIFF) :
  - Algorithme RLE (*Run Length Encoding*) : méthode simple conduisant à des taux de compression faible (de l'ordre de 10 à 20 %) ;
  - Algorithme LZW (*Lempel-Ziv-Welch*) : codage par construction d'un dictionnaire de séquences avec des taux de compression moyen (de l'ordre de 20 à 50 %) ;
  - Algorithme de Huffman : codage par construction d'une bibliothèque de séquences avec des taux de compression élevé de 50 % en moyenne.
– Algorithme de compression irréversible (codage JPEG) : l'algorithme de compression, appelé DCT (*Discrete Cosinus Transform*), est basé sur l'élimination des détails. Les taux de compression obtenu peuvent être élevés et atteindre 90 %.

Le stockage des images sous forme vectorielle s'adresse particulièrement aux images produites avec des systèmes de PAO (dessin industriel, cartographie, etc.). L'image est décrite sous la forme d'objets géométriques simples (lignes, cercles, courbes de Bézier, textes…). La taille du fichier est très faible, en revanche la reconstruction de l'image peut être longue. La qualité première de cette représentation est de pouvoir subir des agrandissements sans aucune déformation due à la pixellisation des images (*cf.* figure 10.5). En revanche, ce mode de représentation est totalement inadapté à des images complexes de type photo.

En conclusion de ce chapitre consacré à l'acquisition et la numérisation des images, nous nous intéresserons principalement aux images « brutes » avec codage de type matriciel sans compression ou avec une compression réversible. Les méthodes de traitement et d'analyse qui seront présentées sont destinées à l'amélioration et à l'extraction d'information de ces images.

Copyright © 2017 Dunod.

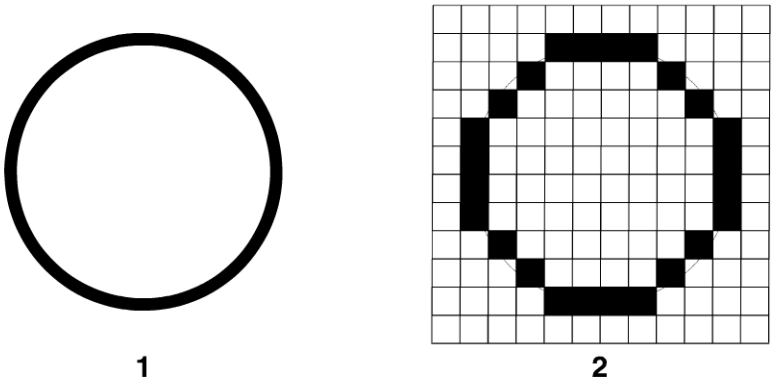

Figure 10.5 – Exemple de codage d'une image vectorielle (1) et l'équivalent en codage matricielle BitMap (2) montrant les capacités d'agrandissement de l'image vectorielle.

10.3 Traitement d'un signal « image »

Dans ce paragraphe, nous allons traiter de méthodes permettant d'améliorer l'image numérique acquise afin ensuite d'en extraire l'information souhaitée. Il est important de souligner que ces « prétraitements » seront différents selon l'analyse qui suivra afin de ne pas détériorer l'information recherchée. Parmi ces méthodes nous pouvons citer l'élimination du bruit, la restauration d'images dégradées par une non linéarité spatiale (mise au point de l'optique) ou par un bougé temporel, le rehaussement du contraste, les transformations géométriques, etc. Un autre traitement, appelé simplification de l'image, peut aussi être utilisé afin de supprimer des éléments non pertinents pour l'analyse.

10.3.1 Les méthodes d'élimination du bruit

Comme pour éliminer le bruit d'un signal monodimensionnel, nous parlerons de filtrage de l'image. Il faut noter que ce filtrage est maintenant de type spatial et non temporel, c'est-à-dire une séquence de répétition d'un motif au niveau de l'image. Le concept de base de ces filtrages est la transformation d'un pixel $p_{i,j}$ en fonction des pixels adjacents sur une zone plus ou moins grande (*cf.* figure 10.6).

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

La première méthode la plus simple pour éliminer un bruit aléatoire sur l'image, dû par exemple à une mauvaise luminosité, est le lissage comme pour un signal monodimensionnel. Ces différents lissages peuvent être déclinés de façon plus ou moins complexe : du lissage moyenneur au lissage extrémal.

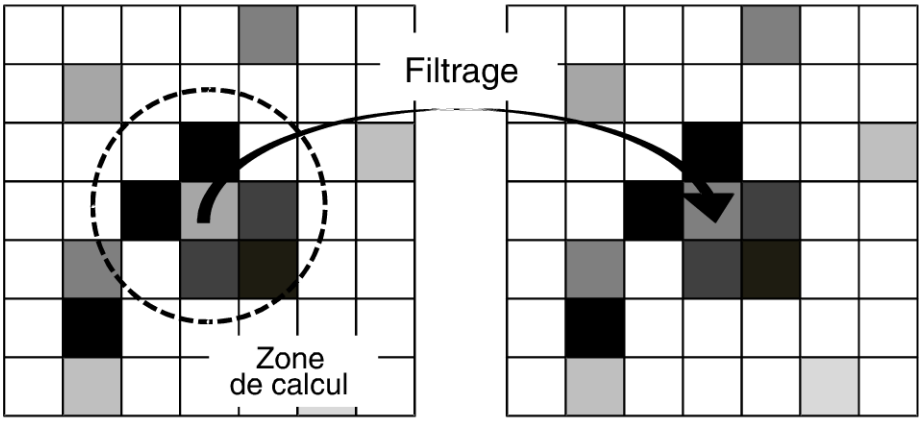

Figure 10.6 – Elimination du bruit d'une image par la transformation d'un pixel en fonction des pixels adjacents (zone de 3 sur 3).

Le filtre linéaire « moyenneur » ou par moyenne est le plus simple à réaliser. Pour un pixel donné, il consiste à faire la moyenne des intensités ou niveaux de gris ou de couleur de ce pixel et des pixels adjacents et de l'attribuer au pixel considéré. La taille de la zone considérée peut aller de 3×3 (moyenne sur 9 pixels) à 35×35 (moyenne sur 1 225 pixels).

Ce filtre va permettre d'éliminer les pixels de bruit isolé, mais en revanche il aura tendance à dégrader les transitions amenant du flou sur l'image. Cet effet de flou sur l'image sera d'autant plus important que la zone de calcul sera étendue.

Un exemple simple est présenté sur la figure 10.7 pour un lissage « moyenneur » sur une zone de 8 pixels adjacents et avec une numérisation sur 8 niveaux de gris. Sachant que l'image « théorique » comporte un carré noir au centre, le constat montre d'une part une éli-

Copyright © 2017 Dunod.

mination des pixels de bruits éparts sur l'image et d'autre part une atténuation de l'image initiale du carré placée au centre.

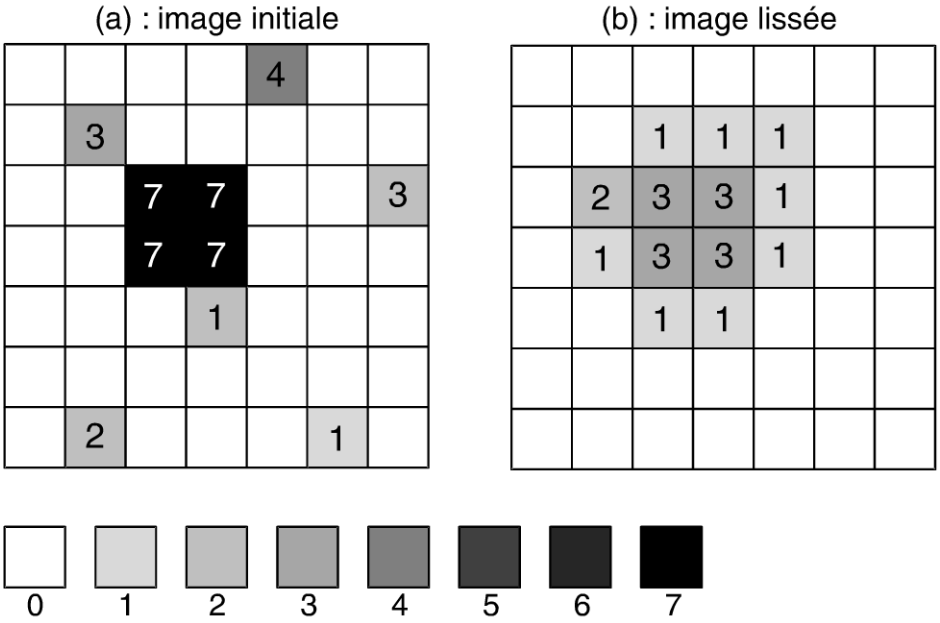

Figure 10.7 – Traitement du bruit d'une image par le lissage « moyenneur » de chaque pixel en fonction des 8 pixels adjacents.

D'autres filtres de type lissage linéaire ou non linéaire (en référence au calcul effectué sur les niveaux des pixels de la zone prise en considération) peuvent être mis en place afin d'atténuer le bruit sans altérer l'image par cet effet de flou. Ainsi, les filtres suivants sont utilisés :

– Filtre ou lissage linéaire « moyenneur » pondéré : un coefficient est affecté aux différents pixels de la zone mise en jeu au niveau du calcul en privilégiant le pixel central et les adjacents proches (verticaux et horizontaux).

– Filtre ou lissage non linéaire de type médian : les valeurs des intensités sont classées par ordre croissant et le niveau du pixel considéré est la valeur médiane de ce classement.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Comme dans le cas des signaux, on peut distinguer deux types de filtrage :

– Le filtrage passe-bas qui diminue le bruit mais atténue les détails de l'image (flou accentué) ;
– Le filtrage passe-haut qui accentue les contours et les détails de l'image mais amplifie le bruit.

10.3.2 Les transformations géométriques des images

Avant de réaliser la phase d'analyse et d'extraction de l'information souhaitée, il est parfois nécessaire de réaliser des transformations dites géométriques de l'image plus ou moins complexes comme les traitements suivants qui ont la caractéristique d'être réversible :

– Une translation de l'image ;
– Un changement de l'échelle (agrandissement ou rétrécissement) ;
– Une rotation de l'image ;
– Une déformation linéaire ;
– Une élimination de certaines parties de l'image inutiles à la récupération de l'information.

D'une manière générale et formelle, pour une image formée des pixels $p_{i,j}$ de coordonnées spatiales i variant de 1 à n et j variant de 1 à m, une transformation géométrique sur une image peut se représenter par l'opération matricielle suivante réalisée sur toutes les coordonnées spatiales des pixels :

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} + T$$

où M est la matrice de cette transformation géométrique et T le vecteur dit de translation.

Dans le cas où la matrice M est quelconque, la transformation géométrique est une déformation de l'image qui peut, par exemple, être souhaitée pour compenser une déformation inverse due à la captation de cette image (déformation due à l'optique de prise de vue).

Copyright © 2017 Dunod.

a) La translation des images

La translation d'images est une opération qui permet de faire glisser les images dans toutes les directions. Si cette opération est réalisée deux fois, cela revient à isoler une partie de l'image pour ensuite continuer l'analyse.

La matrice M de translation étant unitaire (pas d'effet), chaque translation peut s'exprimer à partir du vecteur translation T de l pixels dans le sens horizontal et de k pixels dans le sens vertical, soit l'expression mathématique :

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix}$$

L'un des éléments essentiels de cette transformation réside dans le choix des pixels non affectés étant donné la disparition de ceux qui sont sortis du cadre de l'image initiale. Leur intensité peut être choisie selon la suite du traitement et de l'analyse à effectuer.

b) L'agrandissement ou la diminution des images

L'utilisation de la transformation géométrique de changement de dimension (agrandissement ou diminution) permet d'augmenter la perception immédiate de certains détails ou au contraire de supprimer la visibilité de petits fragments. La matrice M de translation intègre des coefficients k_i et k_j qui s'appliquent aux coordonnées spatiales avec un rapport k_i/k_j correspondant aux dimensions de l'image pour conserver une taille identique (proportion préservée). Soit l'expression mathématique suivante :

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_i & 0 \\ 0 & k_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$$

Dans cette transformation, il est important de souligner l'aspect création de pixel dans le cas de l'agrandissement. En effet quand on diminue la taille de l'image, il suffit de supprimer un pixel sur x pixel pour obtenir ce changement de taille. En revanche, lors de l'agrandissement de l'image, il est nécessaire de recréer un pixel ou plus entre deux pixels existants. Comme pour un signal monodimensionnel, le terme employé

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

est le ré-échantillonnage. Ainsi, nous avons principalement deux méthodes simples mais qui ne sont pas équivalentes en termes d'analyse d'image :

– Méthode par blocage : chaque pixel, sur une ligne donnée j, est doublé ou recopié en partant de la gauche ou de la droite. Ainsi, pour un doublement de la taille, les pixels sont renumérotés $2i$ et les pixels $2i+1$ sont créés.

– Méthode par interpolation : pour une ligne donnée j, le pixel créé $2i+1$ est calculé à partir de l'intensité des deux pixels adjacents $2i$ et $2i+2$ en faisant, par exemple, la moyenne.

Il est important de souligner que cette seconde méthode qui est très utilisée dans le domaine de la photographie artistique est très délicate à utiliser dans une image qui va ensuite être analysée car cette méthode va créer des pixels. D'autres méthodes de ré-échantillonnage peuvent être utilisées pour encore améliorer le rendu de cet agrandissement ; au lieu d'utiliser une interpolation linéaire, d'autres fonctions plus complexes donnent des résultats plus efficaces en termes de « retouche » d'images.

c) La rotation des images

Dans certains cas, il peut y avoir nécessité de modifier la position angulaire de l'image. La rotation de l'image d'un angle α est obtenue en faisant le calcul suivant sur l'ensemble des coordonnées des pixels d'origine :

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$$

10.4 Analyse d'un signal « image »

Après avoir réalisé les traitements permettant d'améliorer la qualité de l'image ou de simplifier la zone à étudier, la phase d'analyse de l'image permet d'appréhender l'information contenue dans l'image (*cf.* figure 10.8).

Copyright © 2017 Dunod.

La phase d'analyse et d'extraction de l'information est complexe et dépend fortement du besoin. Nous avons ainsi de nombreuses méthodes selon l'objectif recherché, soit quelques exemples :

– Opération entre les images numériques ;
– Amélioration des images pour l'observation (histogramme) ;
– Détection de contour (accentuation, squelettisation) ;
– Détection d'éléments (reconnaissance de forme, détection d'objets) ;
– Segmentation ;
– Indexation des images (classification des images) ;
– Transformation de Fourier ;
– Etc.

Dans ce chapitre, nous allons simplement présenter quelques-unes de ces méthodes afin d'illustrer cette partie.

Image initiale | Image améliorée | Image analysée

Figure 10.8 – Après un traitement de l'image permettant d'éliminer une partie du bruit et une détection de contour, l'information concernant le nombre d'éléments peut être obtenue.

10.4.1 Les opération sur les images

Comme il a été présenté, l'image peut être décrite par une matrice $I_{n,m}$ à deux dimensions n lignes et m colonnes : $I(p_{i,j})$, I étant l'intensité du niveau de gris du pixel $p_{i,j}$ par exemple. Une des opérations les plus

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

simples à réaliser est la différence entre les deux matrices (différences de tous les éléments deux à deux) d'une même image prise à deux instants différents. Cela peut conduire à deux types d'analyse :

– La détection du bruit si l'on considère que les objets de l'image sont fixes. Cela permet ensuite d'éliminer ce bruit ;
– La détection du mouvement d'un objet dans l'image comme l'arrivée d'un véhicule ou d'une personne dans le champ d'observation.

10.4.2 L'utilisation des histogrammes pour le traitement des images

L'histogramme d'une image peut être défini comme la fonction représentant la répartition des pixels dans l'image par niveau d'intensité. L'abscisse est graduée selon les différents niveaux d'intensité, par exemple de 0 (noir) à 10 (blanc) si l'image est de type niveau de gris codé sur 4 bits. L'ordonnée représente le nombre de pixels d'un niveau d'intensité donné contenu dans l'image (*cf.* figure 10.9). Il est important de noter qu'un histogramme ne fournit aucune information spatiale, mais seulement une indication statistique de l'image (deux images différentes peuvent avoir le même histogramme). En revanche, l'analyse de cet histogramme permet immédiatement de caractériser l'image selon les quatre catégories :

– Image sombre (sous-exposée) : histogramme décalé vers la gauche ;
– Image claire (sur-exposée) : histogramme décalé vers la droite ;
– Image avec un faible contraste : histogramme centré et étroit ;
– Image avec un fort contraste : histogramme très large et plat.

L'opération qui peut être réalisée va conduire à améliorer le contraste de l'image ou une partie de l'image afin de mettre en exergue l'information recherchée. Les opérations sur les histogrammes sont aussi très nombreuses, soit par exemple (*cf.* figure 10.10) :

– Modification du contraste en appliquant une fonction croissante sur l'histogramme pour accentuer certaines zones : fonction linéaire, fonction logarithmique, fonction exponentielle ;

Copyright © 2017 Dunod.

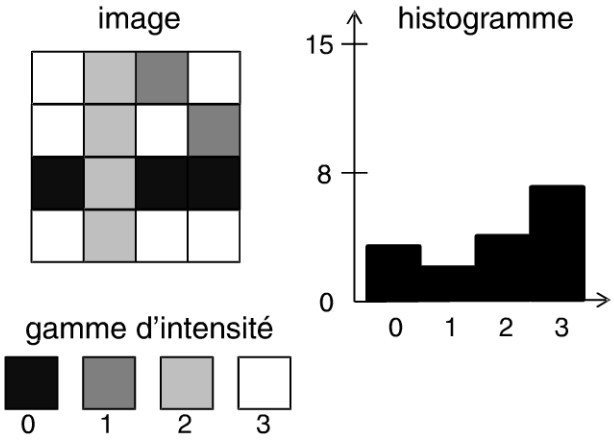

Figure 10.9 – Exemple d'une image numérique très simple formé de 16 pixels (matrice 4x4) et son histogramme basé sur un codage sur 2 bits de l'intensité (4 niveaux).

– Inversion de l'image en appliquant une fonction décroissante sur l'histogramme ;

– Seuillage ou binarisation de l'image qui diminue l'échelle des niveaux de l'intensité des pixels sur lequel l'image était initialement codée ;

– Opération sur la position et/ou la largeur de l'histogramme pour accroître la luminosité de l'image. En particulier, l'action de modification de la largeur de l'histogramme ou étirement de l'histogramme permet d'améliorer fortement certains détails.

10.4.3 La détection de contour

La technique d'analyse des images, basée sur la détection de contours, est très utilisée. En effet elle consiste à « isoler » un ou plusieurs objets dans une image en le réduisant à ses contours. Cela permet ensuite beaucoup plus facilement par l'observation ou avec des techniques automatiques de suivre ce ou ces objets, de compter ces objets, d'identifier leur forme... Un des avantages de cette technique d'extraction des contours

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

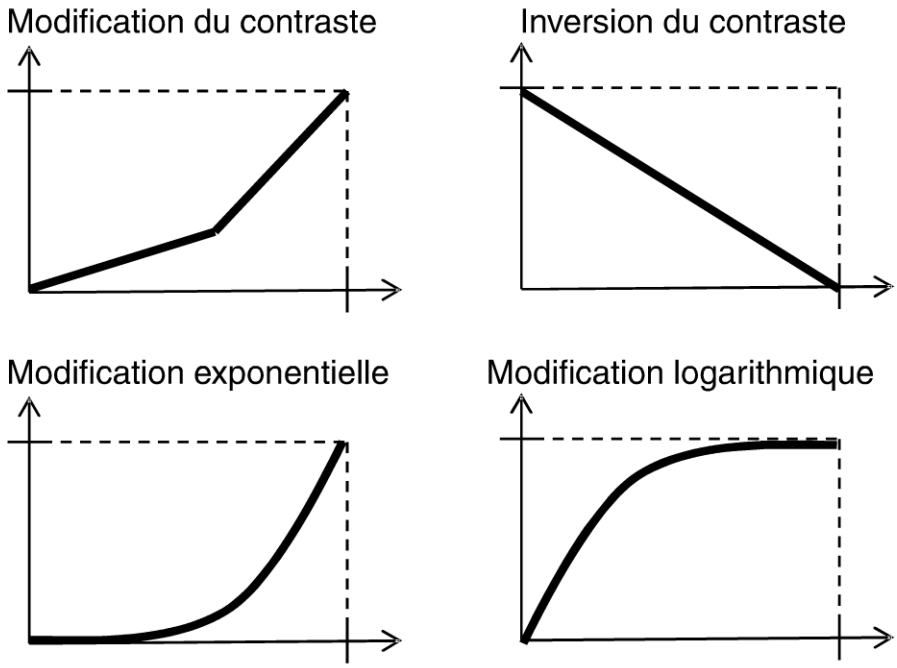

Figure 10.10 – Différentes fonctions à appliquer à l'histogramme afin de modifier le contraste de l'image.

est de limiter fortement les informations contenues dans l'image aux seuls contours des objets « utiles » de la dite image.

Le contour peut être défini comme le gradient d'intensité mesuré sur une ligne donnée ou sur un ensemble de lignes, c'est-à-dire le changement d'intensité au niveau d'une suite de pixels. Cette zone de transition entre deux niveaux étant identifiée, il suffit de l'accentuer par différentes méthodes de traitement de l'image. Il est possible de décliner les types de changement d'intensité en trois formes principales, la deuxième étant une forme de la première :

– La rampe d'intensité ;

– La marche d'intensité ;

– Le pic d'intensité.

Copyright © 2017 Dunod.

Pour extraire et ne laisser que les contours des objets contenus dans l'image, plusieurs techniques peuvent être utilisées comme par exemple :

– L'utilisation d'une transformation basée sur la dérivée première ;

– L'utilisation d'une transformation basée sur la dérivée seconde ;

– L'utilisation de transformations basées sur des filtrages ;

– L'utilisation d'une transformation dite de squelettisation.

Une fois le contour « identifié » par l'une des méthodes appliquées, le contour est tracé soit en noir soit en blanc et la zone de part et d'autre de ce contour est remplie respectivement par des pixels en blanc ou en noir.

La première méthode, la plus simple à mettre en œuvre, conduit à remplacer le changement d'intensité par la dérivée de celui-ci. Ainsi, pour un changement d'intensité selon une rampe nous avons un créneau et pour un changement d'intensité de type marche, nous obtenons un pic très étroit (pic de Dirac). L'image obtenue dans ce cas permet de transformer l'image en un ensemble de contours plus ou moins larges selon les rampes d'intensité des objets.

En utilisant la méthode basée sur la dérivée seconde, les contours sont alors plus fins et donc l'extraction des objets (reconnaissance par l'observation) est plus efficace. Lors de l'analyse d'images plus réelles émanant d'expérimentations de laboratoire. Cette extraction fine des contours est primordiale pour interpréter correctement des phénomènes physiques complexes. Cette méthode, basée sur les dérivées, est similaire à l'application d'un filtrage passe-haut, favorisant les transitions rapides.

La deuxième méthode, qui va être présentée succinctement, est la squelettisation. Cette méthode permet une analyse de formes qui réduit un élément à un ensemble de courbes centrées dans la forme de l'objet. Cette méthode permet de reconnaître un objet quelle que soit son épaisseur. En particulier, elle est très utilisée dans la reconnaissance d'une écriture manuelle faite avec des crayons de dimensions quelconques (*cf.* figure 10.11).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

Une des méthodes permettant de réaliser cette squelettisation est l'amincissement successif de l'objet ou pelage. À l'initialisation de la méthode, l'ensemble des pixels possède un poids identique. Ensuite le principe consiste à augmenter le poids des pixels en haut ou en bas de pixels appartenant à l'objet. Les pixels « extérieurs » de plus faible poids sont éliminés et la méthode est réitérée avec une succession de balayage. Les pixels isolés sont éliminés en court et les coupures entre des groupes de pixels sont rassemblées en ajoutant des pixels. Le processus est arrêté lorsque l'épaisseur de l'objet correspond à un ou deux pixels.

Figure 10.11 – Reconnaissance d'une écriture manuelle par squelettisation obtenue par amincissements successifs.

10.4.4 La détection d'éléments (la reconnaissance des formes)

Dans ce dernier paragraphe, l'analyse d'image au plus haut niveau est abordée. En effet, après avoir fait l'acquisition de l'image dans les conditions les plus favorables et après avoir fait des traitements de l'image permettant d'éliminer le bruit, d'améliorer la représentation ou d'isoler certaines parties, cette étape ultime doit fournir des réponses concernant le contenu informatif de l'image. Si nous reprenons l'exemple précédent (*cf.* figure 10.11), le système d'analyse automatique doit fournir l'information stipulant que le chiffre « 2 » est présent dans l'image.

Copyright © 2017 Dunod.

La détection d'éléments et la suite logique de la reconnaissance des formes permettent à un système de s'affranchir de l'observation humaine et de donner une information de haut niveau sur le contenu de l'image. De nombreuses applications sont développées actuellement en se basant sur la fiabilité accrue de cette technique :

– La reconnaissance de l'écriture manuscrite après l'étape de la squelettisation que nous avons vue précédemment ;
– La reconnaissance des visages et des personnes (contrôle d'accès, sécurité...) ;
– Le contrôle de l'environnement pour le déplacement des objets automatisés (robots, drones...).

Il est important de souligner deux caractéristiques essentielles de cette reconnaissance des formes :

1. La nécessité de disposer d'une base de référence des objets à reconnaître (bases préexistantes ou formées par apprentissage) ;
2. Le résultat n'est pas une réponse certaine à 100 %, mais le fruit d'une approche statistique : l'objet présent dans l'image « ressemble à l'objet de la base à × % ».

La caractéristique 1 correspond à l'opération qu'effectue le cerveau humain dans la compréhension de son environnement : quelle est cette lettre, ce mot ? Quel est cet objet ? Quelle est cette personne ? Si cet élément est connu (en mémoire), il est identifié, dans le cas contraire la base de connaissance sera enrichie.

Mais à ce niveau de décision intervient la caractéristique 2. En effet un objet donné simple ou complexe peut avoir une très grande variabilité de représentation. Prenons l'exemple de l'écriture manuelle, un chiffre ou un caractère peut prendre de nombreuses formes selon la personne qui l'a écrit. Deux méthodes répondent à cette problématique (*cf.* figure 10.12) :

– Soit un maximum de représentation du même objet est stocké dans la base pour comparaison (si l'objet est un peu complexe, cela peut s'avérer très difficile et coûteux en espace et en temps pour la comparaison) ;

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

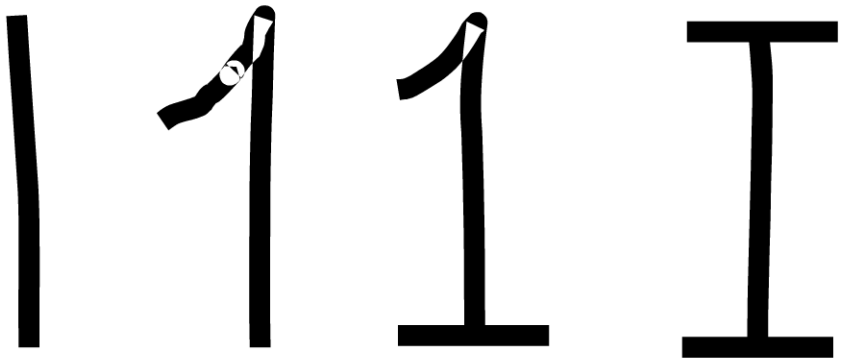

Figure 10.12 – Quelques formes différentes de l'écriture du chiffre « 1 » nécessaires à prendre en compte pour la reconnaissance d'une écriture manuelle après la squelettisation.

– Soit l'objet est stocké sous la forme des principaux traits le caractérisant : les courbes et les droites devant ou pouvant le composer.

Il est évident que, même pour des objets qui semblent simples (un chiffre, une lettre…), la reconnaissance de cet élément de façon certaine est extrêmement difficile. Outre les multiples formes de l'objet, cet élément, présent dans l'image, peut être avec un contraste faible, peut ne pas être dans une position favorable (verticalité pour l'écriture).

Pour des objets complexes, la méthode générale consiste à procéder par éléments de base le composant. Par exemple, si nous souhaitons identifier l'objet « maison » sur des photographies, il est possible de procéder à l'identification des éléments de base : cheminée, toit, fenêtres, portes, murs… chacun ayant des positionnements définis. De même, si nous souhaitons identifier un visage humain, les yeux, le nez, la bouche et les cheveux seront les éléments à cerner.

En conclusion, lors de la réalisation d'une reconnaissance de forme d'un objet dans une image, les étapes suivantes sont nécessaires :

– Isolement de l'objet à identifier ;

Copyright © 2017 Dunod.

– Amélioration de l'image de cet objet pour la reconnaissance : augmentation du contraste (traitement basé sur l'histogramme), squelettisation, etc.

– Transformations géométriques de l'objet isolé si nécessaire : agrandissement/diminution, rotation ;

– Comparaison avec la base de connaissances et/ou identification des principales caractéristiques de cet objet ;

– Décision de la reconnaissance de l'objet.

La comparaison à la base de connaissance des objets complets ou des éléments devant composer l'objet se fait à partir d'une fonction de corrélation bidimensionnelle proche de celle que nous avons vue pour les signaux monodimensionnels. Ainsi le résultat n'est pas binaire, mais donne un taux de corrélation entre l'objet observé sur l'image et un objet en référence. Le temps d'analyse peut être important d'une part si la base de référence est importante (nombre d'objets à comparer) et d'autre part si l'objet est complexe (corrélation demandant un calcul matriciel plus important).

Ces techniques de reconnaissance de formes ne cessent de se multiplier dans diverses applications de plus en plus complexes, comme celui de la conduite automatique de véhicules routiers : lecture des panneaux, lecture de la route, perception de l'environnement (autres véhicules, autres objets en bordure ou sur la route, etc.). A la difficulté du traitement d'image réelle et complexe, celui du traitement d'une image qui évolue rapidement dans le temps apporte une dimension supplémentaire.

10.5 Conclusion

Comme dans le cas des signaux monodimensionnels mais qui évoluent dans le temps, l'étape cruciale est l'acquisition de ce signal. Ainsi l'image numérique sera d'autant plus utilisable au sens « extraction d'information » que celle-ci aura une grande qualité : peu de bruit, contraste important, objets bien éclairés, etc.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Les techniques de traitement des images, afin d'en améliorer l'utilisation soit directe par l'observation, soit automatisée, sont de plus en plus efficaces et permettent souvent de récupérer de l'information dans l'image où la simple observation humaine initiale ne peut la déceler.

En revanche l'extraction d'une information de haut niveau comme la présence ou non d'un objet référencé dans une image réelle est encore en plein développement pour avoir une réponse fiable et rapide. Pour un objet même simple, la variabilité de son image dans un ensemble complexe est liée non seulement à la qualité de l'acquisition de l'image, mais aussi de sa taille, de sa position, du chevauchement avec d'autres objets, etc. Aussi les méthodes vont donner des résultats avec un certain degré de validation, mais pas avec certitude.

Copyright © 2017 Dunod.

ANNEXES A

A.1 IMPULSION DE DIRAC

A.1.1 Définitions

a) Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac ou la distribution de Dirac peuvent être vues comme un outil symbolique permettant de formuler des expressions. L'impulsion de Dirac ou pic de Dirac, notée δ, peut être perçue comme la limite d'une impulsion d'amplitude A et de durée $1/A$ lorsque A tend vers l'infini. L'aire de cette impulsion est constante et égale à 1 quel que soit A. Le pic de Dirac sera défini comme ayant un poids ou une « masse » de 1 en $x = 0$ (*cf.* figure A.1). Dans le domaine du traitement du signal, le pic de Dirac $\delta(x)$ est une distribution ou « fonction » qui vérifie :

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pour } x \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cdot \mathrm{d}x = 1$$

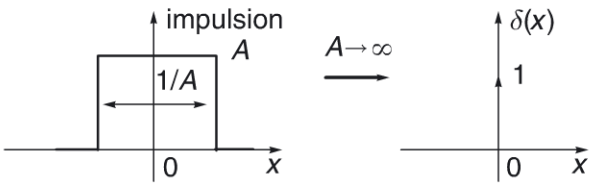

Figure A.1 – Représentation de l'impulsion ou pic de Dirac.

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

b) « Peigne » de Dirac

Utilisé pour la démonstration de l'échantillonnage des signaux, le « peigne » de Dirac, qui s'écrit $\mathrm{Pgn}_A(x)$, est une suite de pics de Dirac régulièrement espacés de A, appelé période du peigne. Soit la relation de définition (*cf.* figure A.2) :

$$\mathrm{Pgn}_A(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k \cdot A)$$

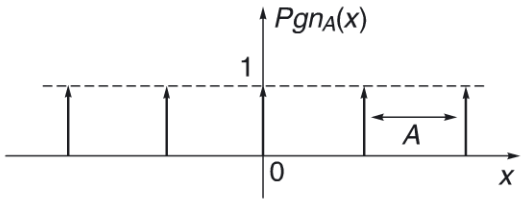

Figure A.2 – Représentation d'un peigne de Dirac.

A.1.2 Principales propriétés

Il est important de souligner que, pour des raisons de facilité, les opérations décrites ci-après utilisent des notations identiques à celles utilisées pour les fonctions bien que nous soyons dans le domaine des distributions.

a) Propriétés de localisation (opération de « produit »)

Pour une fonction $f(x)$, on a les relations suivantes :

$f(x) \cdot \delta(x) = f(0) \cdot \delta(x)$: pic de Dirac de poids $f(0)$ en 0

et $f(x) \cdot \delta(x - a) = f(a) \cdot \delta(x - a)$: pic de Dirac de poids $f(a)$ en a

Pour deux pics de Dirac, le produit n'est pas défini ; mais nous poserons les relations suivantes :

$$[A \cdot \delta(x - a)] \cdot [B \cdot \delta(x - b)] = 0 \qquad \text{si } a \neq b$$

et

$$[A \cdot \delta(x - a)] \cdot [B \cdot \delta(x - b)] = A \cdot B \cdot \delta(x - a) \quad \text{si } a = b$$

Copyright © 2017 Dunod.

b) Propriétés d'élément neutre (opération de « convolution »)

$f(x) * \delta(x) = f(x)$: fonction $f(x)$

et $f(x) * \delta(x-a) = f(x-a)$: fonction $f(x)$ translatée de a

Pour deux pics de Dirac, le produit de convolution n'est pas défini ; mais nous poserons la relation suivante :

$$[A \cdot \delta(x-a)] * [B \cdot \delta(x-b)] = A \cdot B \cdot \delta(x-b-a)$$

c) Propriétés d'échantillonnage avec le peigne de Dirac (produit)

Pour une fonction $f(x)$, on a les relations suivantes :

$$f(x) \cdot \mathrm{Pgn}_A(x) = f(x) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x-kA) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x-kA)$$

$$f(x) \cdot \mathrm{Pgn}_A(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(A) \cdot \delta(x-kA)$$

Ainsi le peigne de Dirac échantillonne la fonction $f(x)$ aux abscisses où il existe.

d) Propriétés de périodisation avec le peigne de Dirac (convolution)

Pour une fonction $f(x)$, on a les relations suivantes :

$$f(x) * \mathrm{Pgn}_A(x) = f(x) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x-kA) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x) * \delta(x-kA)$$

$$f(x) * \mathrm{Pgn}_A(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x-kA)$$

Ainsi le peigne de Dirac périodise la fonction $f(x)$ avec une période A égale à l'intervalle entre les pics de Dirac.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

A.2 Fonctions mathématiques utilisées en traitement du signal

A.2.1 Notations complexes

a) Notation complexe des fonctions circulaires

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \left[e^{j \cdot \theta} + e^{-j \cdot \theta} \right] \quad j \text{ étant le symbole « imaginaire pur »}$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot \left[e^{j \cdot \theta} - e^{-j \cdot \theta} \right]$$

d'où :

$$e^{j \cdot \theta} = \cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta) \quad \text{et} \quad e^{-j \cdot \theta} = \cos(\theta) - j \cdot \sin(\theta)$$

et les valeurs particulières suivantes :

$$e^{j \cdot (2 \cdot p + 1) \cdot \frac{\pi}{2}} = j \cdot (-1)^p \,, \quad e^{j \cdot n \cdot \pi} = (-1)^n \,, \quad e^{j \cdot (2 \cdot p + 1) \cdot \pi} = -1$$

b) Notions de base sur les complexes

Soit le complexe z, nous pouvons l'écrire sous la forme cartésienne :

$$z = x + j \cdot y$$

ou selon la notation polaire :

$$z = x + j \cdot y = r \cdot (\cos\theta + j \cdot \sin\theta) = r \cdot e^{j \cdot \theta}$$

avec le module $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et l'argument $\theta = \text{arctg}\,(y/x)$

Le complexe conjugué de z s'écrit $\overline{z}$ avec :

$$\overline{z} = x - j \cdot y = r \cdot (\cos\theta - j \cdot \sin\theta) = r \cdot e^{-j \cdot \theta}$$

Copyright © 2017 Dunod.

A.2.2 Formules trigonométriques

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

et

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

et

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\cos(2 \cdot a) = 2 \cdot \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 a$$

et

$$\cos^2 a = 1/2 \cdot [1 + \cos(2 \cdot a)]$$

$$\sin(2 \cdot a) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$

et

$$\sin^2 a = 1/2 \cdot [1 - \cos(2 \cdot a)]$$

A.2.3 Fonctions sinus cardinal

La fonction de sinus cardinal sinc(ax) ou $\sin(\pi ax)/\pi ax$ est présentée sur la figure A.3. Cette fonction est paire et présente son maximum égal à 1 en $x = 0$.

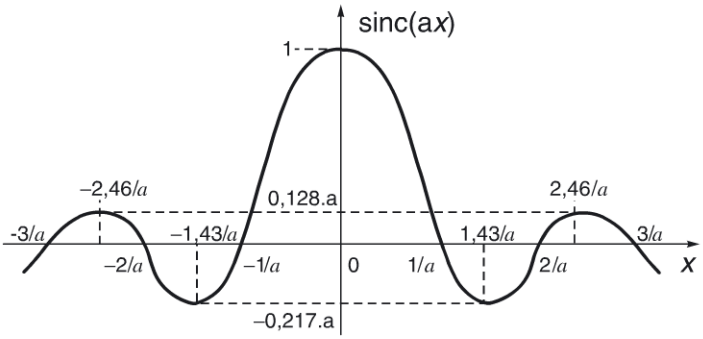

Figure A.3 – Fonction sinus cardinal sinc(*ax*).

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

A.2.4 Fonctions de Bessel

a) Définition et propriétés

Les fonctions de Bessel de première espèce de la variable x et d'ordre n entier $J_n(x)$ peuvent être exprimées sous la forme intégrale suivante :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \cos(x \cdot \sin\alpha - x \cdot \alpha) \cdot \mathrm{d}\alpha \quad \text{avec } n \in \aleph$$

La figure A.4 présente l'allure de quelques fonctions de Bessel. Les principales propriétés sont :

– symétrie par rapport à l'axe des ordonnées : $J_{-n}(x) = (-1)^n \cdot J_n(x)$

– amplitude limitée : $\lim\limits_{n\to\infty} J_n(x) = 0$ ou $J_n(x) \approx 0$ pour $n > x$

– puissance bornée : $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(x) = 1$

b) Relations avec les fonctions circulaires

Les fonctions de Bessel de première espèce permettent en particulier d'exprimer les fonctions circulaires complexes suivantes :

$$\cos(x \cdot \sin\alpha) = J_0(x) + 2 \cdot J_2(x) \cdot \cos(2 \cdot \alpha) + 2 \cdot J_4(x) \cdot \cos(4 \cdot \alpha) + \cdots$$

et $\sin(x \cdot \sin\alpha) = 2 \cdot J_1(x) \cdot \sin(\alpha) + 2 \cdot J_3(x) \cdot \cos(3 \cdot \alpha) + \cdots$

De façon plus générale, nous avons : $\mathrm{e}^{j \cdot x \cdot \sin\alpha} = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) \cdot \mathrm{e}^{j \cdot n \cdot \alpha}$

A.2.5 Probabilités et statistiques

a) Définitions

Une **variable aléatoire** définie sur un ensemble d'expériences est donc une variable numérique x dont la valeur est déterminée par le résultat de chaque expérience ou épreuve. Le modèle mathématique d'une telle variable est une **fonction aléatoire** dans le cas général ou processus aléatoire si l'évolution est temporelle.

Copyright © 2017 Dunod.

On distingue deux types de variables aléatoires, celles qui sont discrètes (nombre fini de valeurs) ou celles qui sont continues (infinité de valeurs).

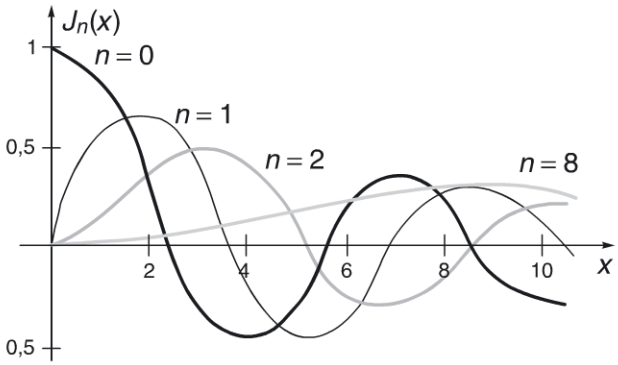

Figure A.4 – Fonctions de Bessel de première espèce pour $n \geq 0$.

Si il est impossible de prévoir à l'avance la valeur x_i de la variable aléatoire discrète x que l'on va obtenir, on peut définir la **probabilité** P_i de réaliser cette valeur, définie par :

$$P_i = \lim_{N \to \infty} \frac{N_i}{N} \quad \text{avec N nombre d'expériences}$$

et N_i nombre de réalisations de $x = x_i$.

Grâce à la loi des grands nombres, la valeur de P_i peut être estimée à partir du nombre total n de valeurs pour x et du nombre de réalisations n_i de la valeur x_i :

$$P_i = \text{Prob}\{x = x_i\} = n_i/n \quad \text{avec } 0 \leq P_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

De la même manière pour une variable aléatoire continue, on définit la **densité de probabilité** ou la fonction de distribution $p(x)$ avec les propriétés suivantes :

$$p(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \cdot \mathrm{d}x = 1$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Ainsi la probabilité d'avoir une valeur de x comprise entre x et $x+\Delta x$ est donné par :

$$P_{\Delta x} = Prob\,\{x \in [x, x + \Delta x]\} = p(x) \cdot \Delta x$$

et la probabilité d'avoir la variable x comprise dans l'intervalle $[x_i, x_j]$ est :

$$P_{i,j} = \text{Prob}\left\{x \in \left[x_i, x_j\right]\right\} = \int_{x_i}^{x_j} p(x) \cdot \mathrm{d}x$$

b) Moyenne. Moments. Écart type

Dans le cas d'un très grand nombre d'épreuves, il est possible de définir la valeur moyenne ou l'espérance de la variable aléatoire x :

– cas d'une variable aléatoire discrète : $m = E_{sp}\,[x] = \sum_i P_i \cdot x_i$

– cas d'une variable aléatoire continue : $m = E_{sp}\,[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} p\,(x) \cdot x \cdot \mathrm{d}x$

Par définition, le moment d'ordre n (entier positif) d'une variable aléatoire x est la valeur moyenne de la puissance n de x ou l'espérance de x^n :

– cas d'une variable aléatoire discrète : $m_n = E_{sp}\,[x^n] = \sum_i P_i \cdot x_i^n$

– cas d'une variable aléatoire continue :

$$m_n = E_{sp}\,[x^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} p\,(x) \cdot x^n \cdot \mathrm{d}x$$

L'**écart type** σ est défini comme la valeur quadratique moyenne centrée, soit :

$$\sigma = \sqrt{E_{sp}[(x - m)^2]}$$

L'écart type, appelé aussi fluctuation absolue ou déviation standard, donne une évaluation de la « dispersion » d'une variable aléatoire autour de sa valeur moyenne.

Copyright © 2017 Dunod.

c) Fonctions caractéristiques d'une variable aléatoire

Dans le cas d'une variable aléatoire continue x avec pour densité de probabilité $p(x)$, on définit la première fonction caractéristique $\varphi_x(t)$ comme :

$$\varphi_x(t) = E_{sp}\left[\mathrm{e}^{jtx}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \cdot \mathrm{e}^{jtx} \cdot \mathrm{d}x \quad \text{avec } t \in \Re$$

Ainsi la transformée de Fourier de $\varphi_x(t)$ donne la densité de probabilité :

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(t) \cdot \mathrm{e}^{-jtx} \cdot \mathrm{d}t$$

Cette fonction caractéristique permet aussi de calculer les différents moments d'ordre n de la variable aléatoire x :

$$E_{sp}\left[x^n\right] = \frac{1}{j^n}\left[\frac{\mathrm{d}^n \varphi_x(t)}{\mathrm{d}t^n}\right]_{t=0}$$

La seconde fonction caractéristique se définit comme :

$$\psi_x(t) = \mathrm{Ln}\left[\varphi_x(t)\right] \quad \text{avec Ln le logarithme népérien}$$

d) Systèmes à deux variables aléatoires

À chaque épreuve, on considère que le système fournit deux valeurs correspondant à deux variables aléatoires x et y.

La fonction de distribution des variables aléatoires x et y étant $p_{x,y}(x, y)$, la probabilité d'avoir une valeur de x comprise entre x et $x + \Delta x$ et une valeur de y comprise entre y et $y + \Delta y$ est donné par :

$$P_{\Delta x, \Delta y} = \mathrm{Prob}\left\{x \in [x, x + \Delta x], \quad y \in [y, y + \Delta y]\right\} = p_{x,y}(x, y) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

avec les relations suivantes :

$$p_{x,y}(x, y) \geq 0 \quad \text{et} \quad \iint_{\infty} p_{x,y}(x, y) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y = 1$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

On définit la fonction de distribution $p_x(x)$ de la variable aléatoire x en ignorant y et la fonction de distribution $p_y(y)$ de y en ignorant x par les relation suivantes :

$$p_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{x,y}(x, y) \cdot \mathrm{d}y \text{ et } p_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{x,y}(x, y) \cdot \mathrm{d}x$$

Par définition deux variables aléatoires sont stochastiquement **indépendantes** si leur fonction de distribution $p_{x,y}(x, y)$ peut s'écrire sous la forme :

$$p_{x,y}(x, y) = p_x(x) \cdot p_y(y)$$

Enfin on définit le **coefficient de corrélation** r_{xy} de deux variables aléatoires x et y de moyenne respective m_x et m_y et d'écart type σ_x et σ_y par la relation suivante :

$$r_{xy} = \frac{E_{sp}\left[(x - m_x) \cdot \left(y - m_y\right)\right]}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

La valeur de r_{xy} est comprise entre 0 et 1. Si $r_{xy} = 0$, les deux variables aléatoires sont dites non corrélées (pas obligatoirement indépendantes).

e) Loi de Gauss

Les variables aléatoires continues qui suivent une loi de Gauss sont très importantes car elles correspondent à de nombreux cas réels (sources de bruit usuelles, etc.). La fonction de distribution ou densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne x de moyenne m et d'écart type σ s'écrit :

$$p\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Cette fonction est entièrement déterminée par les deux paramètres m et σ. La représentation de cette loi de probabilité sur la figure A.5 montre que :

– la probabilité de trouver $x \in [m - \sigma, m + \sigma]$ est de 68,3 %

Copyright © 2017 Dunod.

– la probabilité de trouver $x \in [m - 2\sigma, m + 2\sigma]$ est de 95,4 %

– la probabilité de trouver $x \in [m - 3\sigma, m + 3\sigma]$ est de 99,7 %

Si on considère la variable aléatoire gaussienne centrée $x-m$, les moments d'ordre impair sont nuls et les moments d'ordre pair s'expriment à partir de σ^2 :

$$E_{sp}[(x-m)^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k(k!)} \cdot \sigma^{2k} \quad \text{et} \quad E_{sp}[(x-m)^{2k+1}] = 0$$

L'importance de cette loi de distribution tient surtout au **théorème central limite** qui s'énonce de la manière suivante :

> si une variable aléatoire est la somme d'un très grand nombre de variables aléatoires indépendantes, ayant chacune une loi de distribution quelconque mais de faible amplitude par rapport à la somme (l'influence de chacune des contributions est faible), alors la distribution de la variable aléatoire globale est donnée par une loi gaussienne.

Il est à noter que nous avons équivalence entre la propriété d'indépendance et un coefficient de corrélation r nul pour des variables aléatoires gaussiennes.

f) Loi de Poisson

Les variables aléatoires discrètes qui suivent une loi de Poisson se retrouvent dans diverses applications (comptage de particules émises par une source radioactive, etc.). Étant donné la moyenne m, la fonction de distribution s'écrit :

$$p\,(x = k) = \frac{m^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-m}$$

Cette variable aléatoire x de valeur moyenne m a les caractéristiques suivantes :

$$E_{sp}[x^2] = m^2 + m \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{m}$$

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

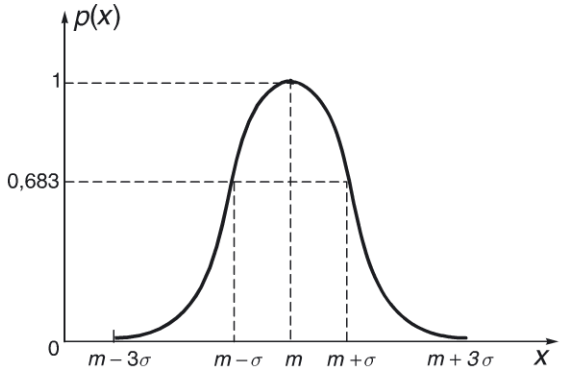

Figure A.5 – Distribution de Gauss pour une variable aléatoire de moyenne *m* et d'écart type σ.

A.3 Transformée de Laplace

A.3.1 Définitions

La transformée de Fourier n'existe que si l'intégrale permettant de la calculer (équation 2.13) a une valeur finie (convergente). Dans le cas contraire on peut rendre cette intégrale convergente en multipliant $s(t)$ par $e^{-\sigma \cdot t}$, la valeur σ réelle positive est appelée « rayon de convergence ». Cela conduit à définir une nouvelle grandeur, appelée « fréquence complexe », $p = \sigma + j2\pi f$. Si de plus on considère un signal causal (nul pour $t < 0$), on obtient la transformée de Laplace $S(p)$ du signal $s(t)$, notée $\boldsymbol{L}$, :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt$$

La transformée de Laplace est très utile dans l'étude des régimes transitoires qui vérifient le principe de causalité. En particulier, elle sera un outil important dans l'étude des filtres basés sur la réponse impulsionnelle (signal causal). D'une manière générale, cette transformée est l'outil de base dans le domaine de l'automatique, c'est-à-dire des systèmes bouclés.

Dans le cas d'un régime harmonique établi, on peut remplacer p par $j2\pi f$ ou $j\omega$ dans la transformée de Laplace.

Copyright © 2017 Dunod.

A.3.2 Propriétés

On retrouve les mêmes propriétés pour la transformation de Laplace que pour la transformation de Fourier. Soit la fonction $x(t)$ et la transformée de Laplace $X(p)$ de ce signal, nous écrirons : $x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(p)$

a) Linéarité

$$a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} a \cdot X(p) + b \cdot Y(p)$$

b) Homothétie

$$x(a \cdot t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} \cdot X(p/a)$$

c) Translation

$$x(t-a) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(p) \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot p} \quad \text{et} \quad x(t) \cdot \mathrm{e}^{b \cdot t} \overset{L}{\longleftrightarrow} X(p-b)$$

d) Dérivation

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \overset{L}{\longleftrightarrow} p \cdot X(p) - x(0)$$

e) Intégration

$$\int_0^t x(t) \cdot \mathrm{d}t \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{p} \cdot X(p) \quad \text{et} \quad \frac{1}{t} \cdot x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \int_p^{+\infty} X(p) \cdot \mathrm{d}p$$

f) Transformée de Laplace et convolution

Ainsi, pour deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ ayant pour transformées de Laplace respectives $X(p)$ et $Y(p)$, nous avons la même propriété que pour la transformée de Fourier :

$$x(t) * y(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(p) \cdot Y(p) \quad \text{et } x(t) \cdot y(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(p) * Y(p)$$

A.3.3 Exemples de transformées de Laplace

Représentation temporelle	*Transformée de Laplace*
• Fonction exponentielle :	
$s(t) = A \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot t}$	$S(p) = \dfrac{A}{p+a}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

Représentation temporelle	*Transformée de Laplace*
• Fonction rampe amortie : $s(t) = A \cdot t \cdot e^{-a \cdot t}$	$S(p) = \dfrac{A}{(p+a)^2}$
• Fonction sinusoïdale : $s(t) = A \cdot \sin(2\pi F_0 t)$	$S(p) = \dfrac{A \cdot (2\pi F_0)}{p^2 + (2\pi F_0)^2}$
• Fonction cosinusoïdale : $s(t) = A \cdot \cos(2\pi F_0 t)$	$S(p) = \dfrac{A \cdot p}{p^2 + (2\pi F_0)^2}$
• Fonction sinusoïdale amortie : $s(t) = A \cdot e^{-at} \cdot \sin(2\pi F_0 t)$	$S(p) = \dfrac{A \cdot (2\pi F_0)}{(p+a)^2 + (2\pi F_0)^2}$
• Fonction cosinusoïdale amortie : $s(t) = A \cdot e^{-at} \cdot \cos(2\pi F_0 t)$	$S(p) = \dfrac{A \cdot (p+a)}{(p+a)^2 + (2\pi F_0)^2}$
• Fonction sinusoïdale quadratique : $s(t) = A \cdot \sin^2(2\pi F_0 t)$	$S(p) = \dfrac{2 \cdot A \cdot (2\pi F_0)^2}{p \cdot \left(p^2 + 4 \cdot (2\pi F_0)^2\right)}$
• Fonction cosinusoïdale quadratique : $s(t) = A \cdot \cos^2(2\pi F_0 t)$	$S(p) = \dfrac{p^2 + 2 \cdot A \cdot (2\pi F_0)^2}{p \cdot \left(p^2 + 4 \cdot (2\pi F_0)^2\right)}$
• Fonction constante : $s(t) = A$	$S(p) = \dfrac{A}{p}$
• Fonction impulsion : $s(t) = A \cdot [u(t-a) - u(t-b)]$ avec $s(t) = A$ pour $t \in [a, b]$	$S(p) = \dfrac{A}{p} \cdot \left[e^{-ap} - e^{-bp}\right]$
• Fonction rampe limitée : $s(t) = s_r(t)$ avec $s_r(t) = At/\theta$ pour $t \in [0, \theta]$ et $s_r(t) = A$ pour $t \in [\theta, +\infty]$	$S_r(p) = A \cdot \dfrac{1 - e^{-p\theta}}{p^2 \cdot \theta}$

Copyright © 2017 Dunod.

BIBLIOGRAPHIE

• *Traitement du signal*

M. BELLANGER, *Traitement numérique du signal*, 6e édition, Dunod (1998).

F. COTTET, *Traitement des signaux et acquisition de données*, 3ème édition, Dunod (2009).

F. DE COULON, *Théorie et traitement des signaux*, Dunod (1984).

C. GASQUET et P. WITOMSKI, *Analyse de Fourier et applications*, Masson (1997).

F. MANNEVILLE et J. ESQUIEU, *Théorie du signal et composants*, 2e édition, Dunod (2000).

J. MAX et J.-L. LACOUME, *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*, 5e édition, Dunod (2000).

• *Mathématiques du signal*

B. PICINBONO, *Théorie des signaux et des systèmes*, Dunod (1989).

H. REINHARD, *Cours de mathématiques du signal*, Dunod (1986).

• *Acquisition de données, capteurs*

G. ASH et coll., *Acquisition de données*, Dunod (1999).

G. ASH et coll., *Les Capteurs en instrumentation industrielle*, Dunod (1991).

• *Autres*

F. COTTET et M. PINARD, *Labview Programmation et applications*, 2e édition, Dunod (2009)

Copyright © 2017 Dunod.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Copyright © 2017 Dunod.

LEXIQUE ANGLAIS-FRANÇAIS

Anglais	Français
Actuator	Actionneur
Aliasing	Recouvrement de spectre
Analog-to-digital converter	Convertisseur analogique/numérique
Band-pass filter	Filtre passe-bande
Banwidth	Bande passante
Convolution	Convolution
Correlation	Corrélation
Crosscorrelation	Intercorrélation
Data acquisition	Acquisition de données
Digital Signal Processor	Processeur de traitement de signaux
Digital-to-analog converter	Convertisseur numérique/analogique
Fast Fourier Transform	Transformée de Fourier rapide
Filter	Filtre
Flat top window	Fenêtre de pondération à ń toit plat ż
Folding frequency	Fréquence de repliement
Fourier transform	Transformée de Fourier
Frequency	Fréquence
Gaussian law	Loi de Gauss
High-pass filter	Filtre passe-haut
Impulse, pulse	Impulsion
Impulse response	Réponse impulsionnelle
Low-pass filter	Filtre passe-bas
Mean	Moyenne
Noise	Bruit
Oversampling	Sur-échantillonnage
Phase lock loop (PLL)	Boucle à verrouillage de phase
Power spectrum	Spectre en puissance

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

Anglais	Français
Ramp signal	Signal de rampe
Real time operating system	Système d'exploitation temps réel
RMS value (RMS : root mean square)	Valeur efficace
Sample and Hold	Echantillonneur/Bloqueur
Sampling	Echantillonnage
Sawtooth signal	Signal en ń dent de scie ż
Sensor	Capteur
Shielded Twisted Pair	Paire torsadée blindée
Shot noise	Bruit de grenaille
Signal	Signal
Signal processing	Traitement du signal
Signal to noise ratio	Rapport signal sur bruit
Smoothing window	Fenêtre de lissage ou de pondération
Standard deviation	Écart type
Statistical distribution	Distribution statistique
Variance	Variance
Voltage controlled oscillator (VCO)	Oscillateur à fréquence commandée
White noise	Bruit blanc
Window	Fenêtre temporelle (traitement du signal)
Windowing	Fenêtrage
Wire	Fil

Copyright © 2017 Dunod.

INDEX

A

acquisition de l'image 245
actionneur 5, 12, 226
actionneurs 214, 218
adaptation 231
algorithme 156, 203
amplification 237
analyse de l'image 257
analyseur de spectres 16
autocorrélation 52
avance de phase 48

B

bande passante 32, 220
    à −3 db 32
    du support 57
bit 217
bruit 3
    blanc 101
    de grenaille 102
    de quantification 134
    définition 100
    externe 100
    gaussien 103
    interne 100
    périodique 103
    rose 101

C

câblage 214, 228
câble 58
calcul
    de la convolution 34
    en « temps réel » 156, 162
capteur 219
capteurs 5, 214, 218
capteurs d'image 246
causal 30, 40
classification des signaux 8
codage binaire codé décimal 218
codage binaire complément à 2 218
codage de l'information 4
codecs 135
compandeurs 135
composante
    continue 13, 155
    du spectre 16
compression du signal 134
conditionnement de signaux 230
conditionnement des signaux 214
conversion analogique-numérique 235
conversion numérique-analogique234
convolution
    calcul de la 34
    définition 34

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.
Copyright © 2017 Dunod.

des signaux périodiques 35
discrète 163
propriétés 35
Cooley-Tukey 156
corrélation
de signaux périodiques 53
discrète 165
coupleurs optoélectroniques 233

D

décimation 211
démodulation
d'enveloppe 69
de fréquence 82
synchrone 69
densité spectrale 51, 53
d'un bruit 101
dérivateur 34
dérivation 26, 279
désaccentuation 77
détection de contours 260
détection
par corrélation 104
synchrone 105
diagramme de Bode 44, 47
diodes 68
disque optique 143
distribution de Dirac 267

E

écart type 93
échantillonnage 269
bloqueur 128
idéal 111, 126, 131
moyenneur 129
naturel 127
régulier 128
échantillonneur/bloqueur 236
échantillonneur 111
bloqueur 11
échelon unité 28, 40
élaboration des signaux 4
élément neutre (pic de Dirac) 35
élimination du bruit 251
émetteur 68
émissions radiophoniques 75, 87
énergie
des signaux 50
finie 24
totale du signal 51
équation aux différences 180
équivalence
de l'intégration 194
de la dérivation 193
erreur de
quantification 132, 133, 235
espérance 92
étection de contour 257
expansion du signal 134

F

Fast Fourier Transform 156
fenêtrage temporel 36, 166
fenêtre
à « toit plat » 170
de Bartlett 170
de Blackman 170
de Blackman exacte 170
de Blackman-Harris 170
de Gauss 172
de Hamming 170
de Hanning 170
de Kaiser-Bessel 171

Copyright © 2017 Dunod.

de Parzen 171
exponentielle 170
naturelle 170
temporelle 37
fibre optique 229
filtrage 251
fréquentiel 39
numérique par convolution 201
temporel 36
filtrage passe-bas 253
filtrage passe-haut 253
filtre
à convolution 208
à réponse impulsionnelle finie 181
à retard de phase 44
analogique 42
anti-repliement 120
de la valeur médiane 210
de restitution 141
non récursif 180
numérique 179, 181
à reponse impulsionnelle finie 201
à reponse impulsionnelle infinie 186
multicadence 211
passe-bas 43
du deuxième ordre 42, 195
du premier ordre 42, 195
passe-haut 43
du deuxième ordre 43
du premier ordre 42
réalisable 41
récursif 180
fonction
à valeurs réelles 7
d'autocorrélation 94
d'autocovariance 94
d'Heaviside 28
d'intercorrélation 95
de corrélation
définition 52
statistique 95
de covariance 95
de transfert 39
porte 27, 117
fonction de corrélation 265
fréquence 14
complexe 278
négative 14, 16
positive 16

G

gain 188
en puissance 32

H

histogramme d'une image 258
homothétie 26, 279

I

identification de processus 107
image 243
impédance 229
impulsion de Dirac 15, 267
indice de modulation 71, 75
intégrateur 34
intégration 279
intercorrélation 52
interpolation 135, 211

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

de Shannon 137
idéale 137
linéaire 138
interprétation des signaux 4

L

largeur
de bande spectrale 57
de bande spectrale du signal 9
spectrale 62
utile du spectre 73
linéarité 17, 25, 279
lissage temporel 184
lobe secondaire 167, 168, 171

M

masse 230
mesure d'un signal 37
méthode de l'invariance
impulsionnelle 189
indicielle 191
modélisation des signaux 6
modification du contraste 259
modulation
à bande latérale unique 66
à deux porteuses en quadrature 67
à porteuse supprimée 65
cohérente 85
combinée 86
d'amplitude 60, 68
de fréquence 71, 72
de phase 71
exponentielle 70
non cohérente 85
moteur électrique 226
moyenne temporelle 93
moyenneur 126
multiplexage 237

N

naturel 126
numérisation de l'image 248
numérisation d'un signal 11

O

onde porteuse 59
ondelette
de Haar 174
de Morlet 174
opérateur « papillon » 158

P

paire torsadée blindée 229
parité 17, 25
pas de quantification 134
peigne de Dirac 114, 268
période d'échantillonnage 111
périodisation 116, 269
phase 44, 188
instantanée 70
pic
central 171
de Dirac 15, 114, 267
principal 167, 168
pixel 246, 248
plan de Bode 44
pôle 43, 47
pré-accentuation 77
précision d'analyse fréquentielle 156

Copyright © 2017 Dunod.

processeurs de traitement de signaux 162
produit de convolution 35
puissance
d'un signal 50, 93
en modulation d'amplitude 63
en modulation en fréquence 76
fréquentielle 51
instantanée d'interaction 51
moyenne 63, 76
moyenne d'interaction 51
temporelle 50

Q

quantum de conversion 234

R

radiodiffusion 63
stéréophonique 87
rapport signal sur bruit 103
réalisation du filtre numérique 182, 204
récepteur 69
reconnaissance de forme 265
reconnaissance des formes 263
registres à décalage 204
régulier 126
relais électromécaniques 232
repliement 119
réponse
impulsionnelle 34, 39, 41, 107
impulsionnelle infinie 181
indicielle 39
représentation
fréquentielle 15
spectrale 155
spectrale bilatérale 16, 20
temporelle 8
résolution 220, 246
restitution 12, 135, 140, 143
par bloqueur 140
rotation de l'image 256

S

sensibilité du capteur 220
série de Fourier 13, 18
signal 3
à temps continus 10
à temps discret 11
aléatoire 8, 91, 92
aléatoire gaussien 94
analogique 10
carré 19, 20
certain 8
cosinusoïdal 19, 20
« dent de scie » 23
déterministe 8
échantillonné 11
ergodique 9, 91, 93
impulsionnel 21
logique 11
numérique 11
périodique 8
rampe 23
sinusoïdal 18, 20
sinusoïdal redressé double alternance, 23
sinusoïdal redressé simple alternance, 23
triangulaire 22
sous-échantillonnage
signaux à bande étroite 122
squelettisation 262

Copyright © 2017 Dunod.
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

stationnaires 9, 34
structure
canonique 204, 205
directe 204
sur-échantillonnage 143, 144
synthèse du filtre numérique 182
système(s)
continu 33
de transmission 31
de transmission linéaires 34
linéaires 33
stationnaire 34

T

taux de modulation 60
temporisation 237
temps de conversion 235
théorème
central limite 277
de l'échantillonnage 116
de Parseval 56
de Plancherel 35
de Shannon 116, 118
fondamental des filtres 39
théorie
de la communication 4
du signal 3
thermocouple 224
thermocouples 222
traitement
de l'information 4
du signal 4
traitement des images 244
transformation
adaptée 192
d'Euler 193
homographique 194
transformation géométrique 255
transformée
de Fourier 24, 27
à fenêtre glissante 172
discrète 151, 153
inverse 24
propriétés 24
rapide 156
de Gabor 173
de Laplace 183, 278
en ondelettes 173
en z 183
translation 18, 26, 279
translation d'images 255
transmission en bande de base 59

V

valeur
efficace 94
moyenne 92
quadratique moyenne 92

Z

zéro 47