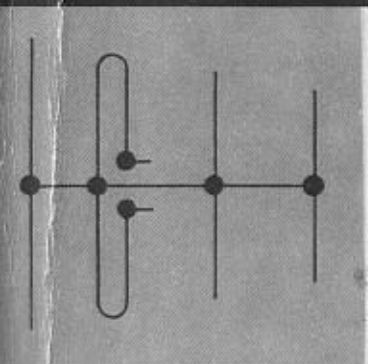
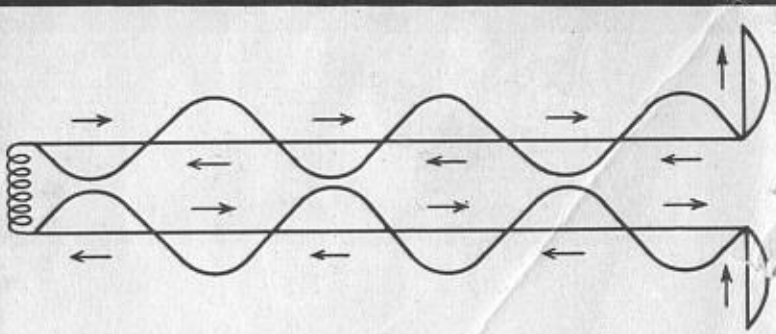
J. QUINET

théorie et pratique des circuits de l'électronique et des amplificateurs





tome 3

propagation du courant H.F. le long des lignes
abaque de Smith - antennes
équations de Maxwell et applications

DU MÊME AUTEUR

COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

TOME I.

Compléments d'algèbre. Les dérivées et leurs applications (3e édition).

TOME II.

Développements en série. Étude des séries. Calcul des imaginaires. Calcul différentiel et applications (3e édition).

TOME III.

Calcul intégral et premières applications (3e édition).

TOME IV.

Suite du calcul intégral et applications (3e édition).

24 exemples d'applications des intégrales à des problèmes pratiques.
La série de Fourier avec exemples détaillés de développements.
Intégration des différentielles totales.
Intégrales doubles ou triples

TOME V.

Équations différentielles et applications (3e édition).

Équations du premier et du second ordre, types divers, avec de nombreux exemples.
51 exemples d'applications pratiques des équations différentielles à des problèmes (mécanique, physique, électricité, thermo-dynamique, résistance des matériaux, radio, etc.).
Équations aux dérivées partielles (applications aux cordes vibrantes et à la propagation du courant électrique le long des lignes).
Introduction à l'étude du potentiel, et à l'étude de la distribution des champs.

TOME VI.

Géométrie analytique plane et applications diverses (3e édition).

Étude des coniques et applications.
Tracé des courbes avec de nombreux exemples détaillés.
Quelques applications physiques des coniques.

THÉORIE ET PRATIQUE DES CIRCUITS DE L'ÉLECTRONIQUE ET DES AMPLIFICATEURS

PAR

J. QUINET
Ingénieur de l'École supérieure d'Électricité
Professeur à l'École Nationale de Radiotechnique de Clichy
Professeur honoraire à l'École centrale de T. S. F.
Ancien Secrétaire général du Radio-Club de France

PRÉFACE DE

C. GUTTON
Membre de l'Institut

TOME III

Propagation du courant H.F. le long des lignes.
Abaque de Smith — Antennes.
Équations de *Maxwell* et applications.

DUNOD
PARIS
1963

© 1963, DUNOD

PRÉFACE

Depuis que la radiotélégraphie et la radiotéléphonie ont abandonné l'usage des oscillations amorties des circuits à étincelles, pour ne plus utiliser que les courants entretenus des valves électroniques, les radioélectriciens ont surtout eu à étudier des régimes périodiques à amplitude constante.

Pour la recherche de ces régimes, les ingénieurs électriciens qui s'occupent des transports d'énergie et des machines à courants alternatifs, se servent de la représentation imaginaire des fonctions harmoniques. Il est donc devenu tout à fait naturel d'en faire usage lors des études de circuits à haute fréquence parcourus par des courants d'amplitude constante.

M. QUINET, au cours de l'ouvrage qu'il présente, expose les éléments de ce genre de calcul, en montre les avantages et l'applique à la plupart des cas qui intéressent spécialement les radioélectriciens. Le lecteur y trouvera donc un exposé simple des calculs qu'il aura à connaître toutes les fois qu'il voudra réaliser un appareil radio-électrique.

Le calcul est toujours suivi d'indications sur l'ordre de grandeur des capacités, des inductances ou des résistances des circuits généralement employés. Toute formule est complétée par une application numérique.

Ce livre dispense ainsi de reprendre tous les calculs dès l'origine et fournit aux constructeurs les formules indispensables. Il évite toutefois les erreurs d'interprétation qui pourraient provenir de l'usage d'un formulaire puisqu'il indique toujours comment ces formules ont été établies à partir des lois fondamentales.

Sans renfermer les schémas des innombrables appareils de réception, l'ouvrage contient l'étude de chacune des parties qui les constituent et des organes qui les relient entre elles.

Sa lecture sera pour les techniciens une excellente initiation aux méthodes du calcul imaginaire des circuits à courants alternatifs. Elle évitera aux constructeurs d'inutiles essais empiriques, tout en leur permettant d'adopter immédiatement la meilleure solution des problèmes qu'ils se seront posés.

C. GUTTON,
Membre de l'Académie des Sciences,
Ancien Directeur du Laboratoire national de Radio-électricité,
Ancien Président de la Société des Radio-électriciens.

AVANT-PROPOS
du Tome III

Contrairement à ce qui avait été annoncé dans une édition précédente du Tome II, ce Tome III n'est pas consacré aux transistors et à leurs circuits.

Nous avons pensé *qu'il était inutile de refaire ce qui a été bien fait et très bien fait:* on trouve, en effet, des ouvrages français tout à fait excellents, qui sont consacrés aux transistors, et à leurs circuits, soit livres théoriques, soit livres d'ordre pratique.

Comme d'autre part, nous possédons une documentation considérable et une certaine pratique des lignes et de leurs propriétés, et que ce sujet n'est pratiquement pas étudié en détail dans les livres techniques français, nous avons estimé faire œuvre utile en traitant ce sujet qui a tant d'applications.

— Or, cette étude des lignes, et de leurs très nombreuses propriétés, a ceci d'admirable que, en partant simplement de deux petites équations initiales, on en déduit non seulement un très grand nombre de formules, mais encore une quantité *inimaginable* de résultats et de propriétés!

Et comme ces lignes et ces propriétés sont utilisées actuellement en U. H. F., en Télévision, dans les Radars, dans la réception et l'émission dirigées, dans les fusées et satellites artificiels, ainsi que dans bien d'autres dispositifs d'électronique, on jugera de l'intérêt immense d'une telle étude.

— D'autre part, on verra que l'étude des lignes est *une véritable synthèse des mathématiques, mises au service des applications.*

En effet, on va trouver dans cette étude naturellement de l'algèbre, puis de la trigonométrie classique, des imaginaires, de la trigonométrie hyperbolique, des équations différentielles simples du premier et du deuxième ordre, de l'électricité, de la Radio, et enfin de l'électronique!

— Mais que le lecteur ne s'effraie pas!

— Nous commençons par l'étude de la ligne sans pertes parce que cette étude est simple et n'exige pas l'emploi de la trigonométrie hyperbolique. Nous étudions ensuite l'abaque de Smith, avec un grand nombre d'applications, puis nous continuons par l'étude de la ligne avec pertes, nécessitant l'emploi de la trigonométrie hyperbolique.

Nous continuons par l'application des ondes stationnaires aux antennes, à l'émission et à la réception dirigées.

— Les esprits chagrins (!) vont dire naturellement que nous aurions dû commencer par l'étude générale et détaillée de la ligne avec pertes par les lignes trigonométrique hyperboliques, puis d'en déduire, après coup, les propriétés de la ligne sans pertes.

C'est bien là l'application d'un procédé malheureusement courant, antipédagogique et qui... déplaît et rebute le lecteur !

En effet, ce livre étant un livre d'enseignement et... de renseignements, et non pas un traité sur les lignes, nous avons appliqué ce vieux et admirable principe de pédagogie (mais que beaucoup ignorent !) que « pour enseigner il faut aller du simple au composé ».

Or, l'étude des lignes avec pertes exigeant l'emploi de la trigonométrie hyperbolique, nous aurions... dégoûté le lecteur dès le début, du moins bon nombre de lecteurs, et nous n'aurions pas appliqué le principe ci-dessus, ce qui eût été *une grave erreur* pour un livre destiné à des Ingénieurs, techniciens, agents techniques, étudiants et surtout les élèves des écoles techniques qui cherchent à apprendre, à comprendre et à appliquer...

C'est pourquoi nous avons commencé par l'étude de la ligne sans pertes, n'exigeant que la trigonométrie ordinaire, du programme du baccalauréat.

— Nous terminons ce Tome III par les équations de MAXWELL, *clairement exposées et expliquées*, avec certaines de leurs applications.

En effet, bien que datant de près de 100 ans, ces célèbres équations ont un renouveau d'actualité, avec une foule d'applications, dans les guides d'onde, dans le passage d'un courant HF dans les conducteurs, dans le rayonnement et la propagation, etc. Or, il est véritablement scandaleux d'écrire les six équations de MAXWELL en deux très petites équations condensées incompréhensibles (sauf à quelques initiés) ; cette sténographie mathématique ne parle pas à l'esprit, c'est du... « *brouillard condensé* » ne convenant pas à notre catégorie de lecteurs qui veulent « DE LA CLARTÉ AVANT TOUTE CHOSE », *ainsi que 32 années dans l'enseignement nous l'ont confirmé.*

— Le chapitre V sur l'abaque de SMITH est la reproduction presque complète de l'article que avons publié dans le Tome I « Electronique » des « TECHNIQUES DE L'INGÉNIEUR » bien connues.

Nous remercions vivement son Directeur Monsieur Postel, Ingénieur E. C. P., d'avoir bien voulu nous autoriser à le reproduire.

— Nous remercions chaleureusement Monsieur Paul Dieudé, Ingénieur, et Monsieur Quinqueton, Directeur-adjoint de l'Institut Technique Professionnel qui ont bien voulu relire et corriger les épreuves, ainsi que la Librairie Dunod pour la parfaite présentation de cet ouvrage.

J. Q.

Nota. — Dans cet ouvrage, nous avons adopté la notation américaine pour la numérotation des paragraphes, des figures et des formules.

En vue de simplifier la composition typographique du livre et pour utiliser les nouvelles possibilités offertes par les machines actuelles de composition typographique, la notation e^{jx} (difficile à composer, surtout si l'exposant est encombrant) ne sera pas utilisée ; elle sera remplacée par exp (jx), facile à composer et à lire.

En résumé, le lecteur voudra bien noter les équivalences suivantes :

$$e^{jx} \equiv \exp(jx)$$

$$e^{(a+jb)x} \equiv \exp[(a+jb)x]$$

$$e^{j\beta x} \cdot (1+\rho) \equiv [\exp(j\beta x)](1+\rho)$$

$$e^{j\beta l} \equiv \exp(j\beta l) \equiv 1/\underline{\beta l}.$$

Un diagramme de SMITH en grand format est placé à la fin de ce volume.

TABLE DES MATIÈRES

du Tome III

Généralités sur les lignes XVII

CHAPITRE PREMIER

La ligne sans pertes

1-1. Établissement des deux équations fondamentales 1
1-2. Résolution des deux équations fondamentales 2
1-3. Cas théorique d'une ligne de longueur infinie 4
1-4. Ondes progressives 5

Ligne de longueur finie

1-5. Impédance d'entrée d'une ligne terminée sur une impédance quelconque Z_r 5
1-6. Cas particuliers importants. Premier cas : $Z_r = Z_c$ 6
1-7. Deuxième cas : la ligne quart d'onde 7
1-8. Cas limites 9
1-9. Remarque sur la ligne quart d'onde 9
1-10. Troisième cas : ligne en $\lambda/2$ et en $\lambda/8$ 10
1-11. Une application intéressante d'une ligne terminée sur Z_c : la ligne à retard 11

CHAPITRE II

Les constantes d'une ligne

2-1. Cas de deux fils parallèles. Calcul de l'inductance L 13
2-2. Calcul de la capacité C 14
2-3. Calcul de l'impédance caractéristique Z_c 15
2-4. Résistance ohmique 16
2-5. Cas d'un câble coaxial 17

CHAPITRE III

Ligne en court-circuit et ligne ouverte

I. — Ligne en court-circuit

3-1. Calcul de l'impédance d'entrée. Répartition du courant et de la tension 19
3-2. Variation de l'impédance d'entrée d'une ligne en court-circuit 20
3-3. Valeurs instantanées de V et de I 22
3-4. Vérification expérimentale 23

3-5. Ligne terminée sur une réactance quelconque 24
3-6. Diagramme des ondes stationnaires d'après la nature de la réactance 26

II. — Ligne ouverte et adaptation

3-7. Calcul de l'impédance d'entrée. Répartition du courant et de la tension 27
3-8. Valeurs instantanées du courant et de la tension 29
3-9. Tension à l'extrémité d'une ligne ouverte en quart d'onde 30
3-10. Effet de la charge sur la longueur effective d'une ligne. Ligne en court-circuit et ligne ouverte 32
3-11. Influence d'une variation de fréquence sur l'état électrique d'une ligne 32
3-12. Adaptation d'une source à un récepteur au moyen d'une ligne 33
3-13. Exemples numériques sur des lignes 35
3-14. Oscillateurs à lampes utilisant une ligne 38
3-15. Stubs 38
3-16. Une application intéressante des doubles stubs. Circuit du Radar .. 40

CHAPITRE IV

Taux d'ondes stationnaires et coefficient de réflexion (ligne sans pertes)

4-1. Le taux d'ondes stationnaires (ou T. O. S.) 42
4-2. Valeur du T. O. S. dans différents cas 42
4-3. Nature physique d'une ligne terminée sur une résistance 45
4-4. Valeur de Z_e dans le cas d'une ligne terminée sur une impédance complexe 46
4-5. Mesure de S 46
4-6. Le coefficient de réflexion 46
4-7. Relation entre le T. O. S. et le coefficient de réflexion ρ 49
4-8. Coefficient de réflexion dans le cas d'une ligne terminée sur une résistance R_r 49
4-9. Cas d'une ligne terminée sur une impédance complexe $Z_r = R_r + jX_r$ 50
4-10. Calcul de la tension V, du courant I et de l'impédance d'entrée Z_e d'une ligne en fonction du coefficient de réflexion ρ 52
4-11. Amplitudes des ventres et des nœuds de potentiel et de courant 53
4-12. Calcul de la puissance 54
4-13. Exemples numériques 55
4-14. Étude graphique des variations du potentiel et du courant le long de la ligne par le diagramme en manivelle 58
4-15. Remarques sur le diagramme en manivelle 59
4-16. Autre expression de l'impédance en un point quelconque et impédance de transfert 60
4-17. Emploi des lignes avec ou sans ondes stationnaires 61

CHAPITRE V

L'abaque de Smith
Construction — Propriétés — Emploi

5-1. Principe de l'abaque 63
5-2. Construction de l'abaque 64

Emploi et applications de l'abaque de SMITH

5-3. Problèmes que l'on peut résoudre par l'abaque de SMITH 70
5-4. Généralités sur l'emploi de l'abaque 71
5-5. Problème fondamental 71
5-6. Applications numériques. Problème I 72
5-7. Problème II 74
5-8. Problème III 76
5-9. Problème IV 76
5-10. Problème V 76
5-11. Problème VI 78
5-12. Remarques sur la réactance d'une ligne 79
5-13. Adaptation par un stub 81
5-14. Problème VII 81
5-15. Adaptation par une ligne quart d'onde 82
5-16. Problème VIII 83
5-17. Problème IX : Exemple d'adaptation utilisant l'abaque de SMITH .. 84

CHAPITRE VI

La ligne avec pertes

6-1. Nature des pertes 87
6-2. Mise en équation du courant et de la tension 87
6-3. Résolution des deux équations 88
6-4. Cas d'une ligne à faibles pertes 91
6-5. Valeur de la constante de propagation K dans le cas d'une ligne en haute fréquence 92
6-6. Cas d'une ligne à forte inductance 93
6-7. Cas d'une ligne théoriquement infinie 94
6-8. Ligne sans distorsion 95
6-9. Quelques données numériques 96
6-10. Exemples numériques 98

CHAPITRE VII

Cas général d'une ligne de longueur finie
Lignes ouverte et en court-circuit

7-1. Équations générales de la propagation 100
7-2. Remarque sur la symétrie des équations de la ligne sans pertes et de la ligne avec pertes 101
7-3. Calcul de l'impédance d'entrée d'une ligne quelconque 102
7-4. Exemples numériques 103
7-5. Impédance d'entrée d'une ligne ouverte et d'une ligne en court-circuit 106
7-6. Ligne ouverte 106
7-7. Ligne en court-circuit 108
7-8. Courant à l'extrémité d'une ligne terminée sur un récepteur d'impédance Z_r 108

7-9. Ligne artificielle 109
7-10. Simplification 113
7-11. Mise en pratique de la ligne artificielle 114

Chapitre VIII

Coefficient de réflexion et taux d'ondes stationnaires (ligne avec pertes)

8-1. Le coefficient de réflexion ρ 116
8-2. Conséquences 117
8-3. Calcul de l'onde directe et de l'onde réfléchie et exemple numérique 118
8-4. Impédance d'entrée en fonction du coefficient de réflexion 120
8-5. Exemple numérique sur une ligne avec pertes 121
8-6. Calcul direct de l'impédance de transfert 122
8-7. Le taux d'ondes stationnaires S (ou T. O. S.) 123
Relation entre S et ρ 123
8-8. Mesure de α par le T. O. S. 124
8-9. Explorateur de mesure 124
8-10. Résumé 125
8-11. *Cas important :* ligne ouverte sans pertes 125

Chapitre IX

Surtension dans les lignes
Bande passante et coefficient de surtension

9-1. Bande passante d'un circuit oscillant. Circuit série et circuit parallèle 128
9-2. Généralisation. Coefficient de surtension d'une ligne 130
9-3. Impédance d'une ligne en court-circuit à la résonance 132
9-4. Calcul de la surtension à l'extrémité d'une ligne ouverte 134
9-5. Autre façon de calculer la surtension en bout de ligne 134
9-6. Généralisation du coefficient de surtension 136
9-7. Quelques considérations pratiques 138

Chapitre X

Application aux antennes de la théorie des lignes

10-1. Circuit oscillant ouvert 139
10-2. La longueur d'onde 141
10-3. Modes de vibration d'une antenne. Premier cas : fil isolé de longueur l 142
10-4. Deuxième cas : fil de longueur l relié au sol 146
10-5. Capacité et inductance d'une antenne 147
10-6. Antennes complexes 148

Le rayonnement

10-7. Champs créés à distance par un dipôle ou doublet 149
10-8. Hauteur effective d'une antenne 151

10-9. Calcul de la hauteur effective.
Premier cas : antenne verticale en $\lambda/4$.
Deuxième cas : antenne en $\lambda/2$ 152
10-10. Antenne de forme quelconque 153
10-11. Calcul plus détaillé du champ produit à grande distance. Formule pratique 154

Chapitre XI

Application des ondes stationnaires aux antennes pour ondes courtes et en U. H. F.
Émission et réception dirigées

11-1. Principes de base 156
11-2. Adaptation des feeders à l'antenne 158
11-3. Calcul d'une adaptation 161
11-4. Dipôle replié ou « folded dipôle » 162
11-5. Application des ondes stationnaires à l'émission et à la réception dirigées 163
11-6. Rayonnement de deux antennes verticales 163
11-7. Théorie mathématique du rayonnement de deux antennes verticales 164

Rideaux d'antenne et alignements

11-8. Étude mathématique du rayonnement d'antennes multiples 167
11-9. Application à un rideau réflecteur 172
11-10. Réalisation pratique des rideaux d'antennes 173
11-11. Perfectionnement important 175
11-12. Inconvénients et avantages des antennes en grecque 176
11-13. Réseau directeur d'ondes 177
11-14. Alignement de plusieurs dipôles 178
11-15. Antennes avec directeurs et réflecteurs; antennes *Yagi* 180
11-16. Autres types d'antennes 185

Chapitre XII

Les équations de Maxwell
Quelques applications

12-1. Généralités 188
12-2. Rappel et généralisation de quelques lois de l'électricité. Loi d'Ohm 189
12-3. Loi de Joule dans un conducteur à trois dimensions 190
12-4. Loi des F. E. M. d'induction ou loi de Maxwell-Faraday 190
12-5. Traduction analytique en coordonnées cartésiennes. Premier groupe des équations de Maxwell 192
12-6. Expérience de Rowland 194
12-7. Loi des ampère-tours ou loi d'Ampère 195
12-8. Généralisation 196

12-9. Traduction analytique en coordonnées cartésiennes. Deuxième groupe des équations de MAXWELL 197
12-10. Cas particulier important 198
12-11. Courants de déplacement 199
12-12. Équations complémentaires 202
12-13. Application de l'équation $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha t)$ 203
12-14. La Laplacienne 204
12-15. Application à la lampe diode 205
12-16. Conditions aux limites pour les équations de MAXWELL 206
12-17. Propagation dans un milieu isolant 207

CHAPITRE XIII

Quelques applications des équations de Maxwell
Pénétration des courants à l'intérieur des corps

13-1. Premier cas : cas d'un corps infiniment conducteur 211
13-2. Deuxième cas : cas des conducteurs métalliques en HF placés dans un isolant 212
13-3. Troisième cas : courants de capacité et de conduction 213
13-4. Équations réduites 214
13-5. Exemples 215
13-6. Calcul de la pénétration du courant dans un conducteur 216
13-7. Valeurs numériques 217
13-8. Calcul de la résistance en H. F. 218
13-9. Cas d'un fil conducteur rectiligne 219
13-10. Théorème de POYNTING 220

GÉNÉRALITÉS SUR LES LIGNES

Considérons un long fil métallique parallèle au sol, ou bien deux longs fils parallèles, suffisamment longs pour que l'on puisse considérer les constantes électriques de cette ligne comme uniformément réparties.

Il y a quatre constantes à considérer, *par kilomètre de longueur* :

1° la résistance ohmique R,

2° la capacité (entre un fil et le sol, ou bien entre les deux fils), soit C,

3° l'inductance, soit L,

4° la résistance d'isolement. En effet, il y a des fuites dans les isolateurs, ou bien il y a des fuites entre les deux fils si ceux-ci sont isolés et en contact. Si nous appelons R' la résistance de fuites par km de longueur, la conductance sera $G = 1/R'$.

Il s'agit d'étudier la répartition du courant, et de la tension sur une telle ligne, ainsi qu'à l'extrémité de la ligne, suivant qu'il y a un récepteur ou suivant qu'il n'y en a pas. Il s'agit d'étudier aussi les nombreuses propriétés d'une telle ligne.

Cette étude sera, au début, divisée en deux parties :

1° *Lignes sans pertes*, sans résistance ni fuites ($R = 0$, $R' = \infty$).

2° *Lignes avec pertes.*

Dans la première partie, qui est *la plus simple*, les calculs se font par les lignes trigonométriques circulaires usuelles : ils donnent, dès le début, de nombreux résultats nets et importants ; tandis que dans la deuxième partie ce sont les lignes trigonométriques hyperboliques qui interviennent :

Le lecteur ne doit surtout pas s'effrayer à ce sujet !

Les lignes trigonométriques hyperboliques, qui semblent avoir un aspect rébarbatif, sont *aussi faciles à manier et à utiliser que les autres* ; il s'agit de savoir d'où elles viennent, que sont-elles et quelles sont leurs formules fondamentales (qui ressemblent étrangement aux formules de la Trigonométrie classique).

— Pour les lecteurs qui ne les connaissent pas, ils en trouveront l'étude détaillée, *clairement expliquée*, avec des exemples numériques, dans le Tome III de notre *Cours élémentaire de Mathématiques supérieures* (Éditeur Dunod), ainsi que dans le Tome V consacré aux équations différentielles.

C'est une question de patience, et de pratique !

Mais le lecteur qui serait rebelle à cette initiation ou bien qui ne voudrait

pas se lancer dans une telle étude, *peut se contenter* de l'étude détaillée que nous faisons de la ligne sans pertes, ainsi que de l'usage de l'abaque de SMITH, puisque, en Radio et en Électronique, dans les Radars et en U. H. F. on a presque toujours des lignes sans pertes à étudier et à utiliser ; or cette étude est très simple.

— Nous répétons ce que nous disions dans la préface : en partant uniquement des deux équations initiales de la propagation, on en déduit un très grand nombre de formules et une foule immense de conséquences ; et c'est justement ce qui est admirable dans une telle étude.

— Naturellement, nous commencerons par l'étude la plus simple, c'est-à-dire celle de la ligne sans pertes.

CHAPITRE PREMIER

LA LIGNE SANS PERTES

1-1. Établissement des deux équations fondamentales. — Plaçons-nous à la distance x de la source, en P, où le courant est I et où la tension est V (par rapport à l'autre fil). Appelons L l'inductance et C la capacité, par unité de longueur (pratiquement le km), et supposons $R = 0$ et $R' = \infty$.

Donnons à x un accroissement dx très petit, I et V varient (en plus ou en moins) et deviennent, en P' et au même instant, $I + dI$ et $V + dV$. (fig. 1-1).

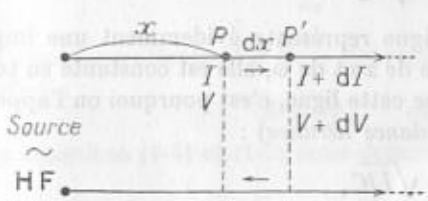


FIG. 1-1.

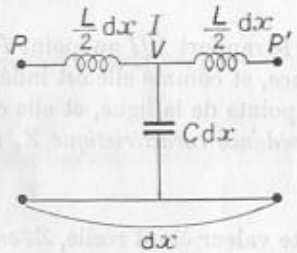


FIG. 1-2.

L'élément de longueur dx aura une inductance $L \cdot dx$ et une capacité $C \cdot dx$ (fig. 1-2). Appliquons la loi d'OHM (en imaginaires) à l'élément dx en respectant le sens de la flèche :

$$V - (V + dV) = j(L \cdot dx)\omega I$$

ou

$$\boxed{-\frac{dV}{dx} = jL\omega I} \quad . \tag{1-1}$$

D'autre part, il passe dans la capacité $C \cdot dx$ un courant qui est égal à la différence entre le courant I à l'entrée et le courant $I + dI$ à la sortie ; et comme l'inpédance de capacité est $-j/C \cdot dx\omega$, on peut écrire :

$$I - (I + dI) = \frac{V}{-j/C \cdot dx\omega} = \frac{VC \cdot dx\omega}{-j}$$

$$\boxed{-\frac{dI}{dx} = jCV\omega} \quad . \tag{1-2}$$

Les équations (1-1) et (1-2) donnent un système de deux équations différentielles à deux inconnues V et I.

pas se lancer dans une telle étude, *peut se contenter* de l'étude détaillée que nous faisons de la ligne sans pertes, ainsi que de l'usage de l'abaque de SMITH, puisque, en Radio et en Électronique, dans les Radars et en U. H. F. on a presque toujours des lignes sans pertes à étudier et à utiliser ; or cette étude est très simple.

— Nous répétons ce que nous disions dans la préface : en partant uniquement des deux équations initiales de la propagation, on en déduit un très grand nombre de formules et une foule immense de conséquences ; et c'est justement ce qui est admirable dans une telle étude.

— Naturellement, nous commencerons par l'étude la plus simple, c'est-à-dire celle de la ligne sans pertes.

CHAPITRE PREMIER

LA LIGNE SANS PERTES

1-1. Établissement des deux équations fondamentales. — Plaçons-nous à la distance x de la source, en P, où le courant est I et où la tension est V (par rapport à l'autre fil). Appelons L l'inductance et C la capacité, par unité de longueur (pratiquement le km), et supposons $R = 0$ et $R' = \infty$.

Donnons à x un accroissement dx très petit, I et V varient (en plus ou en moins) et deviennent, en P' et au même instant, $I + dI$ et $V + dV$. (fig. 1-1).

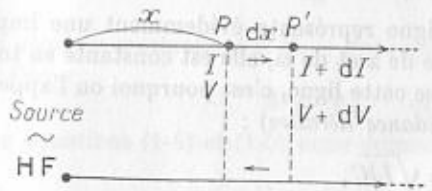


FIG. 1-1.

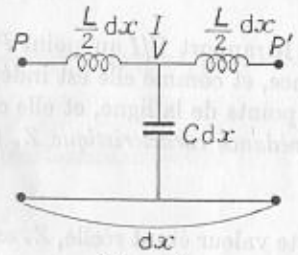


FIG. 1-2.

L'élément de longueur dx aura une inductance $L \cdot dx$ et une capacité $C \cdot dx$ (fig. 1-2). Appliquons la loi d'OHM (en imaginaires) à l'élément dx en respectant le sens de la flèche :

$$V - (V + dV) = j(L \cdot dx)\omega I$$

ou

$$\boxed{-\frac{dV}{dx} = jL\omega I} \quad . \tag{1-1}$$

D'autre part, il passe dans la capacité $C \cdot dx$ un courant qui est égal à la différence entre le courant I à l'entrée et le courant $I + dI$ à la sortie ; et comme l'inpédance de capacité est $-j/C \cdot dx\omega$, on peut écrire :

$$I - (I + dI) = \frac{V}{-j/C \cdot dx\omega} = \frac{VC \cdot dx\omega}{-j}$$

$$\boxed{-\frac{dI}{dx} = jCV\omega} \quad . \tag{1-2}$$

Les équations (1-1) et (1-2) donnent un système de deux équations différentielles à deux inconnues V et I.

— Avant de résoudre ce système, divisons l'équation (1-1) par l'équation (1-2) :

$$\frac{dV}{dI} = \frac{L}{C}\cdot\frac{I}{V},$$

ou, en séparant les variables

$$V \cdot dV = \frac{L}{C}\cdot I \cdot dI.$$

Intégrons (de 0 à V pour la tension et de 0 à I pour le courant) :

$$V^2 = \frac{L}{C}I^2,$$

et

$$\frac{V}{I} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Or, le rapport V/I au point P de la ligne représente évidemment une impédance, et comme elle est indépendante de x et de ω, elle est constante en tous les points de la ligne, et elle caractérise cette ligne, c'est pourquoi on l'appelle *impédance caractéristique* Z_c (ou *impédance itérative*) :

$$Z_c = \sqrt{L/C},$$

cette valeur étant réelle, Z_c est une résistance pure. On pourrait voir d'ailleurs, par les équations de dimensions, que $\sqrt{L/C}$ est homogène à une résistance.

— Pour calculer V et I, dérivons les équations (1-1) et (1-2) :

$$-\frac{d^2V}{dx^2} = jL\omega\frac{dI}{dx} = jL\omega(-jCV\omega),$$

$$-\frac{d^2I}{dx^2} = jC\omega\frac{dV}{dx} = jC\omega(-jL\omega I),$$

ou

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d^2V}{dx^2} + LC\omega^2V = 0\\ &\text{et}\\ &\frac{d^2I}{dx^2} + LC\omega^2I = 0.\end{aligned}} \qquad (1\text{-}3)$$

La mise en équation étant terminée, passons à la résolution.

1-2. **Résolution des deux équations différentielles.** — Chacune de ces équations, l'une en V, l'autre en I, est une équation différentielle du second ordre, incomplète, à coefficients constants L, C et ω, et sans second membre.

L'équation caractéristique de chacune d'elles est :

$$a^2 + LC\omega^2 = 0,$$

d'où

$$a = \pm j\omega\sqrt{LC} = \pm j\beta.$$

La solution pour V est donc (voir Tome V de notre *Cours élémentaire de Mathématiques supérieures*, (Éditeur Dunod) :

$$V = A\sin\beta x + B\cos\beta x \qquad (1\text{-}4)$$

où A et B sont des constantes, que nous allons calculer. L'équation (1-1) devient :

$$I = -\frac{dV/dx}{jL\omega} = \frac{A\beta\cos\beta x - B\beta\sin\beta x}{-jL\omega},$$

et, comme $\beta = \omega\sqrt{LC}$, et que $\sqrt{L/C} = Z_c$, il reste :

$$I = \frac{j}{Z_c}(A\cos\beta x - B\sin\beta x). \qquad (1\text{-}5)$$

Calcul des constantes A et B. — Pour cela plaçons-nous à l'origine, pour $x = 0$, où l'on a :

$$V = V_0 \quad \text{et} \quad I = I_0.$$

Les équations (1-4) et (1-5) nous donnent alors (en faisant $x = 0$) :

$$V_0 = B \quad \text{et} \quad I_0 = j\frac{A}{Z_c},$$

d'où

$$A = -jI_0Z_c.$$

A et B étant connues, les équations (1-4) et (1-5) deviennent :

$$V = -jI_0Z_c\sin\beta x + V_0\cos\beta x$$

$$I = \frac{j}{Z_c}(-jZ_cI_0\cos\beta x - V_0\sin\beta x),$$

ou enfin

$$\boxed{\begin{aligned}V &= V_0\cos\beta x - jZ_cI_0\sin\beta x\\ I &= I_0\cos\beta x - j\frac{V_0}{Z_c}\sin\beta x\end{aligned}} \qquad (1\text{-}6)$$

qui constituent *les équations générales de la propagation.*

Il est souvent plus commode d'exprimer V et I, en un point quelconque de la ligne, en fonction des données du récepteur V_r et I_r en comptant les distances, non pas depuis la source, mais depuis le récepteur : il suffit de changer x en $-x$, ce qui donne :

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{V} &= \overline{V}_r\cos\beta x + jZ_c\overline{I}_r\sin\beta x\\ \overline{I} &= \overline{I}_r\cos\beta x + j\frac{\overline{V}_r}{Z_c}\sin\beta x.\end{aligned}} \qquad (1\text{-}7)$$

V et I varient donc sinusoïdalement le long de la ligne. On voit que si βx augmente de 2π, V et I ne changent pas : cette distance constante est appelée *la longueur d'onde* λ :

$$\beta\lambda = 2\pi$$
$$\lambda = 2\pi/\beta \qquad (1\text{-}8)$$

où β est exprimé en radians par unité de longueur, c'est-à-dire en radians par km.

La vitesse de propagation γ est donnée par $\lambda = \gamma/F$, d'où :

$$\gamma = \frac{2\pi F}{\beta} = \frac{\omega}{\beta}\ (\text{km/s}) \qquad (1\text{-}9)$$

ou encore

$$\gamma = \frac{2\pi F}{\omega\sqrt{LC}}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{LC}}}. \qquad (1\text{-}10)$$

Nous verrons plus loin comment on trouve la valeur suivante : $\gamma = 299\,789$ km/s (dans un fil placé dans l'air). Cette valeur est égale à la vitesse de la lumière.

1-3. **Cas théorique d'une ligne de longueur infinie.** — La solution des équations 1-3 peut aussi s'écrire :

$$V = A \exp(j\beta x) + B \exp(-j\beta x)$$

et

$$I = A_1 \exp(j\beta x) + B_1 \exp(-j\beta x).$$

Or, pour $x = \infty$, $V = 0$ et $I = 0$, d'où :

$$A_1 = 0 \quad \text{et} \quad A = 0;$$

il reste

$$V = B \exp(-j\beta x)$$
$$I = B_1 \exp(-j\beta x)$$

et comme, pour $x = 0$, on a $I = I_0$ et $V = V_0$, on obtient :

$$\left|\begin{array}{l} V = V_0 \exp(-j\beta x) \\ I = I_0 \exp(-j\beta x), \end{array}\right. \qquad (1\text{-}11)$$

d'où

$$\boxed{\frac{V_0}{I_0} = \frac{V}{I} = Z = \sqrt{\frac{L}{C}}}. \qquad (1\text{-}12)$$

V_0/I_0 représentant l'impédance à l'entrée de la ligne, cette équation montre que la source débite sur Z_c, cette impédance $Z = V/I$ est bien constante en tous les points de la ligne. C'est bien *l'impédance caractéristique.*

En partant de V et I imaginaires on en déduit aussitôt les valeurs instantanées, d'après les deux équations (1-11) où $-j\beta x$ exprime un décalage arrière :

$$v = V_0 \sin(\omega t - \beta x)$$
$$i = I_0 \sin(\omega t - \beta x), \qquad (1\text{-}13)$$

v et i sont donc en phase, dans le temps, mais ont un déphasage βx variable avec la distance x : *on a des ondes progressives.*

1-4. **Ondes progressives.** — On peut donner une représentation physique simple d'ondes progressives en projetant, sur un plan parallèle à son axe, une

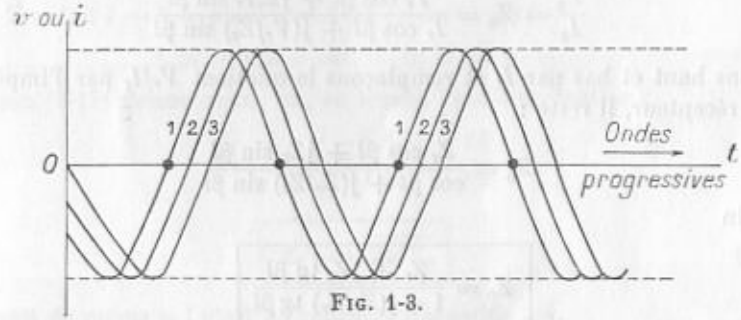


FIG. 1-3.

hélice tournant d'un mouvement uniforme autour de son axe. La sinusoïde obtenue par projection a un mouvement apparent de translation (fig. 1-3).

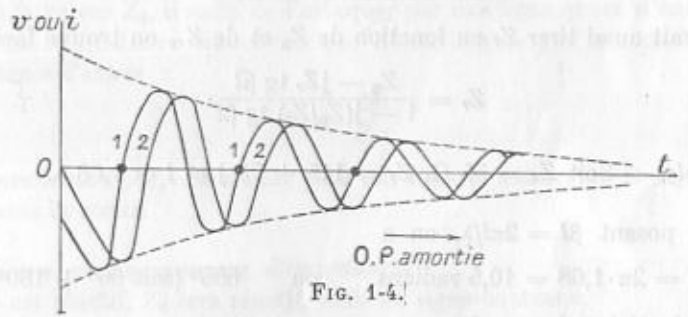


FIG. 1-4.

Si l'on considère une hélice à pas constant enroulée sur une surface de révolution à génératrice exponentielle, on aura, par projection, une représentation physique d'une onde progressive amortie (fig. 1-4).

LIGNE DE LONGUEUR FINIE

1-5. **Impédance d'entrée d'une ligne terminée sur une impédance quelconque** $\overline{Z}_r$. — Nous allons obtenir une formule très intéressante et dont les conséquences sont innombrables, ainsi qu'on le verra par la suite.

Appelons l *la longueur de la ligne* (la longueur totale des deux fils de ligne sera donc $2l$).

Dans les deux équations (1-7) (où les distances x sont comptées *à partir du récepteur*) faisons $x = l$, c'est-à-dire plaçons-nous à la source :

$$V_0 = V_r \cos \beta l + jZ_c I_r \sin \beta l$$
$$I_0 = I_r \cos \beta l + j \frac{V_r}{Z_c} \sin \beta l, \qquad (1\text{-}14)$$

d'où l'on tire l'impédance d'entrée de la ligne, vue de la source :

$$\frac{V_0}{I_0} = Z_0 = \frac{V_r \cos \beta l + jZ_c I_r \sin \beta l}{I_r \cos \beta l + j(V_r/Z_c) \sin \beta l}.$$

Divisons haut et bas par I_r et remplaçons le quotient V_r/I_r par l'impédance Z_r du récepteur, il reste :

$$Z_0 = \frac{Z_r \cos \beta l + jZ_c \sin \beta l}{\cos \beta l + j(Z_r/Z_c) \sin \beta l}$$

ou enfin

$$\boxed{Z_0 = \frac{Z_r + jZ_c \operatorname{tg} \beta l}{1 + j(Z_r/Z_c) \operatorname{tg} \beta l}} \qquad (1\text{-}15)$$

ou

$$\boxed{Z_0 = Z_c \frac{Z_r + jZ_c \operatorname{tg} \beta l}{Z_c + jZ_r \operatorname{tg} \beta l}}. \qquad (1\text{-}16)$$

On pourrait aussi tirer Z_r en fonction de Z_0 et de Z_c, on trouve facilement :

$$Z_r = \frac{Z_0 - jZ_c \operatorname{tg} \beta l}{1 - j(Z_0/Z_c) \operatorname{tg} \beta l}. \qquad (1\text{-}17)$$

Exemple. — Soit $Z_c = 55\ \Omega$, $Z_r = 115 + 75\ j$ et $l = 1{,}68\ \lambda$.

— En posant $\beta l = 2\pi l/\lambda$, on a

$\beta l = 2\pi \cdot 1{,}68 = 10{,}5$ radians, ou $606°$ (soit $66° + 180°$)

La formule (1-16) donne alors :

$$Z_0 = 55 \frac{(115 + 75\,j) + j\,55 \operatorname{tg} 66°}{55 + j(115 + 75\,j) \operatorname{tg} 66°} = 26 - 36\,j$$
$$= R' - (j/C'\omega),$$

elle est donc capacitive.

1-6. **Cas particuliers importants.**

Premier cas. *L'impédance Z_r du récepteur est égale à l'impédance caractéristique Z_c.*

— L'équation (1-15) donne, en faisant $Z_r = Z_c$:

$$\boxed{Z_0 = Z_c = \sqrt{L/C}}.$$

Ceci veut dire que *la source débite sur Z_c, comme dans le cas d'une ligne de longueur infinie* ; on a des ondes progressives et les équations (1-13) s'appliquent encore.

La ligne est adaptée au récepteur.

1-7. **Deuxième cas.** *Ligne quart d'onde : $l = \lambda/4$.*

— Si l'on fait $l = \lambda/4$, on a $\beta = 2\pi/\lambda = 2\pi/4l$, d'où :

$$\beta l = \pi/2 \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \beta l = \infty.$$

L'équation (1-17) donne ∞/∞, ou, en levant l'indétermination :

$$Z_r = Z_c \left(\frac{-j\,Z_c}{-j\,Z_0} \right) = \frac{Z_c^2}{Z_0}$$

d'où :

$$\boxed{Z_c = \sqrt{Z_r \cdot Z_0}} \qquad (1\text{-}18)$$

Il en serait de même si l était un multiple impair de $\lambda/4$.

Ainsi, Z_c est moyenne géométrique entre Z_r et Z_0, et l'impédance Z_r en bout de ligne est vue, *de la source*, avec la valeur Z_0.

La conséquence importante est donc que, si l'on veut ramener une impédance Z_r à la valeur Z_0, il suffit de l'attaquer par une ligne quart d'onde, sans pertes, dont l'impédance caractéristique Z_c est donnée par la formule (1-18).

L'impédance d'entrée

$$Z_0 = \frac{Z_c^2}{Z_r}$$

est ainsi inversement proportionnelle, pour une ligne et une valeur de Z_c données, à l'impédance de sortie.

— *La ligne est un inverseur d'impédances :*

a) si Z_r est réactif, Z_0 sera réactif, mais de signe contraire.

b) Si Z_r est une résistance, Z_0 sera aussi une résistance ; mais Z_0 croît si Z_r diminue.

Une telle ligne quart d'onde se comporte ainsi comme un transformateur d'adaptation pour relier une ligne quelconque à une charge, si une valeur convenable de Z_c ne peut être réalisée. Elle joue le rôle d'un inverseur d'impédance : elle transforme une faible impédance en forte impédance, et inversement.

— Une autre application de la ligne quart d'onde est qu'elle peut servir à coupler une ligne à une charge ohmique, comme par exemple une antenne.

Ce tronçon en $\lambda/4$ sera déterminé pour que son impédance caractéristique Z'_c soit telle que la résistance d'antenne R_a soit transformée en une valeur égale à l'impédance caractéristique Z_c de la ligne, qui, étant terminée sur Z_c, ne donnera aucune réflexion ; on devra avoir :

$$Z'_c = \sqrt{R_a \cdot Z_c},$$

la puissance HF dans l'antenne sera alors maximum.

Si la distance de la ligne à l'antenne est beaucoup plus grande que $\lambda/4$, on prendra $3\lambda/4$ ou un nombre impair de $\lambda/4$.

Si la charge, au lieu d'être ohmique comme dans le cas de l'antenne, n'est pas une résistance pure, on connectera la ligne quart d'onde en deux points correspondants à I_{max} ou à V_{min}, c'est-à-dire en un endroit où la ligne aura une impédance ohmique pure égale à Z_c/S ou Z_cS, où S est le taux d'ondes stationnaires (voir Chapitre IV).

Premier exemple. — *Calculer l'impédance caractéristique d'une ligne pour adapter, par une ligne quart d'onde, un dipôle de* 80 Ω *à un câble dont la résistance caractéristique est de* 500 Ω (fig. 1-5).

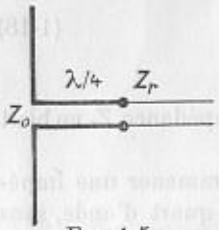


FIG. 1-5.

— On a $Z_0 Z_r = Z_c^2$

où $Z_0 = 80\ \Omega$ et $Z_r = 500$, ce qui donne :

$$Z_c = \sqrt{80 \cdot 500} = 200\,\Omega.$$

Deuxième exemple. — *Calculer la résistance caractéristique d'une ligne qui pourrait alimenter efficacement un dipôle de* 80 Ω, *au moyen d'une ligne quart d'onde dont* $R_c = 200\ \Omega$.

— Partons de

$$Z_c^2 = Z_0 Z_r$$

où $Z_c = R_c = 200$ et $Z_0 = 80\ \Omega$. On en tire :

$$Z_r = \frac{Z_c^2}{Z_0} = \frac{200^2}{80} = 500\ \Omega.$$

La formule, que nous donnons plus loin :

$$Z_c = 276 \lg \frac{D}{r}$$

permettrait de calculer le rapport D/r.

1-8. **Cas limites.** — 1° $Z_r = \infty$, *ligne ouverte*, donc $Z_0 = 0$: on a l'équivalent d'un circuit résonnant *série*, vu de la source.

2° $Z_r = 0$, *ligne en court-circuit*, donc $Z_0 = \infty$: on a l'équivalent d'*un circuit bouchon*, avec Q élevé, vu de la source.

Il en résulte alors une propriété curieuse qui consiste à réaliser *un isolateur... métallique !* Puisque l'impédance d'entrée d'une ligne quart d'onde, court-circuitée à l'extrémité, est infinie (ligne sans pertes) ce tronçon de ligne pourra servir d'isolant pour supporter un objet quelconque sous tension, ou au besoin une ligne (fig. 1-6 et 1-7).

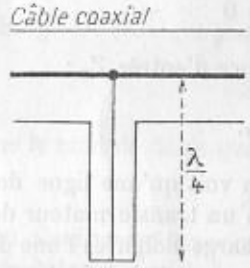


FIG. 1-6.

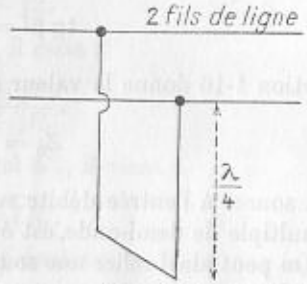


FIG. 1-7.

Il faut remarquer qu'une telle ligne quart d'onde donne $Z_0 = \infty$ sur la fréquence fondamentale, mais sur le premier harmonique, c'est une ligne en demi-onde, vue du côté de la source ; c'est donc un court-circuit vu à l'entrée de ce tronçon de ligne $\lambda/2$, ce qui supprime cet harmonique ainsi que toutes les fréquences paires.

1-9. **Remarque sur la ligne quart d'onde.** — On a vu que pour une ligne quart d'onde, on a $\beta l = \pi/2$, ou encore :

$$l\omega\sqrt{LC} = \pi/2$$

et

$$l^2\omega^2 LC = \pi^2/4.$$

Si maintenant nous appelons :

$L_e = (2/\pi)lL$, l'inductance effective de la ligne,

$C_e = (2/\pi)lC$, la capacité effective de la ligne, on aura :

$$\left(\frac{2}{\pi}lL\right)\cdot\left(\frac{2}{\pi}lC\right)\omega^2 = 1$$

ou

$$\boxed{L_e C_e \omega^2 = 1}$$

comme dans les circuits oscillants fermés, d'où le nom de *ligne résonnante*.

Si la ligne est ouverte à son extrémité, la tension d'entrée étant constante et bien déterminée, et comme $I_r = 0$, il en résulte que, théoriquement, $V_r = \infty$

(limité par les effluves et l'isolement). Nous en ferons d'ailleurs le calcul plus loin, au chapitre IX.

Cette propriété des lignes ouvertes, en quart d'onde, était connue de TESLA en 1890, et utilisée par lui dans ses célèbres expériences, malheureusement bien oubliées actuellement ! Sa ligne était un gros solénoïde de 1 à 2 m de haut, excité par un circuit à étincelle et une grosse bobine de RUMKHORFF.

1-10. **Troisième cas.** — *Ligne demi-onde et en huitième d'onde.* — Si $l = \lambda/2$, ou un multiple exact de $\lambda/2$, on a :

$$\operatorname{tg} \beta l = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = 0$$

et l'équation 1-16 donne la valeur de l'impédance d'entrée Z_0 :

$$Z_0 = Z_c \cdot \frac{Z_r}{Z_c} = Z_r.$$

Ainsi, la source à l'entrée débite sur Z_r, et l'on voit qu'une ligne demi-onde, ou un multiple de demi-onde, est équivalente à un transformateur de rapport $n = 1$. On peut ainsi relier une source et une charge éloignées l'une de l'autre. Une telle ligne en $\lambda/2$ n'a aucune action sur la transmission de V et de I sauf d'inverser leur phase.

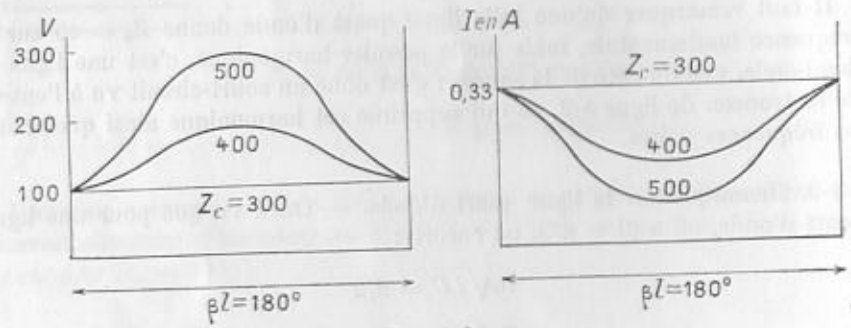


FIG. 1-8.

Les ondes stationnaires existent sauf si $Z_r = Z_c$, et la puissance transmise au récepteur $Z_r = R_r + jX_r$ est :

$$P = \left(\frac{V_0}{Z_r}\right)^2 R_r.$$

Cette propriété d'inversion de la phase est utilisée dans les rideaux d'antennes lorsque différents éléments espacés de $\lambda/2$ doivent être excités en phase par la source.

Exemple — Si $l = \lambda/2$, $Z_c = 300\ \Omega$, 400 et 500 Ω, $R_r = 300\ \Omega$, $V_0 = 100$ V, on aurait les courbes de la figure 1-8.

Remarque. — Pour une ligne en $\lambda/2$ et en court-circuit ($Z_r = 0$) l'équation 1-16 donnerait : $Z_0 = 0$.

Ligne en huitième d'onde. — Si $l = \lambda/8$, on a :

$$\operatorname{tg} \beta l = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8} = 1,$$

et l'équation 1-16 donne :

$$Z_0 = Z_c \frac{Z_r + jZ_c}{Z_c + jZ_r}.$$

Si la charge est ohmique pure, $Z_r = R_r$, il reste :

$$Z_0 = Z_c \frac{R_r + jZ_c}{Z_c + jR_r},$$

et, comme le module de ce quotient est égal à 1, il vient :

$$Z_0 = Z_c = \sqrt{L/C}.$$

On peut ainsi transformer une résistance quelconque R_r en une impédance dont le module est égal à Z_c.

1-11. **Une application intéressante d'une ligne terminée sur Z_c : la ligne à retard.** — Appliquons à l'entrée de la ligne une D. D. P. sinusoïdale :

$$v_0 = V_0 \sin \omega t.$$

Étant donné que l'on a des ondes progressives, l'amplitude de la tension, en un point quelconque d'abscisse x, varie et a pour valeur :

$$v_x = V_0 \sin (\omega t - \beta x).$$

L'onde est ainsi périodique dans le temps et dans l'espace : *elle se déplace avec une vitesse de phase.*

Cette vitesse de phase est la vitesse apparente de déplacement des sommets de la figure 1-3.

Le temps de parcours est le quotient de la longueur l de la ligne par la vitesse de phase :

$$t = \frac{l}{v_p} = \frac{\beta l}{\beta v_p} = \frac{\beta l}{\omega}$$
$$= l\sqrt{LC},$$

il est ainsi proportionnel à l et à $\sqrt{LC}$.

— *La ligne à retard.*

On arrive à réaliser une ligne ayant un temps de parcours très long, on peut ainsi créer des lignes à retard qui sont des lignes artificielles ayant des constantes unitaires très élevées. On les utilise pour provoquer des retards d'impulsion ou comme système de mémoire.

Première application. — Appliquons une impulsion à l'entrée d'une ligne où L et C sont élevés, (par exemple 200 mH et 1 000 pF) ; on aura des décalages dans le temps, et si l'on fixe des embranchements le long de cette ligne (fig. 1-9) on pourra récolter diverses impulsions ; on aura fait un multiplicateur d'impulsions.

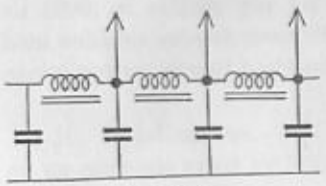


FIG. 1-9,

Deuxième application. — Chargeons une triode avec une ligne. Il suffit d'envoyer une impulsion en négatif pour avoir une impulsion en positif sur la plaque et récolter d'autres impulsions à différentes prises sur la ligne. On peut d'ailleurs relier toutes ces dérivations aux grilles de différentes lampes (fig. 1-10).

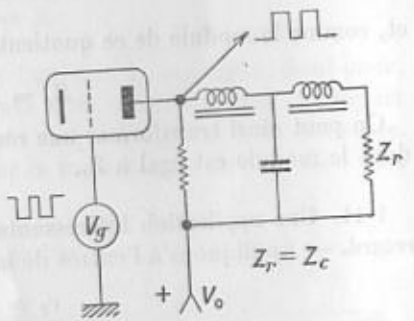


FIG. 1-10.

Cas d'une ligne fermée par un court-circuit. — La charge étant nulle, $V_r = 0$. Si l'onde sinusoïdale arrive au bout de la ligne en positif, elle change de signe et repart en négatif.

Supposons la première dérivation branchée sur une lampe.

Injectons une impulsion longue, par exemple 50 µs, elle se propage le long de la ligne, et va revenir à l'entrée au bout d'un temps égal à *deux fois* le temps de transit, et avec une amplitude égale à celle de départ, pour une ligne sansperte.

Pour une ligne ouverte, l'impulsion réfléchie reviendrait sans changement de signe.

CHAPITRE II

LES CONSTANTES D'UNE LIGNE

Il y a quatre constantes d'une ligne formée de deux fils parallèles ou d'un câble coaxial, en les considérant par unité de longueur de ligne, c'est-à-dire par kilomètre : l'inductance L due aux deux fils, la capacité C, la résistance ohmique R, et la conductance de fuite G qui évidemment ne peut pas se calculer à l'avance, G dépendant de la construction de la ligne, des matériaux qui la constituent et de son isolement.

2-1. **Cas de deux fils parallèles.** — Appelons D la distance d'axe en axe et r le rayon du fil, supposé non magnétique (cuivre ou bronze phosphoreux).

Calcul de l'inductance L. — L'inductance L est le flux produit par unité de courant. Comme les fils sont fins et que, par suite de l'effet pelliculaire, le courant est concentré à la périphérie du fil on ne calcule que le flux extérieur au fil. On a :

$$L = \Phi / I.$$

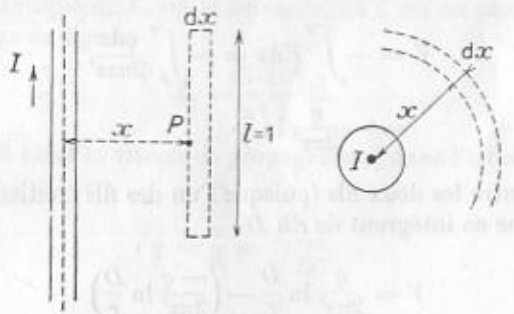


FIG. 2-1.

Plaçons-nous à la distance x de l'axe du fil, en P (fig. 2-1), où l'induction B est :

$$B = \frac{\mu I}{2\pi x} = \mu H, \qquad (\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m})$$

d'après la loi de circulation du magnétisme, où H est en ampères par mètre.

Comme le deuxième fil est à la distance D du premier, il suffit d'intégrer de r à D, le flux au-delà de D n'intervenant plus, ce qui donne :

$$L = \int_r^D \mu \frac{H(1 \cdot dx)}{I} = \int_r^D \mu \frac{I dx}{2\pi x I}$$
$$= \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D}{r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \ln \frac{D}{r},$$

et, pour les deux fils, on aura le double, soit :

$$\boxed{L = 4 \cdot 10^{-7} \ln \frac{D}{r} \text{ H/m},} \qquad (2\text{-}1)$$

où ln est le logarithme népérien ($\ln x = 2{,}3 \lg x$).

On a aussi :

$$L = 0{,}92 \lg \frac{D}{r} \quad \mu\text{H/m}. \qquad (2\text{-}2)$$

2-2. **Calcul de la capacité.** — Par définition, on a $C = q/V$, où q est la charge d'un seul fil par unité de longueur.

Si on appelle E l'intensité du champ électro-statique en un point P quelconque, à la distance x du centre du fil (et extérieur au fil), on a :

$$E = \frac{q}{2\pi x \varepsilon'} \text{ volts/m}.$$

Le potentiel en P est, puisque $E = -\,dV/dx$:

$$V = -\int_r^x E dx = -\int_r^x \frac{q dx}{2\pi x \varepsilon'}$$
$$= -\frac{q}{2\pi\varepsilon'} \ln \frac{x}{r}.$$

La D. D. P. entre les deux fils (puisque l'un des fils contient $+ q$ et l'autre $- q$) sera obtenue en intégrant de r à D :

$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon'} \ln \frac{D}{r} - \left(\frac{-q}{2\pi\varepsilon'} \ln \frac{D}{r}\right)$$

$$\boxed{V = \frac{q}{\pi\varepsilon'} \ln \frac{D}{r}.} \qquad (2\text{-}3)$$

avec

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ Farads/mètre}.$$

On aura donc :

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q \cdot \pi\varepsilon'}{q \ln (D/r)}$$
$$C = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \cdot \frac{10^{-9}}{36 \ln (D/r)}, \qquad (2\text{-}4)$$

où $\varepsilon/\varepsilon_0$ est la constante diélectrique relative du milieu isolant, et égal à 1 pour l'air, d'où la formule :

$$\boxed{C = \frac{10^{-9}}{36 \ln (D/r)} \text{ F/m}}. \qquad (2\text{-}5)$$

On a aussi :

$$C = \frac{12}{\lg (D/r)} \quad \mu\mu\text{F/m}$$

2-3. **Calcul de l'impédance caractéristique Z_c.** — On a :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{4 \ln (D/r) \cdot 10^{-7}}{\frac{10^{-9}}{36 \ln (D/r)}}}$$

ou finalement

$$\boxed{Z_c = 276 \lg \frac{D}{r} \quad \Omega}. \qquad (2\text{-}6)$$

Une formule pratique de Z_c est la suivante, où C est en picofarads par kilomètre de longueur de ligne :

$$Z_c = \frac{3 \cdot 10^6}{C} \Omega.$$

On en déduirait aussi la vitesse de propagation γ dans l'air ou dans un métal parfaitement conducteur :

$$\gamma = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-7} \ln \frac{D}{r} \cdot \frac{10^{-9}}{36 \ln (D/r)}}}$$

ou enfin

$$\boxed{\gamma = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}, \qquad (2\text{-}7)$$

c'est la vitesse de la lumière.

2-4. **Résistance ohmique.** — Pour deux fils de cuivre, la résistance ohmique pour 1 m de ligne, soit 2 mètres de longueur de fil, est :

$$\boxed{R = \frac{84\sqrt{F}\cdot 10^{-7}}{r}\ \Omega/\text{m}}, \qquad (2\text{-}8)$$

où r est le rayon d'un fil en cm.

On remarque que R est proportionnelle à $\sqrt{F}$.

On trouvera d'ailleurs dans notre Tome I, au chapitre du circuit oscillant, des formules sur la résistance en HF d'un fil, sur l'épaisseur de la pellicule équivalente, etc., ainsi que sur les pertes d'énergie dans les condensateurs, dues à l'isolant et à l'isolement.

On n'oubliera pas à ce sujet que les pertes dans l'isolant d'un condensateur sont proportionnelles au carré de la D. D. P. V.

Remarque. — On trouverait que :

$$\gamma = \frac{3\cdot 10^8}{F\sqrt{\varepsilon}} \text{ mètre} \qquad (2\text{-}9)$$

et

$$\beta = \frac{2\pi F\sqrt{\varepsilon}}{3\cdot 10^8} \text{ par mètre} \qquad (2\text{-}10)$$

où ε est la constante diélectrique du milieu.

— Dans le chapitre XIII consacré aux applications des équations de MAXWELL nous calculerons l'épaisseur de la pellicule du courant HF. Indiquons dès maintenant l'épaisseur a où la densité de courant est $1/e$ de la densité à la surface :

$$a = \frac{6{,}59}{\sqrt{F}} \qquad \begin{pmatrix} F \text{ en Hertz} \\ a \text{ en cm} \end{pmatrix}$$

ou

$$a = \frac{65{,}9}{\sqrt{F}} = 3{,}8\sqrt{\lambda}. \qquad \begin{pmatrix} F \text{ en MHz} \\ \lambda \text{ en m} \\ a \text{ en microns} \end{pmatrix}$$

Quand on a deux fils parallèles, la localisation du courant ne se fait pas suivant une couronne, dans les fils, mais suivant un croissant à cause des effets de proximité dus aux actions électrodynamiques de deux courants parallèles. L'effet de proximité disparaît pratiquement si la distance des fils est supérieure à huit fois leur diamètre.

2-5. **Cas d'un câble coaxial.** — Soit a le rayon du câble intérieur et b le rayon intérieur du tube extérieur (fig. 2-2). Le flux magnétique capté par un tube annulaire d'épaisseur dx et à la distance x du centre est, comme on l'a vu plus haut :

$$d\Phi = \frac{\mu I}{2\pi x}dx,$$

d'où :

$$\Phi = \int_a^b \frac{\mu I dx}{2\pi x} = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \text{ (en webers/m)}.$$

On notera que le flux est nul à l'extérieur.

On en déduit l'inductance :

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a},$$

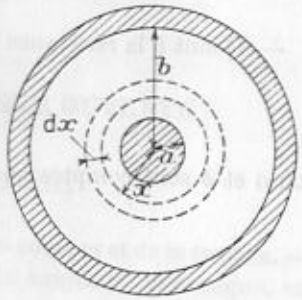


FIG. 2-2.

et, en remplaçant μ par sa valeur, il reste :

$$\boxed{L = 2\cdot 10^{-7}\ln\frac{b}{a}\ \text{H/m}} \qquad (2\text{-}11)$$

ou bien :

$$L = 0{,}46\ \lg\frac{b}{a} \quad \mu\text{H/m}.$$

— Pour calculer la capacité, remarquons que le champ électrique E dans l'isolant est :

$$\frac{q}{2\pi x\varepsilon'},$$

ainsi qu'on l'a vu plus haut, où q est la charge par unité de longueur de câble.

On aura donc la D. D. P. entre les deux conducteurs en intégrant de a à b :

$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon'}\int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{q}{2\pi\varepsilon'}\ln\frac{b}{a}.$$

La capacité sera ainsi :

$$C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon'}{\ln b/a}\ \text{F/m}$$

et dans l'air, en remplaçant ε' par sa valeur comme on l'a fait pour deux fils parallèles :

$$\boxed{C = \frac{24{,}1}{\lg (b/a)}\ \text{pF/m}}. \qquad (2\text{-}12)$$

On en déduit l'impédance caractéristique :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0{,}46\ \lg (b/a)\cdot 10^{-6}}{\frac{24{,}1}{\lg (b/a)}\cdot 10^{-12}}}$$

ou enfin :

$$\boxed{Z_c = 138 \lg (b/a)\ \Omega}. \qquad (2\text{-}13)$$

— Quant à la résistance ohmique, on trouve pour du cuivre :

$$R = 4{,}2 \cdot 10^{-6} \sqrt{F} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \Omega/\text{m} \qquad (2\text{-}14)$$

où a et b sont comptés en centimètres et F en Hz.

CHAPITRE III

LIGNE EN COURT-CIRCUIT ET LIGNE OUVERTE

I. — LIGNE EN COURT CIRCUIT

3-1. **Calcul de l'impédance d'entrée. Répartition du courant et de la tension.** — Étudions en détail le comportement d'une ligne de longueur quelconque, en court-circuit à son extrémité.

— Faisons $V_r = 0$ dans la première équation 1-7 ; pour $x = l$ on a $V = V_0$ (à l'entrée de la ligne) :

$$V_0 = \mathrm{j} Z_c I_r \sin \beta l. \qquad (3\text{-}1)$$

Portons cette valeur de I_r dans la première équation 1-7 qui donne V en un point quelconque de la ligne, on obtient :

$$V = \frac{V_0}{\mathrm{j} Z_c \sin \beta l} \cdot \mathrm{j} Z_c \sin \beta x$$

$$= V_0 \frac{\sin \beta x}{\sin \beta l}. \qquad (3\text{-}2)$$

De même, la seconde équation 1-7 donne, en remplaçant I_r par sa valeur tirée de l'équation 3-1 :

$$I = V_0 \frac{\cos \beta x}{\mathrm{j} Z_c \sin \beta l}, \qquad (3\text{-}3)$$

et, pour $x = l$:

$$I_0 = \frac{V_0}{\mathrm{j} Z_c \operatorname{tg} \beta l},$$

d'où l'impédance à l'entrée de la ligne :

$$\frac{V_0}{I_0} = Z_0 = \mathrm{j} Z_c \operatorname{tg} \beta l. \qquad (3\text{-}4)$$

L'équation 3-3 devient :

$$I = I_0 \operatorname{tg} \beta l \left(\frac{\cos \beta x}{\sin \beta l}\right) = I_0 \cdot \frac{\cos \beta x}{\cos \beta l}. \qquad (3\text{-}5)$$

Divisons enfin l'équation 3-2 par l'équation 3-3 pour obtenir l'impédance Z en un point quelconque :

$$\boxed{\frac{V}{I} = Z = \mathrm{j} Z_c \operatorname{tg} \beta x}. \qquad (3\text{-}6)$$

Comparons maintenant les équations 3-2 (qui donne V) et 3-5 (qui donne I) : on voit que V et I sont en quadrature dans l'espace (avec x), leurs phases restent constantes sur une distance $\lambda/2$, puis brusquement il y a inversion de phase : *on a des ondes stationnaires* (ou O. S.).

D'après la formule 3-4, on voit que la source débite sur une charge inductive (à cause de j). Enfin, d'après les équations 3-2 et 3-5, on voit que :

$$V \text{ varie de } \frac{V_0}{\sin \beta l} \quad \text{à} \quad -\frac{V_0}{\sin \beta l},$$

$$I \text{ varie de } \frac{I_0}{\cos \beta l} \quad \text{à} \quad -\frac{I_0}{\cos \beta l},$$

et à l'extrémité, où $V_r = 0$, on aura forcément un ventre de courant.

C'est en somme ce qu'il y a en bout de ligne qui détermine la répartition du courant et de la tension le long de la ligne.

3-2. **Variations de l'impédance d'entrée d'une ligne en court-circuit.** — Étudions en détail la formule 3-6.

Premier cas. — Si l'on veut que $Z_0 = 0$, pour $x = l$, on aura :

$$\operatorname{tg} \beta l = 0, \qquad \beta l = K\pi$$

et

$$l = \frac{K\pi}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{K\pi}{\omega}\gamma,$$

soit :

$$\boxed{l = K\lambda/2}. \tag{3-7}$$

Pour K = 1, $l = \lambda/2$ (ligne demi-onde) ; on peut pratiquement faire glisser une tige de cuivre mobile (formant pont sur les deux fils de ligne) jusqu'à ce qu'un ampèremètre thermique indique I maximum à l'entrée de la ligne.

Deuxième cas. — Si l'on veut que $Z_0 = \infty$, on aura :

$$\operatorname{tg} \beta l = \infty, \qquad \beta l = (2K + 1)\pi/2,$$

et, comme plus haut :

$$\boxed{l = (2K + 1)\lambda/4}. \tag{3-8}$$

Si $K = 0$, $l = \lambda/4$ (ligne quart d'onde) et $I_0 = 0$.

En résumé, une ligne terminée par un court-circuit mobile constitue un dispositif simple permettant de réaliser facilement une impédance d'entrée variant de 0 *à* ∞.

La figure 3-1 indique comment varie l'impédance d'entrée d'une ligne en court-circuit, en fonction de x (ou mieux de βx). C'est en somme la courbe des variations d'une tangente trigonométrique (équation 3-6).

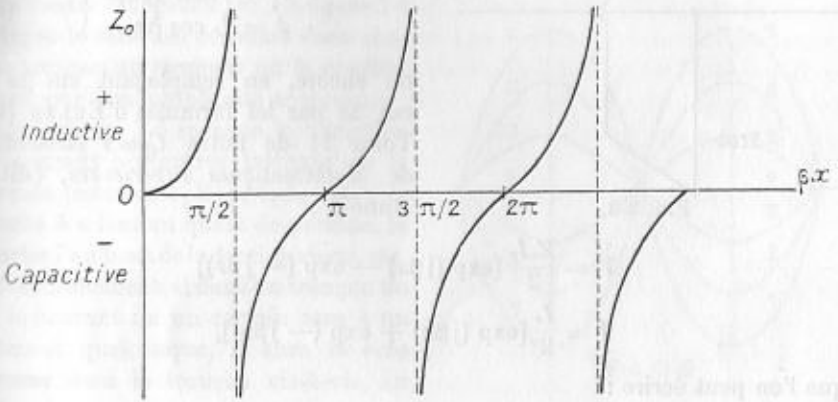


FIG. 3-1.

La figure 3-2 est un tableau donnant la nature physique de l'impédance d'entrée d'une ligne quart d'onde, d'après sa longueur.

l	Nature de Z_o	Z_o	I_o
de 0 à $\lambda/4$			
$\lambda/4$		∞	0
de $\lambda/4$ à $\lambda/2$			
$\lambda/2$		0	Max

FIG. 3-2.

C'est en se basant sur ces principes qu'on obtient le *stub*, dont nous parlerons plus loin (fig. 3-3).

La figure 3-1 montre, d'après l'équation 3-6, les variations de Z_0 :

si $\beta l < \pi/2$, Z_0 est inductif $(l < \lambda/4)$,

si $\pi/2 < \beta l < \pi$, Z_0 est capacitif $(\lambda/2 > l > \lambda/4)$, etc.

La figure 3-2 résume ces propriétés, la partie droite donnant le circuit équivalent.

3-3. **Valeurs instantanées de V et de I.** — Les équations 1-7 donnent avec $V_r = 0$:

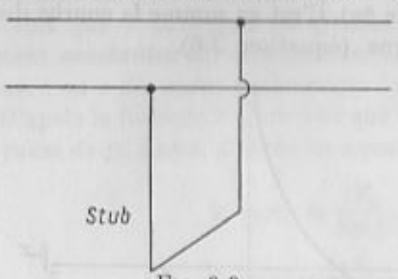


Fig. 3-3.

$$\left.\begin{aligned} V &= \mathrm{j}\, Z_c I_r \sin \beta x \\ I &= I_r \cos \beta x, \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}9)$$

ou encore, en remplaçant sin βx et cos βx par les formules d'Euler (voir Tome II de notre *Cours élémentaire de Mathématiques supérieures*, éditeur Dunod) :

$$V = \frac{Z_c I_r}{2} [\exp (\mathrm{j}\beta x) - \exp (-\mathrm{j}\beta x)]$$

$$I = \frac{I_r}{2} [\exp (\mathrm{j}\beta x) + \exp (-\mathrm{j}\beta x)],$$

que l'on peut écrire :

$$V = \frac{Z_c I_r}{2} \exp (\mathrm{j}\beta x) - \frac{Z_c I_r}{2} \exp (-\mathrm{j}\beta x)$$

$$I = \frac{I_r}{2} \exp (\mathrm{j}\beta x) + \frac{I_r}{2} \exp (-\mathrm{j}\beta x).$$

Ces deux expressions montrent que *l'état de la ligne est constitué par deux ondes : l'une (en $-x$) se propageant du récepteur vers la source, l'autre (en $+x$) se propageant de la source vers le récepteur, avec inversion de phase pour V (ce qui l'annule en bout de ligne)* et en concordance de phase pour I (ce qui double sa valeur). Les premiers termes de V et de I forment *l'onde incidente*, et les deux seconds termes forment *l'onde réfléchie*.

D'après les équations 3-9, on en déduit les valeurs instantanées :

$$i = I_r \cos \beta x \cdot \sin \omega t$$

$$v = Z_c I_r \sin \beta x \cdot \cos \omega t,$$

ce qui montre que v et i sont en quadrature dans le temps et dans l'espace, *on a des ondes stationnaires* : elles ont partout la même phase, mais leurs ampli-

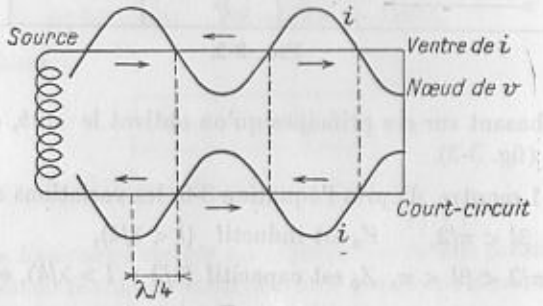


Fig. 3-4.

tudes varient avec la distance. Elles sont dues à l'interférence d'une onde directe et d'une onde... « réfléchie » (!) par l'extrémité de la ligne.

Là où v est maximum, i est nul et inversement, et la distance d'un nœud à un ventre est égale à $\lambda/4$. La figure 3-4 indique le sens des courants dans chaque tronçon au moment où le courant passe par son amplitude maximum ; mais la figure 3-5 indique la variation du courant à d'autres instants de la période (courbes 1, 2, 3, 4, 5, etc.), la courbe 4 a lieu au quart de période, la courbe 7 au bout de la demi-période, etc.

Naturellement, si dans un tronçon du fil, le courant i a un certain sens à un moment quelconque, il aura le sens inverse dans le tronçon vis-à-vis, au même instant.

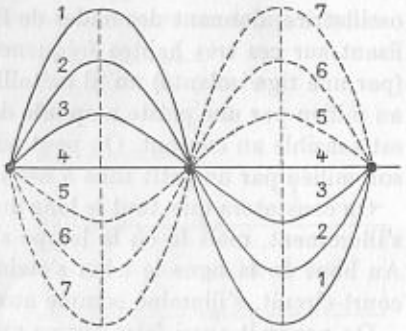


Fig. 3-5.

Nous verrons par la suite *les innombrables conséquences* que l'on peut tirer de ce fait, et utiliser.

— On comprend que c'est l'extrémité de la ligne qui impose... sa volonté, c'est-à-dire qui détermine l'intensité du courant à cet endroit : ici, comme il y a un court-circuit, c'est un ventre de courant que l'on aura, donc un nœud de potentiel. D'autre part, à la source, il y a aussi le maximum de courant, c'est pourquoi, pour que la répartition des nœuds et des ventres se produise nettement tout le long de la ligne, il faut que la longueur de celle-ci soit un multiple pair ou impair de $\lambda/4$. Dans le cas contraire, il y a encore des nœuds et des ventres, naturellement, mais il y a des perturbations à la source et le phénomène est moins net.

3-4. **Vérification expérimentale.** — Est-ce que l'expérience confirme la théorie mathématique? Est-ce que vraiment quand i est maximum, v est nul? Et, chose plus extraordinaire, est-ce qu'il y a vraiment des endroits où i et v sont nuls et d'autres où ils sont maximums?

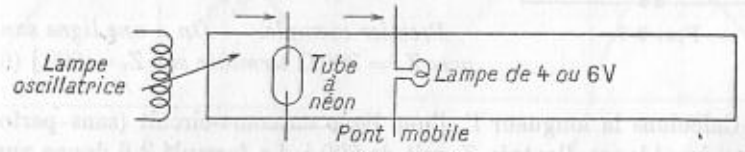


Fig. 3-6.

Questions fondamentales, dont les réponses sont toutes affirmatives.

C'est grâce *aux fils de* Lecher (physicien allemand) que l'on peut le vérifier (fig. 3-6).

Ce sont deux fils de cuivre de plusieurs mètres de longueur chacun tendus parallèlement au sol, dans un plan horizontal, isolés à l'une des extrémités, espacés entre eux de 10 cm à 30 cm par exemple, avec un court-circuit à l'autre extrémité. On approche ce fil de court-circuit des selfs d'une lampe oscillatrice, donnant des ondes de l'ordre de 1 à 2 mètres, le couplage est suffisant sur ces très hautes fréquences. A cheval sur les deux fils, on déplace (par une tige isolante) un fil métallique rigide, posé sur ces deux fils, et coupé au milieu par une petite ampoule de lampe de poche, de 4 ou 6 volts, laquelle est sensible au courant. On peut aussi déplacer un pont métallique coupé en son milieu par un petit tube à néon, lequel est sensible à la D. D. P.

On constatera que, tout le long du fil, il y a des endroits où la lampe et le néon s'illuminent, mais là où la lampe s'éteint, le néon s'illumine, et inversement. Au bout de la ligne le néon s'éteint et l'ampoule, placée au milieu du fil de court-circuit, s'illumine comme aux autres nœuds de courants.

On pourrait aussi faire glisser un pont coupé en son milieu par un détecteur à cristal (galène ou germanium) avec un téléphone à ses bornes : si la source est modulée en BF, on aura une succession d'endroits où l'on a le silence, et d'autres endroits, intercalés, où l'on entendra la modulation.

On peut aussi remplacer le téléphone par un microampèremètre à cadre mobile, associé à un redresseur sec.

— La distance d'un nœud à un ventre est égale à $\lambda/4$, ce qui donne le moyen de mesurer λ avec un mètre, et ce moyen est très précis et sensible.

Comme montage oscillateur, on peut, avec avantage, utiliser le montage symétrique de MESNY (Voir Tome II) avec deux triodes ou mieux une double triode telle que la 12AU 7 ou ECC 81 ou la 12 AX 7, la tension plaque étant de 200, ou 250 volts.

L'expérience est très démonstrative et facile à réaliser.

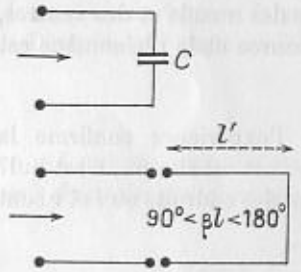


FIG. 3-7.

3-5. **Ligne terminée sur une réactance quelconque.** — On peut remplacer cette réactance par une longueur équivalente d'une ligne en court-circuit, sans pertes, suivant les valeurs indiquées aux figures 3-7 et 3-8. Précisons par deux exemples.

Premier exemple. — On a une ligne sans pertes avec $Z_c = 300\ \Omega$ terminée sur $Z_r = 600$ j (fig. 3-8).

— Calculons la longueur l' d'une ligne en court-circuit (sans pertes) telle que son impédance d'entrée Z_0 soit de 600 j. La formule 3-6 donne aussitôt :

$$600\ \text{j} = \text{j}\ 300\ \text{tg}\ \frac{2\pi l'}{\lambda} = \text{j}\ 300\ \text{tg}\left[\frac{l'}{\lambda}\cdot 360\right]^\circ$$

$$\text{tg}\left[\frac{l'}{\lambda}\cdot 360\right]^\circ = 2,$$

d'où :

$$\frac{l'}{\lambda}\cdot 360^\circ \approx 63^\circ, \qquad \text{et} \qquad l' = 0{,}175\ \lambda.$$

Connaissant cette longueur à ajouter à la ligne initiale, il est alors facile de tracer les courbes de V et de I à partir du court-circuit ; on en déduira facilement les valeurs de v et de i à l'endroit où est l'inductance de 600 Ω.

La figure 3-9 donne la répartition du courant et de la tension, et les points A et B donnent graphiquement les valeurs de V et de I dans la charge, si λ est connue.

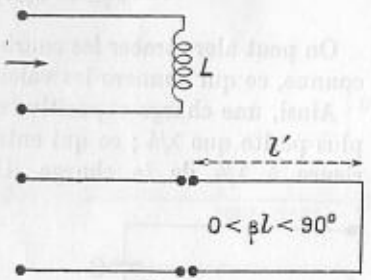


FIG. 3-8.

— Supposons maintenant une charge capacitive $Z_r = -600$ j. On ajouterait alors un tronçon de ligne *ouverte* de longueur l' telle que l'on ait (fig. 3-10) :

$$-600\ \text{j} = \frac{-300\ \text{j}}{\text{tg}\left(\frac{l'}{\lambda}360^\circ\right)},$$

d'où :

$$\text{tg}\left(\frac{l'}{\lambda}360^\circ\right) = \frac{-300\ \text{j}}{-600\ \text{j}} = 0{,}5,$$

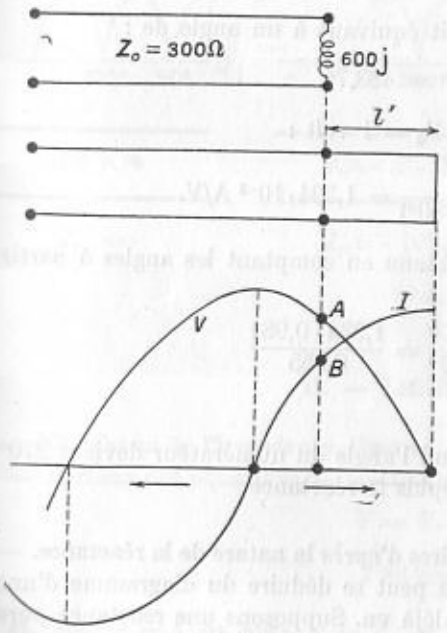


FIG. 3-9.

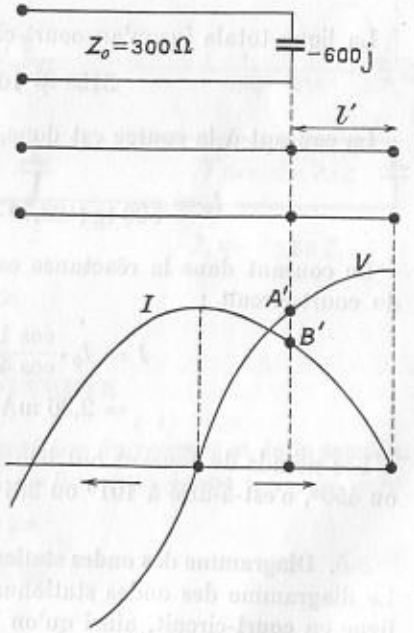


FIG. 3-10.

on en déduit :

$$\frac{l'}{\lambda} 360° = 26°35',$$

d'où :

$$l'/\lambda = 0{,}074 \quad \text{et} \quad l' = 0{,}074\ \lambda.$$

On peut alors tracer les courbes de V et de I, à partir du bout libre, si λ est connue, ce qui donnera les valeurs de V et de I, en A' et B' dans la capacité.

Ainsi, une charge capacitive est équivalente à un morceau de ligne ouverte plus petite que $\lambda/4$; ce qui entraîne un nœud de tension à une distance inférieure à $\lambda/4$ de la charge. Une très forte capacité donnerait un effet de court-circuit, avec $V = 0$ à la charge. Ainsi, plus C augmente et plus le nœud de potentiel se rapproche de la charge.

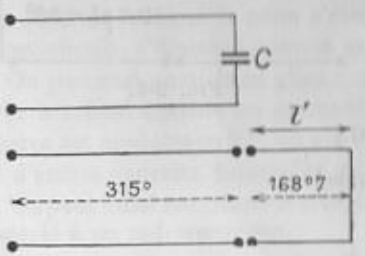


Fig. 3-11.

Deuxième exemple. — Prenons une ligne, dont $Z_c = 500\ \Omega$, *terminée sur une réactance* $X = -100\ \mathrm{j}$ (fig. 3-11), *avec* $\beta l = 315°$.

— On a :

$$\beta l' = \text{arc tg}\left(-\frac{100}{500}\right) = 168{,}7°.$$

La ligne totale jusqu'au court-circuit équivaut à un angle de :

$$315° + 168{,}7° = 483{,}7°.$$

Le courant à la source est donc, si $V_0 = 1$ volt :

$$I_0 = \frac{1}{500 \text{ tg } (483{,}7° - 360°)} = 1{,}334 \cdot 10^{-3}\ \text{A/V}.$$

Le courant dans la réactance est obtenu en comptant les angles à partir du court-circuit :

$$I = I_0 \cdot \frac{\cos 168{,}7°}{\cos 483{,}7°} = \frac{1{,}334 \cdot 0{,}981}{0{,}555}$$
$$= 2{,}36\ \text{mA/V}.$$

Les nœuds de courant ont lieu quand l'angle du numérateur devient 270° ou 450°, c'est-à-dire à 101° ou 281° depuis la réactance.

3-6. **Diagramme des ondes stationnaires d'après la nature de la réactance.** — Le diagramme des ondes stationnaires peut se déduire du diagramme d'une ligne en court-circuit, ainsi qu'on l'a déjà vu. Supposons une réactance pure et précisons davantage. A une distance inférieure à $\lambda/4$ du court-circuit, on

a vu que l'impédance d'entrée est inductive, et l'on peut remplacer le tronçon de ligne par une inductance sans rien changer ni à V, ni à I (fig. 3-12).

Si la distance au court-circuit augmente peu à peu, on obtient successivement les diagrammes du courant des figures *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, pour une fréquence bien déterminée naturellement. Si la distance est égale à $\lambda/2$ on retrouve la figure *a*.

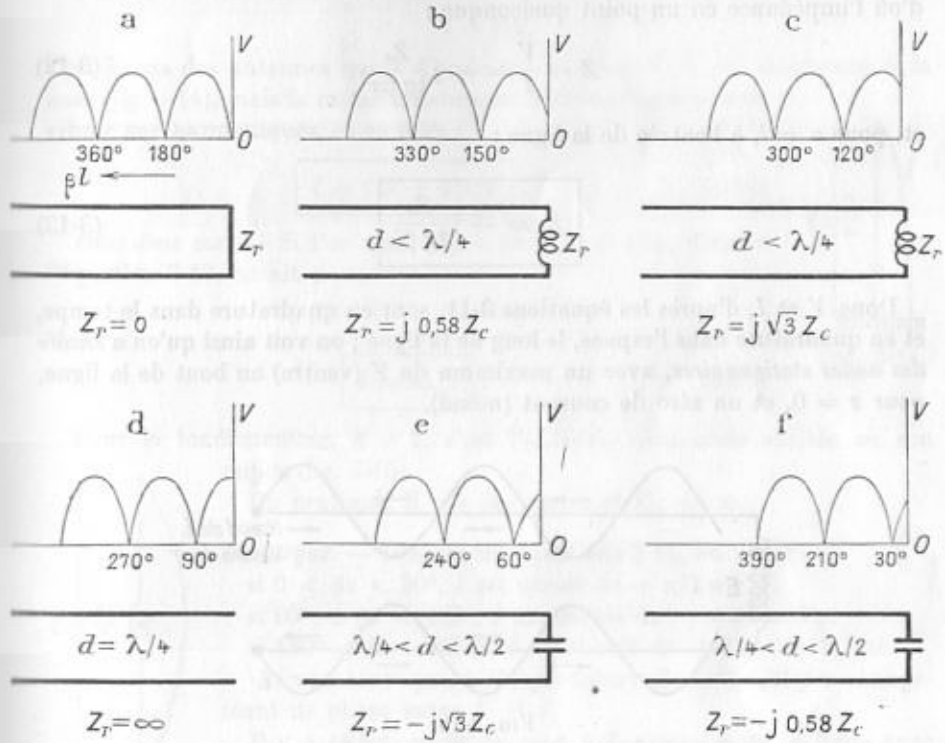


Fig. 3-12.

II. — LIGNE OUVERTE

3-7. **Calcul de l'impédance d'entrée. Répartition du courant et de la tension.** — Partons des équations 1-7 en faisant $I_r = 0$, ce qui donne :

$$V = V_r \cos \beta x$$
$$I = \mathrm{j}\frac{V_r}{Z_c} \sin \beta x, \qquad (3\text{-}10)$$

et, pour $x = l$, on aura $V = V_0$, d'où :

$$V_0 = V_r \cos \beta l.$$

Les équations 3-10 deviennent :

$$V = V_0 \frac{\cos \beta x}{\cos \beta l}$$
$$I = \mathrm{j} \frac{V_0}{Z_c} \cdot \frac{\sin \beta x}{\cos \beta l}, \qquad (3\text{-}11)$$

d'où l'impédance en un point quelconque :

$$Z = \frac{V}{I} = -\mathrm{j} \frac{Z_c}{\operatorname{tg} \beta x}, \qquad (3\text{-}12)$$

et, pour $x = l$, à l'entrée de la ligne :

$$\boxed{Z_0 = -\mathrm{j} \frac{Z_c}{\operatorname{tg} \beta l}} \qquad (3\text{-}13)$$

Donc V et I, d'après les équations 3-11, sont en quadrature dans le temps, et en quadrature dans l'espace, le long de la ligne ; on voit ainsi qu'*on a encore des ondes stationnaires*, avec un maximum de V (ventre) au bout de la ligne, pour $x = 0$, et un zéro de courant (nœud).

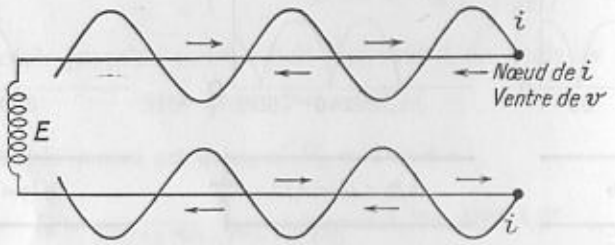


Fig. 3-13.

La figure 3-13 montre la répartition du courant au moment où il passe par son amplitude maximum. A d'autres instants de la période, on aurait des courbes analogues à celles de la figure 3-5.

On verrait encore par les fils de Lecher que là où il y a un ventre de courant, il y a un nœud de potentiel, et inversement.

On aura le maximum de V pour $\cos \beta x = 1$:

$$V_{max} = \pm \frac{V_0}{\cos \beta l};$$

de même,

$$I_{max} = \frac{\pm V_0}{Z_c \cos \beta l}.$$

— Étudions maintenant la formule 3-13 de l'impédance d'entrée Z_0.

Premier cas. — Si l'on veut $Z_0 = 0$, il faut que :

$$\operatorname{tg} \beta l = \infty \qquad \text{ou} \qquad \beta l = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

ou

$$2\pi l/\lambda = (2k+1)\pi/2.$$

Pour la fondamentale $k = 0$ et :

$$l = \lambda/4,$$

c'est le cas des antennes quart d'onde où le courant I_0 est maximum à la base (fig. 3-14), mais la même antenne ou la même ligne pourra vibrer sur harmoniques, et on aura :

$$\boxed{l = (2k+1)\lambda/4}. \qquad (3\text{-}14)$$

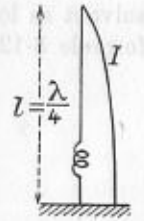


Fig. 3-14.

Deuxième cas. — Si l'on veut $Z_0 = \infty$, il faut que, d'après l'équation 3-13, on ait :

$$\operatorname{tg} \beta l = 0, \qquad \beta l = k\pi$$

et

$$\boxed{l = k\lambda/2}. \qquad (3\text{-}15)$$

Pour la fondamentale, $k = 1$, c'est l'antenne demi-onde excitée en son milieu (fig. 3-15).

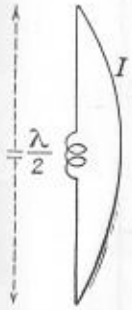


Fig. 3-15.

En pratique, il y a des pertes et $Z_0 \neq \infty$.

Remarque. — D'après les équations 3-11, on voit que :
si $0 < \beta x < 90°$, I est décalé de $+\pi/2$ sur V,
si $90° < \beta x < 180°$, I est décalé de $-\pi/2$ sur V,
si $180° < \beta x < 270°$, I est décalé de $+\pi/2$ sur V, etc.

On voit ainsi que, à chaque intervalle de $\lambda/4$, il y a changement de phase entre V et I.

Il y a réflexion du courant à l'extrémité de la ligne avec déphasage de 180° et $I = 0$, tandis qu'il y a réflexion de V sans changement de phase.

3-8. **Valeurs instantanées du courant et de la tension.** — Les équations 3-10 peuvent s'écrire :

$$V = \frac{V_r}{2}[\exp(\mathrm{j}\beta x) + \exp(-\mathrm{j}\beta x)]$$
$$= \frac{V_r}{2}\exp(\mathrm{j}\beta x) + \frac{V_r}{2}\exp(-\mathrm{j}\beta x)$$
$$I = \frac{V_r}{2Z_c}[\exp(\mathrm{j}\beta x) - \exp(-\mathrm{j}\beta x)]$$
$$= \frac{V_r}{2Z_c}\exp(\mathrm{j}\beta x) - \frac{V_r}{2Z_c}\exp(-\mathrm{j}\beta x).$$

Ces deux équations montrent encore l'existence de deux ondes : l'une directe et l'autre réfléchie, mais c'est l'inverse de la ligne en court-circuit.

Les premiers termes de V et de I représentent une onde allant de la source vers le récepteur, c'est *l'onde incidente* et les seconds termes représentent une onde allant du récepteur vers la source, c'est *l'onde réfléchie.*

Les valeurs instantanées sont, d'après les équations 3-10 :

$$\left.\begin{aligned} v &= V_r \cos \beta x \cdot \sin \omega t \\ i &= \frac{V_r}{Z_c} \sin \beta x \cdot \cos \omega t. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}16)$$

La figure 3-16 indique la nature de l'impédance d'entrée Z_0 de la ligne, suivant sa longueur, et la figure 3-17 indique les variations de Z_0 d'après la formule 3-12, c'est encore une pure réactance.

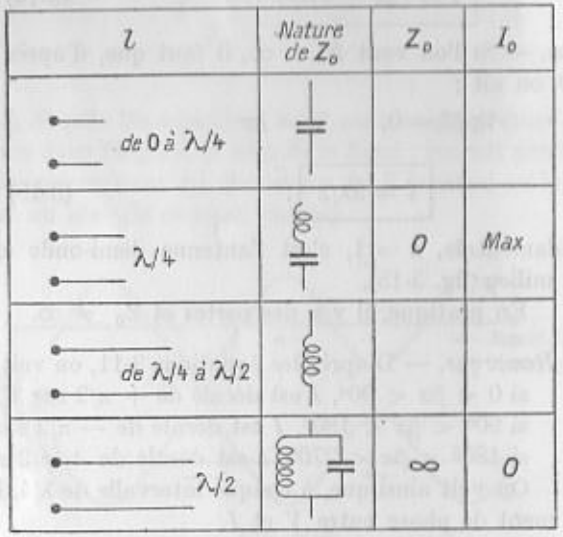


FIG. 3-16.

— *En résumé, une ligne où il y a des ondes stationnaires est appelée ligne résonnante et une ligne terminée sur Z_c n'a pas d'ondes stationnaires (mais des ondes progressives), elle n'est pas résonnante.*

3-9. **Tension à l'extrémité d'une ligne ouverte en quart d'onde.** — Partons de la formule 3-10 :

$$V = V_r \cos \beta x,$$

on en tire, en faisant $x = \lambda/4$ et $V = V_0$:

$$V_r = \frac{V_0}{\cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4}} = \frac{V_0}{\cos \frac{\pi}{2}}$$
$$= \infty$$

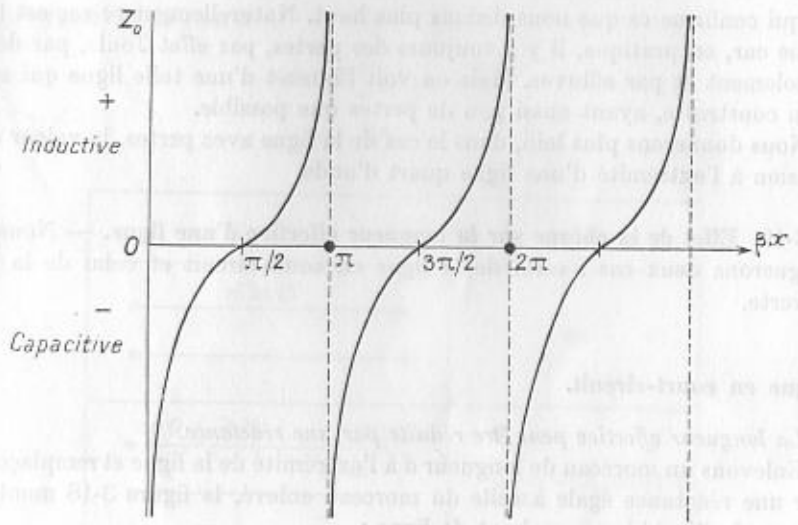


FIG. 3-17.

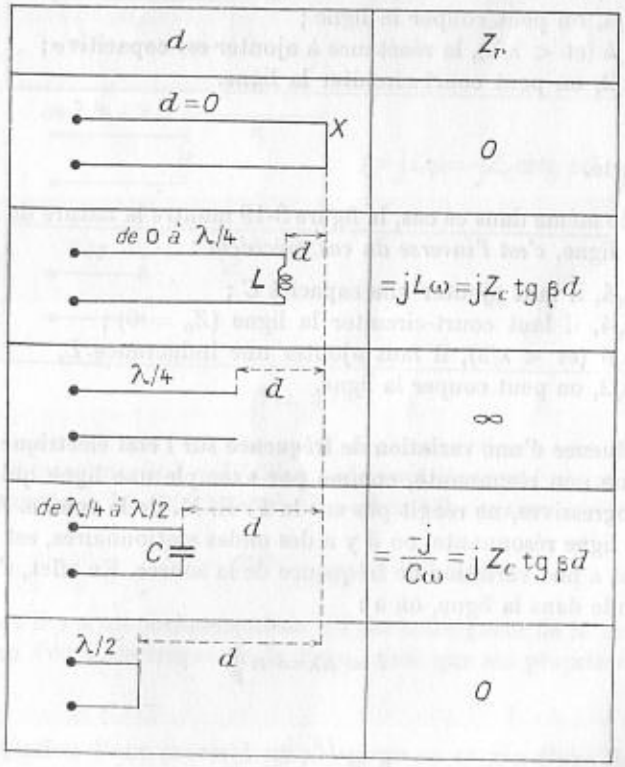


FIG. 3-18.

ce qui confirme ce que nous disions plus haut. Naturellement ce cas est théorique car, en pratique, il y a toujours des pertes, par effet Joule, par défaut d'isolement et par effluves. Mais on voit l'intérêt d'une telle ligne qui serait bien construite, ayant aussi peu de pertes que possible.

Nous donnerons plus loin, dans le cas de la ligne avec pertes, la valeur de la tension à l'extrémité d'une ligne quart d'onde.

3-10. **Effet de la charge sur la longueur effective d'une ligne.** — Nous distinguerons deux cas : celui de la ligne en court-circuit et celui de la ligne ouverte.

Ligne en court-circuit.

La longueur effective peut être réduite par une réactance.

Enlevons un morceau de longueur d à l'extrémité de la ligne et remplaçons-le par une réactance égale à celle du morceau enlevé, la figure 3-18 montre la nature de l'impédance en bout de ligne :

Si $d < \lambda/4$, la réactance à ajouter est inductive ;
Si $d = \lambda/4$, on peut couper la ligne ;
Si $d > \lambda/4$ (et $< \lambda/2$), la réactance à ajouter est capacitive ;
Si $d = \lambda/2$, on peut court-circuiter la ligne.

Ligne ouverte.

Faisons de même dans ce cas, la figure 3-19 montre la nature de l'impédance en bout de ligne, *c'est l'inverse du cas précédent* :

Si $d < \lambda/4$, il faut ajouter une capacité C ;
Si $d = \lambda/4$, il faut court-circuiter la ligne ($Z_0 = 0$) ;
Si $d > \lambda/4$ (et $< \lambda/2$), il faut ajouter une inductance L,
Si $d = \lambda/2$, on peut couper la ligne.

3-11. **Influence d'une variation de fréquence sur l'état électrique d'une ligne.** — Une ligne non résonnante, comme par exemple une ligne qui est le siège d'ondes progressives, ne réagit pas sur la F. E. M. de la source. Au contraire, une longue ligne résonnante, où il y a des ondes stationnaires, est très sensible évidemment à une variation de fréquence de la source. En effet, s'il y a n longueurs d'onde dans la ligne, on a :

$$l = n\lambda = n\frac{\gamma}{F}$$

ou

$$n = \frac{lF}{\gamma}.$$

Si F varie de dF, on a :

$$dn = \frac{l}{\gamma}dF = n\frac{dF}{F}$$
$$= Kn,$$

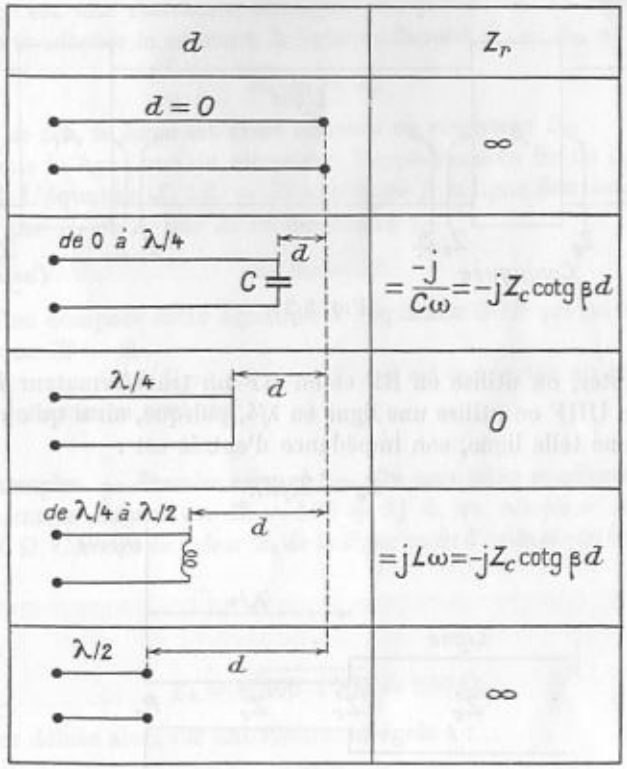


FIG. 3-19.

ainsi, dn *est proportionnelle à* n. D'ailleurs, dn peut être une fraction importante de λ. Par exemple, si $l = 250\ \lambda$, et si $dF = 1/1\,000$, on aura :

$$dn = 250 \cdot \frac{1}{1\,000} = 0{,}25,$$

c'est-à-dire qu'il y a un changement de $\lambda/4$ sur la longueur de la ligne. On voit ainsi combien l'état électrique de la ligne, ainsi que ses propriétés, peuvent changer.

3-12. **Adaptation d'une source à un récepteur au moyen d'une ligne.** — On voit l'avantage qu'il y a à placer un adaptateur A_1 avant le récepteur afin

que la ligne soit terminée sur Z_c, dans le but de supprimer les ondes stationnaires.

Si l'impédance interne Z_s de la source est égale à Z_c, il y a adaptation parfaite de la source à la ligne, mais si $Z_s \neq Z_c$, il faut ajouter un adaptateur A_2 à la sortie de la source (figure 3-20). On adapte d'abord A_1 à Z_r et à la ligne Z_c, puis on adapte A_2 à Z_s.

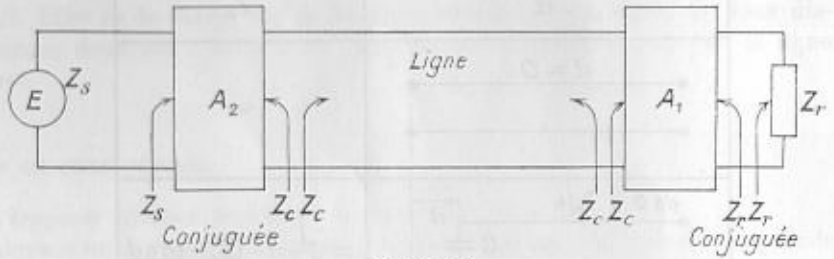


FIG. 3-20.

Pour adapter, on utilise en BF et en HF un transformateur BF ou HF, tandis qu'en UHF on utilise une ligne en $\lambda/4$, puisque, ainsi qu'on l'a vu plus haut dans une telle ligne, son impédance d'entrée est :

$$Z_0 = Z_c^2/Z_r.$$

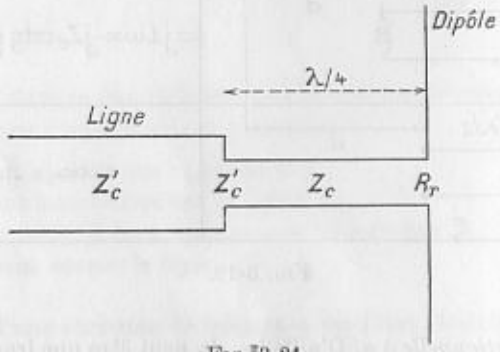


FIG. 3-21.

Si $Z_r = R_r$ n'a pas la valeur voulue, on intercale une ligne en $\lambda/4$ dont le Z_c est calculé pour que son impédance d'entrée ait la valeur voulue, c'est-à-dire la valeur Z'_c de la ligne d'alimentation :

$$Z'_c = \sqrt{R_r \cdot R_c}$$

où R_c est la résistance d'entrée de la ligne ($Z'_c = R_c + jX_c$) ainsi que l'indique la figure 3-21. On peut ajuster l'écartement des deux fils de ligne, mais cet ensemble est très sensible à une variation de fréquence de la source.

Adaptation parfaite. — Si une ligne en quart d'onde relie une source, de F. E. M. E et d'impédance interne $Z_s = R_s + 0j$, à un récepteur d'impédance $Z_r = R_r + 0j$, on a vu précédemment que l'impédance d'entrée de cette ligne était :

$$Z_0 = Z_c^2/Z_r, \qquad (3\text{-}17)$$

cette valeur est une résistance ohmique puisque Z_r et Z_c sont ohmiques. On peut donc adapter la source à la ligne en faisant $R_s = Z_0$, on aura ainsi :

$$R_s \cdot R_r = Z_c^2. \qquad (3\text{-}18)$$

Mais, dans ce cas, la ligne est aussi adaptée au récepteur R_r.

Considérons la ligne vue du récepteur, l'impédance en fin de ligne sera par exemple Z'_r. L'équation $Z_s \cdot Z_r = Z_c^2$ appliquée à la ligne donnera Z'_r en remplaçant Z_r par R_s et Z_s par Z'_r ce qui donne :

$$Z'_r \cdot R_s = Z_c^2.$$

Mais si l'on compare cette équation à l'équation 3-18 qui lui est égale, on voit bien que $Z'_r = R_r$.

L'impédance *en fin de ligne* est ainsi R_r qui est connectée au récepteur R_r : il y a donc *adaptation parfaite.*

3-13. **Exemples.** — *Premier exemple.* — *On veut relier et adapter une source dont la résistance interne est $Z_s = 400 + 0j$ à un récepteur ohmique dont $Z_c = 1\,000\ \Omega$. Calculer la valeur Z_c de la ligne quart d'onde et vérifier s'il y a bien adaptation.*

— On a :

$$Z_c = \sqrt{400 \cdot 1\,000} = 630\ \Omega.$$

La source débite alors sur une résistance égale à :

$$\frac{Z_c^2}{1\,000} = \frac{630^2}{1\,000} = 400\ \Omega,$$

et l'impédance en bout de ligne est :

$$\frac{Z_c^2}{400} = \frac{630^2}{400} = 1\,000\ \Omega,$$

le récepteur de 1 000 Ω est ainsi connecté à une source fictive de 1 000 Ω, il y a bien adaptation aux deux extrémités de la ligne et le courant dans le récepteur sera maximum.

Remarque. — Si on avait $Z_r = R_r \pm jX_r$, on aurait à l'entrée de la ligne $Z_0 = R_s \mp jX_s$; une charge capacitive peut être adaptée à un générateur selfique, l'angle φ de l'impédance devant être le même. Si l'on veut obtenir

à l'entrée une impédance conjuguée de la charge, on prendra une ligne quart d'onde telle que :

$$Z_c = \sqrt{R_r^2 + X_r^2},$$

c'est-à-dire égale au module de l'impédance de Z_r.

On aperçoit ainsi les propriétés remarquables de la ligne quart d'onde.

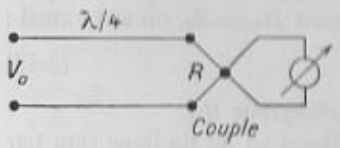


Fig. 3-22.

Deuxième exemple. — Un voltmètre en UHF est formé d'une ligne quart d'onde sans pertes, terminée sur le filament chauffant d'un thermocouple de résistance $R = 5\ \Omega$. *Calculer* (fig. 3-22) :

1° *La tension* V_0 *à l'entrée de la ligne sachant que le courant* $I_R = 15$ mA.

2° *L'impédance d'entrée de la ligne, si* $Z_c = 75\ \Omega$.

— On a :

$$V_0 = I_R Z_c = 15 \cdot 10^{-3} \cdot 75$$
$$= 1{,}125 \text{ V}.$$

$$Z_0 = \frac{Z_c^2}{Z_R} = \frac{75^2}{5}$$
$$= 1\,125\ \Omega.$$

Troisième exemple. Cas d'une ligne adaptée. — Soit un générateur de F. E. M. 50 *volts avec* F = 60 Mc/s, *de résistance interne* $\rho = 30\ \Omega$ *connecté à l'entrée d'une ligne sans pertes formée de deux fils parallèles de* 2 mm *de diamètre, à* 4 cm *l'un de l'autre, l'isolant ayant* $\varepsilon = 2{,}25$. *Calculer :*

1° *L'impédance caractéristique* Z_c *de la ligne.*

2° *La D. D. P. aux bornes du récepteur, si la ligne a* 30 m *de longueur.*

3° *L'intensité du courant* I_r *dans le récepteur.*

— On a :

$$Z_c = \frac{276}{\sqrt{2{,}25}} \lg \frac{40 \cdot 2}{2}$$
$$= 294\ \Omega, \quad \text{soit} \quad 300\ \Omega.$$

On a :

$$I_r = \frac{V_0}{Z_s + Z_c} \exp(-j\beta l)$$

et

$$V_r = \frac{V_0 Z_c}{Z_s + Z_c} \exp(-j\beta l)$$

où

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{5} \text{ rd/m}.$$

Au bout de 30 mètres, le vecteur tension a tourné d'un angle :

$$\beta l = \frac{2\pi}{5} \cdot 30 = 12\pi.$$

On aura donc :

$$V_r = \frac{50 \cdot 300}{300 + 30} \exp(-j12\pi)$$
$$= 4{,}5 \cdot 10 \exp(-j12\pi) = 45\underline{/-12\pi} \text{ volts}.$$

Quant à I_r, on a :

$$I_r = \frac{V_r}{Z_c} = \frac{45}{300}$$
$$= 0{,}15 \text{ A}.$$

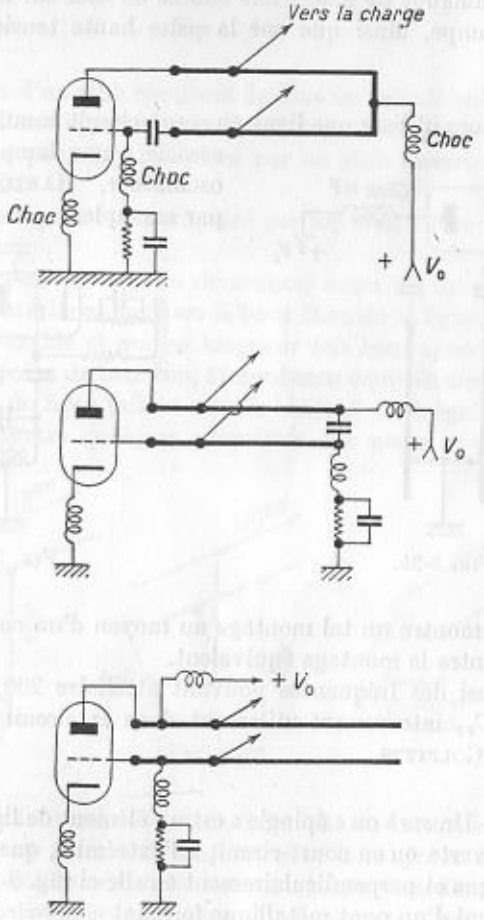


Fig. 3-23.

3-14. **Oscillateurs à lampe utilisant une ligne.** — On peut utiliser les capacités internes d'une triode, associées à une ligne en court-circuit, de faible longueur, pour former un oscillateur en U. H. F.

La figure 3-23 montre trois montages où la ligne sert de réactance entre grille et plaque. Une dérivation sur la ligne sert, au besoin, à brancher une charge sur la lampe.

On peut aussi utiliser une ligne ouverte, mais la source haute tension et la polarisation de grille doivent être connectées sur la ligne à un nœud de tension. Avec la ligne ouverte, il n'y a pas besoin de condensateur de blocage.

Pour la ligne en court-circuit, l est un peu inférieure à $\lambda/4$, et pour la ligne ouverte :

$$\lambda/4 < l < \lambda/2.$$

Il est très recommandé de placer une bobine de choc sur le fil de cathode, à la sortie de la lampe, ainsi que sur la prise haute tension et la prise de grille.

— On peut encore utiliser une ligne en court-circuit comme circuit oscillant associé à une lampe pour former un oscillateur, HARTLEY ou COLPITTS par exemple.

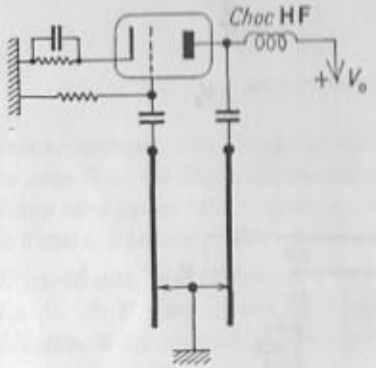


FIG. 3-24.

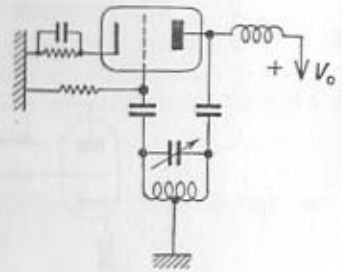


FIG. 3-25.

La figure 3-24 montre un tel montage au moyen d'un court-circuit mobile, la figure 3-25 montre le montage équivalent.

On obtient ainsi des fréquences pouvant atteindre 200 Mc, les capacités internes C_{gK} et C_{gp} intervenant utilement dans le circuit oscillant, dans le cas du montage COLPITTS.

3-15. **Stubs.** — Un *stub* ou « épingle » est un élément de ligne, formé de deux fils parallèles, ouverte ou en court-circuit à l'extrémité, que l'on place en dérivation sur une ligne et perpendiculairement à celle-ci (fig. 3-26).

Il peut être muni d'un pont métallique formant court-circuit, que l'on peut déplacer le long du stub, ou bien fixe.

Un stub, suivant sa longueur et selon qu'il est ouvert ou fermé, a plusieurs utilisations ; on en a déjà vu deux sur les figures 1-6 et 1-7. Il sert aussi — puisque son impédance d'entrée peut être positive ou négative, nulle ou infinie, et varier dans de grandes proportions — à modifier l'impédance d'une ligne en un point quelconque et à faciliter l'adaptation d'un circuit à un autre.

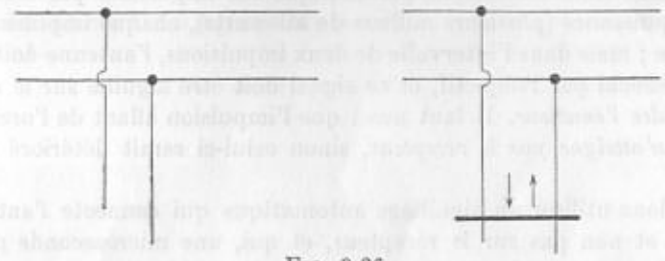


FIG. 3-26.

— Les propriétés d'un stub résultent de tous les calculs précédents sur l'impédance d'entrée d'une ligne ouverte ou en court-circuit. De plus :

1° Un stub fermé peut être remplacé par un stub ouvert de $\lambda/4$ plus long ou de $\lambda/4$ plus court.

2° Un stub ouvert peut être remplacé par un stub fermé de $\lambda/4$ plus long ou de $\lambda/4$ plus court.

Un stub en court-circuit mis en dérivation entre les deux fils d'une ligne supprime les ondes stationnaires vers le bout libre de la ligne, s'il est connecté en un endroit convenable et que sa longueur soit bien ajustée : tout se passe alors comme si, au point de jonction, l'impédance équivalente du stub en parallèle sur le morceau de ligne (allant vers la charge) était égale à Z_c.

La figure 3-27 montre quelques propriétés des stubs.

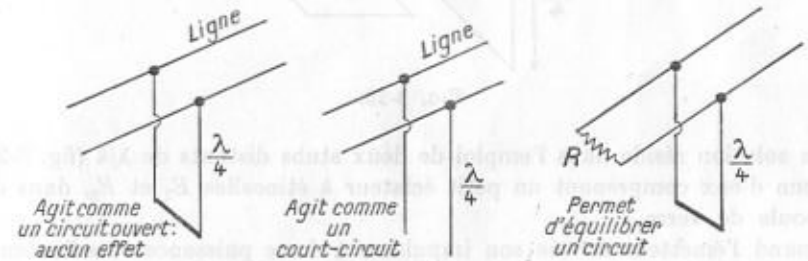


FIG. 3-27.

Quelquefois on utilise un double stub, formé de deux stubs placés en deux endroits bien choisis et *fixes*, et l'on ajuste alors la longueur de chaque stub ; un seul stub mobile est souvent irréalisable, comme dans les lignes coaxiales. Ces deux stubs sont distants de $\lambda/4$ ou de $3\lambda/8$, chacun d'eux ayant un court-circuit mobile.

Nous ferons plus loin des calculs numériques sur les lignes et sur les stubs, au moyen de l'abaque de SMITH.

3-16. **Une application intéressante des doubles stubs.** — Dans les radars où la même antenne est utilisée à l'émission et à la réception, voici le problème qui se pose : l'émetteur envoie, par exemple 600 impulsions par seconde et à très forte puissance (plusieurs milliers de kilowatts), chaque impulsion durant 1 μ seconde ; mais dans l'intervalle de deux impulsions, l'antenne doit recevoir le signal réfléchi par l'objectif, et ce signal doit être aiguillé sur le récepteur *sans atteindre l'émetteur*. Il faut aussi que l'impulsion allant de l'oscillateur à l'antenne *n'atteigne pas le récepteur*, sinon celui-ci serait détérioré et même détruit.

Il faut donc utiliser un aiguillage automatique qui connecte l'antenne sur l'émetteur et non pas sur le récepteur, et qui, une microseconde plus tard, connecte l'antenne sur le récepteur, et non pas sur l'émetteur ; et ceci 600 ou 1 000 fois par seconde !

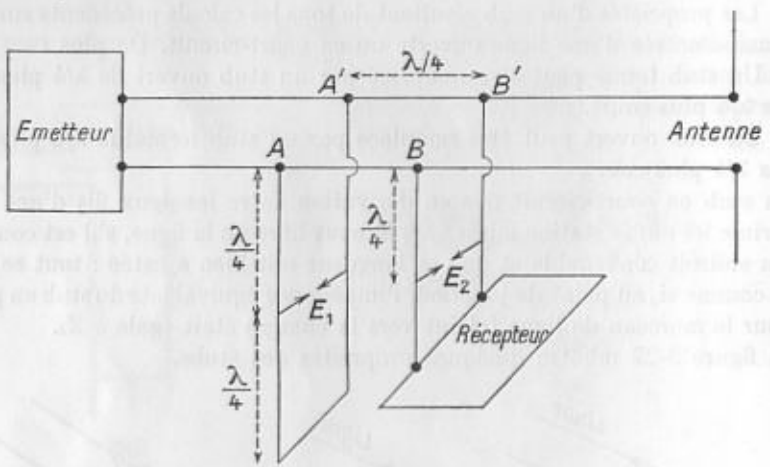


FIG. 3-28.

La solution réside dans l'emploi de deux stubs distants de λ/4 (fig. 3-28), chacun d'eux comprenant un petit éclateur à étincelles E_1 et E_2, dans une ampoule de verre.

Quand l'émetteur envoie son impulsion à forte puissance vers l'antenne, l'énergie est suffisante pour que l'étincelle éclate, ce qui équivaut à un court-circuit. L'éclateur E_2 protège le récepteur et, grâce à son court-circuit, produit en BB' une impédance infinie, ce qui empêche l'impulsion d'atteindre le récepteur. Il faut, bien entendu, que la ligne soit adaptée à l'antenne pour que celle-ci rayonne le maximum de puissance.

Lorsque l'impulsion est partie, le récepteur est alors en état de recevoir le signal réfléchi par l'obstacle et capté par l'antenne, parce que la puissance

de ce signal est trop petite pour faire éclater une étincelle en E_1 et E_2, qui forment circuit ouvert. Dans ce cas, l'impédance à l'entrée du stub en AA' est nulle (AA' est à λ/2 d'un court-circuit), il y a donc comme un court-circuit en AA'. Mais l'impédance à gauche de BB' est infinie puisque la portion de ligne $B'A'BA$ vaut λ/4 : c'est pour cela que le signal venant de l'antenne est aiguillé sur le récepteur et non pas sur l'émetteur ; et ceci automatiquement.

Il faut évidemment des lignes sans pertes.

CHAPITRE IV

TAUX D'ONDES STATIONNAIRES ET COEFFICIENT DE RÉFLEXION

(Ligne sans pertes)

4-1. **Le taux d'ondes stationnaires.** — Supposons d'abord que la ligne soit terminée sur une résistance R_r quelconque.

Les équations 1-7 donnent :

$$V = V_r \cos \beta x + j Z_c \frac{V_r}{R_r} \sin \beta x$$

$$= V_r \left(\cos \beta x + j \frac{Z_c}{R_r} \sin \beta x\right), \qquad (4\text{-}1)$$

dont le module est :

$$V = V_r \sqrt{\cos^2 \beta x + (Z_c/R_r)^2 \sin^2 \beta x}.$$

Posons

$$\boxed{\frac{Z_c}{R_r} = S} \quad \text{(avec } R_r < Z_c\text{)},$$

ce qui donne :

$$V = V_r \sqrt{1 + (S^2 - 1) \sin^2 \beta x}. \qquad (4\text{-}2)$$

Si $S > 1$, V sera maximum lorsque $\sin \beta x = 1$, et minimum si $\sin \beta x = 0$; l'équation 4-2 peut alors s'écrire :

$$V_{max} = V_r \frac{Z_c}{R_r} = S V_r$$

et

$$V_{min} = V_r,$$

d'où la formule fondamentale :

$$\boxed{\frac{V_{max.}}{V_{min.}} = S = \frac{Z_c}{R_r}}. \qquad (S > 1) \qquad (4\text{-}3)$$

Si $R_r > Z_c$, on prend :

$$S = R_r/Z_c.$$

Cette valeur S s'appelle *le rapport ou le taux d'ondes stationnaires* (ou T. O. S.). Nulle part V ou I ne seront nuls et la puissance fournie à la charge est :

$$P = V_r^2/R_r.$$

L'équation 4-2 donne (à la source) pour $x = l$:

$$V_0 = V_r \sqrt{1 + (S^2 - 1) \sin^2 \beta l},$$

d'où

$$P = \frac{V_0^2}{R_r[1 + (S^2 - 1) \sin^2 \beta l]}. \qquad (4\text{-}4)$$

La puissance sera donc maximum si le dénominateur est minimum, c'est-à-dire si $S = 1$. *Dans ce cas il n'y a pas d'ondes stationnaires : il y a adaptation parfaite et :*

$$Z_c = R_r.$$

Cette conclusion est ainsi de la plus haute importance pour la transmission de puissance en HF par une ligne.

— Nous calculerons plus loin au § 4-6, le coefficient de réflexion, en précisant les valeurs des amplitudes des ondes directe et réfléchie.

4-2. **Valeur de S dans différents cas.**

1° *La ligne est terminée sur Z_c*, on a :

$$S = \frac{Z_c}{Z_c} = 1.$$

2° *La ligne est en court-circuit*, $R_r = 0$, on a, puisque $R_r < Z_c$:

$$S = \frac{Z_c}{0} = \infty.$$

3° *La ligne est ouverte*, $R_r = \infty$, et puisque $R_r > Z_c$, on a :

$$S = \frac{R_r}{Z_c} = \infty.$$

4° *Cas particulier. La ligne est terminée sur une résistance R_r.*
On aura, par exemple, si $R_r = 3Z_c$:

$$S = \frac{R_r}{Z_c} = 3,$$

de même, si $R_r = Z_c/3$, on aura :

$$S = \frac{Z_c}{R_r} = 3.$$

La figure 4-1 donne, suivant ces cinq cas, la répartition du potentiel le long de la ligne.

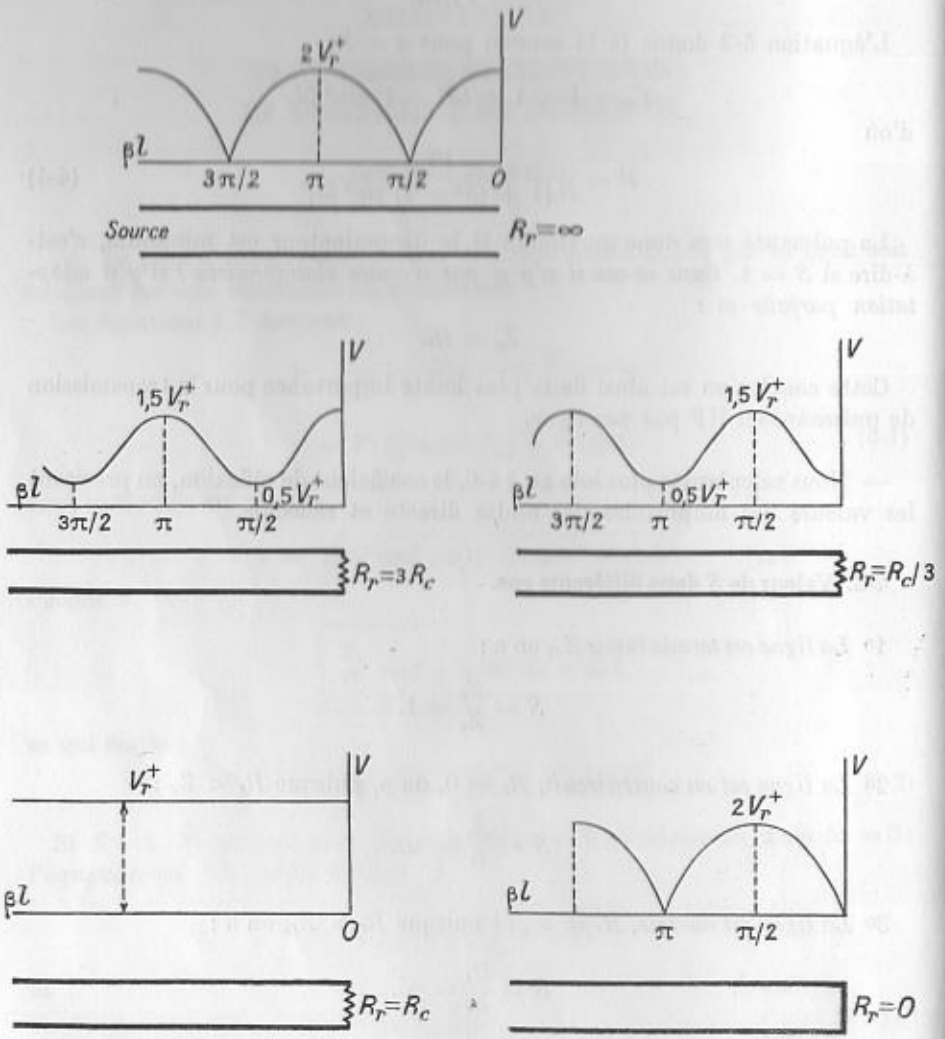


FIG. 4-1.

— *En résumé*, on voit que si le récepteur est une résistance pure variant de 0 à l'infini, le diagramme des ondes stationnaires varie progressivement depuis la forme qu'il a dans le cas du court-circuit jusqu'à celle qu'il a pour la ligne

ouverte ; et au moment où $R_r = Z_c$ *il n'y a plus d'ondes stationnaires*, mais plus R_r est différente de Z_c et plus l'ondulation des ondes stationnaires est accentuée.

La valeur de S varie ainsi de 1 à l'infini.

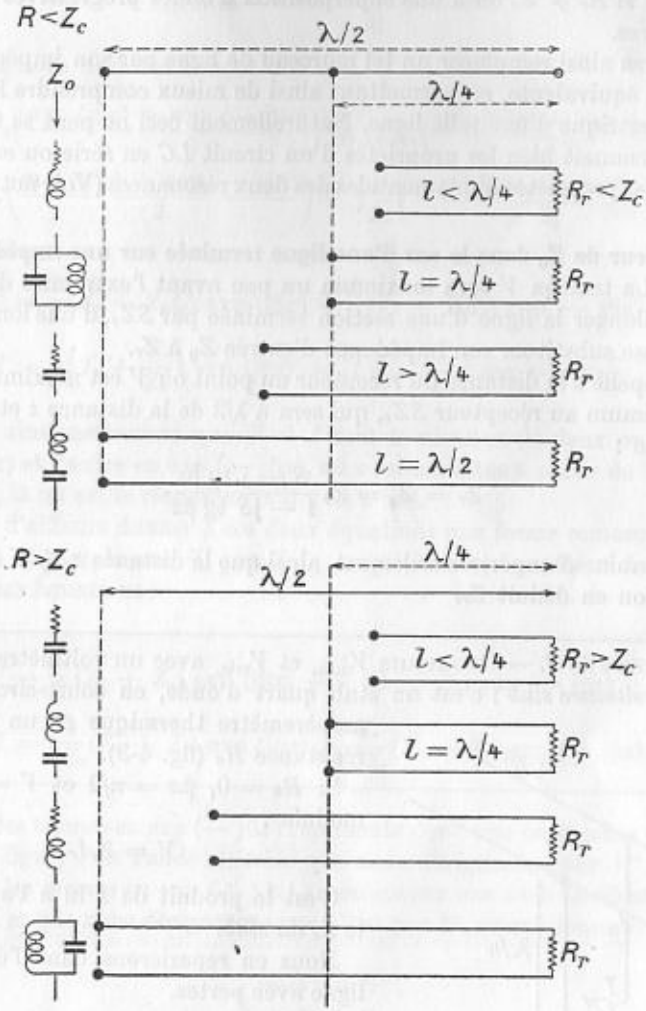


FIG. 4-2.

4-3. **Nature physique d'une ligne terminée sur une résistance.** — Soit R_r la résistance de la charge. Il est intéressant de connaître la nature physique d'une telle ligne suivant sa longueur, c'est-à-dire son impédance équivalente vue de l'entrée de la ligne.

La figure 4-2, que nous empruntons à l'excellent livre *Les antennes* de BRAULT

et PIAT, est très bien faite et répond parfaitement au but cherché. La nature de cette impédance d'entrée est analogue à celle de la ligne en court-circuit si $R_r < Z_c$, tandis qu'elle est analogue à celle de la ligne ouverte si $R_r > Z_c$. Naturellement si $R_r = Z_c$, on a $Z_0 = Z_c$ et l'on a des ondes progressives ; tandis que si $R_r \neq Z_c$ on a une superposition d'ondes progressives et d'ondes stationnaires.

On pourra ainsi remplacer un tel morceau de ligne par son impédance physiquement équivalente, en permettant ainsi de mieux comprendre le fonctionnement électrique d'une telle ligne. Naturellement ceci ne peut se faire que si le lecteur connaît bien les propriétés d'un circuit LC en série ou en parallèle, ainsi que les propriétés fondamentales des deux résonances (Voir notre Tome I).

4-4. **Valeur de Z_0 dans le cas d'une ligne terminée sur une impédance complexe.** — La tension V sera maximum un peu avant l'extrémité de la ligne ; on peut allonger la ligne d'une section terminée par SZ_c, d'une longueur telle qu'on puisse substituer son impédance d'entrée Z_0 à Z_r.

Si on appelle z la distance du récepteur au point où V est maximum, V sera alors maximum au récepteur SZ_c, qui sera à $\lambda/2$ de la distance z et l'équation 1-15 donne :

$$Z_r = Z_0' = Z_c \frac{S - \mathrm{j}\ \mathrm{tg}\ \beta z}{1 - \mathrm{j}S\ \mathrm{tg}\ \beta z}.$$

On détermine S expérimentalement, ainsi que la distance z où V était maximum et l'on en déduit Z_r.

4-5. **Mesure de S.** — On mesure $V_{max.}$ et $V_{min.}$ avec un voltmètre, de préférence un *voltmètre stub* : c'est un stub quart d'onde, en court-circuit sur un ampèremètre thermique ou un couple, de résistance R_a (fig. 4-3).

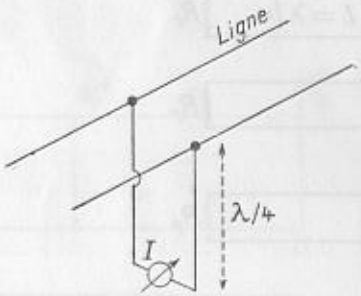


FIG. 4-3.

Si $R_a = 0$, $\beta x = \pi/2$ et $V = \mathrm{j}I_r Z_c$, de module :

$$V = Z_c I_r.$$

C'est le produit de I lu à l'appareil par le Z_c *du stub*.

Nous en reparlerons dans l'étude de la ligne avec pertes.

4-6. **Le coefficient de réflexion.** — Partons des équations 1-7, et remplaçons cos βx et sin βx par les formules d'Euler, c'est-à-dire en fonction de exp (jβx) et de exp (— jβx). La démonstration de ces deux formules est donnée dans le Tome II, de notre *Cours Elémentaire de Mathématiques Supérieures* (Éditeur Dunod).

On a en effet :

$$\cos x = \frac{\exp(\mathrm{j}x) + \exp(-\mathrm{j}x)}{2}$$

$$\sin x = \frac{\exp(\mathrm{j}x) - \exp(-\mathrm{j}x)}{2\mathrm{j}}. \qquad (\mathrm{j} = \sqrt{-1})$$

Les équations 1-7 deviennent :

$$V = V_r\left(\frac{\exp(\mathrm{j}\beta x) + \exp(-\mathrm{j}\beta x)}{2}\right) + \mathrm{j}Z_c I_r\left(\frac{\exp(\mathrm{j}\beta x) - \exp(-\mathrm{j}\beta x)}{2\mathrm{j}}\right)$$

$$I = I_r\left(\frac{\exp(\mathrm{j}\beta x) + \exp(-\mathrm{j}\beta x)}{2}\right) + \mathrm{j}\frac{V_r}{Z_c}\left(\frac{\exp(\mathrm{j}\beta x) - \exp(-\mathrm{j}\beta x)}{2\mathrm{j}}\right)$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}(V_r + Z_c I_r)\exp(\mathrm{j}\beta x) + \frac{1}{2}(V_r - Z_c I_r)\exp(-\mathrm{j}\beta x) \\ I &= \frac{1}{2}\left(I_r + \frac{V_r}{Z_c}\right)\exp(\mathrm{j}\beta x) + \frac{1}{2}\left(I_r - \frac{V_r}{Z_c}\right)\exp(-\mathrm{j}\beta x) \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}5)$$

On voit ainsi nettement que V et I sont le résultat de deux ondes : l'une en exp (jβx) et l'autre en exp (— jβx), où x est comptée à partir de l'extrémité de la ligne, là où est le récepteur (s'il y en a un).

On peut d'ailleurs donner à ces deux équations une forme remarquable plus symétrique en remplaçant V_r par $Z_r I_r$, ce qui donne en mettant I_r en facteur dans ces deux équations :

$$\boxed{\begin{aligned} V &= \frac{I_r}{2}(Z_r + Z_c)\exp(\mathrm{j}\beta x) + \frac{I_r}{2}(Z_r - Z_c)\exp(-\mathrm{j}\beta x) \\ I &= \frac{I_r}{2Z_c}(Z_c + Z_r)\exp(\mathrm{j}\beta x) + \frac{I_r}{2Z_c}(Z_c - Z_r)\exp(-\mathrm{j}\beta x) \end{aligned}} \qquad (4\text{-}6)$$

Chacun des termes en exp (— jβx) représente donc une onde issue de l'extrémité de la ligne, *c'est l'onde réfléchie* que nous désignerons par V^- et par I^-, tandis que les termes en exp (+ jβx) représentent *une onde incidente* issue du générateur, et que nous désignerons par V^+ et par I^+, ce qui donne symboliquement :

$$V = V^+ + V^-,$$
$$I = I^+ + I^-.$$

On remarque, en passant, que :

$$I^- = \frac{V^-}{Z_c} \quad \text{et} \quad I^+ = \frac{V^+}{Z_c},$$

et l'on voit dès maintenant l'influence de Z_r et surtout de Z_c sur la valeur de ces deux ondes.

D'ailleurs tout ceci est bien conforme à la théorie générale des interférences qui exige, pour produire des nœuds et des ventres, qu'il y ait bien deux ondes, qui tantôt s'additionnent pour donner des ventres, et qui tantôt se retranchent pour donner des nœuds, *tout comme en acoustique et en optique.*

— Une donnée très importante dans tous ces phénomènes est justement de savoir quelle est la proportion d'onde réfléchie (de V et de I) que l'on a sur la ligne par rapport à l'amplitude de l'onde incidente (de V et de I).

C'est pourquoi on appelle *coefficient de réflexion* ρ le rapport de l'amplitude de l'onde réfléchie à l'amplitude de l'onde incidente, c'est en général une expression imaginaire :

$$\rho = \frac{V^-}{V^+} \quad \text{ou} \quad \frac{I^-}{I^+}.$$

On aura ainsi, après simplification par $I_r/2$:

$$\frac{V^-}{V^+} = \frac{(Z_r - Z_c)\exp(-j\beta x)}{(Z_r + Z_c)\exp(j\beta x)} = \frac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c}\exp(-2j\beta x)$$

et

$$\frac{I^-}{I^+} = \frac{(Z_c - Z_r)\exp(-j\beta x)}{(Z_c + Z_r)\exp(j\beta x)} = \frac{Z_c - Z_r}{Z_c + Z_r}\exp(-2j\beta x) = -\frac{V^-}{V^+}.$$

A l'extrémité de la ligne où $x = 0$, c'est-à-dire au récepteur, il reste, en partant de V^-/V^+ :

$$\boxed{\rho_r = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c}}, \tag{4-7}$$

pour les courants I^-/I^+ c'est donc la même valeur, mais changée de signe.

A la distance x de l'extrémité de la ligne on aurait :

$$\rho = \rho_r \exp(j\varphi).$$

Cas particuliers. — Pour $x = 0$, on aurait pour le potentiel :

$Z_r = \infty$, ligne ouverte : $\rho = +1$;
$Z_r = 0$, ligne en court-circuit : $\rho = -1$;
$Z_r = Z_c$, ligne fermée sur Z_c : $\rho = 0$, *pas de réflexion* ;
$Z_r = jX$, ligne fermée sur réactance : $\rho = 1$.

4-7. Relation entre le taux d'ondes stationnaires et le coefficient de réflexion. — On a :

$$S = \frac{V_{max.}}{V_{min.}} \quad \text{ou} \quad \frac{I_{max.}}{I_{min.}},$$

or

$$V_{max} = V^+ + V^- = V^+(1 + \rho),$$
$$V_{min} = V^+ - V^- = V^+(1 - \rho),$$

d'où

$$\boxed{S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}} \tag{4-8}$$

qui varie de 1 à l'infini. On en tire aussi :

$$\rho = \frac{S - 1}{S + 1}, \tag{4-9}$$

qui varie de 0 à 1.

Remarque. Ne pas oublier que, pour une ligne sans pertes terminée sur une résistance R_r, on a :

$$S = \frac{R_r}{Z_c} \quad \text{ou} \quad \frac{Z_c}{R_r}$$

suivant que R_r est plus grande ou plus petite que Z_c, qui, d'ailleurs, est ohmique pure.

4-8. Coefficient de réflexion dans le cas d'une ligne terminée sur une résistance R_r. — L'onde incidente est réfléchie d'une façon qui dépend de la charge R_r en bout de ligne ainsi que de l'impédance caractéristique, qui est ohmique pour une ligne sans pertes :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_c.$$

On aura ainsi, pour le coefficient de réflexion à l'extrémité de la ligne :

$$\rho = \frac{V^-}{V^+} = \frac{R_r - R_c}{R_r + R_c},$$

donc :

si $R_r > R_c$, l'onde réfléchie est en phase avec l'onde incidente, et $\rho > 0$,
si $R_r < R_c$, l'onde réfléchie est en opposition de phase avec l'onde incidente, et $\rho < 0$.

Exemple. — Soit $R_r = 3R_c$. On a :

$$\rho = \frac{3R_c - R_c}{3R_c + R_c} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$V_{total} = V_r^+ + V_r^- = V_r^+ + 0{,}5\,V_r^+ = 1{,}5\,V_r^+.$$

Les courants seront

$$I_r^+ = \frac{V_r^+}{R_c} \quad \text{et} \quad I_r^- = -\frac{V_r^-}{R_c} = -\rho\frac{V_r^+}{R_c},$$

d'où, dans R_r :

$$I_{total} = I_r^+ + I_r^- = 0{,}5\,\frac{V_r^+}{R_c}, \qquad \left(\frac{V_r}{I_r} = 3R_c\right)$$

et la figure 4-4 donne les répartitions de V et de I.

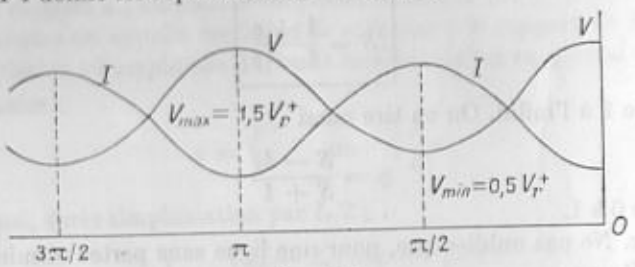


FIG. 4-4.

Valeurs de ρ dans les cinq cas de la figure 4-1. — Pour préciser, prenons les cinq cas de la figure 4-1 :

fig. *a*	$R_r = \infty$,	d'où	$\rho = 1$	et	$S = \infty$,
fig. *b*	$R_r = 3R_c$,	d'où	$\rho = 0{,}5$	et	$S = 3$,
fig. *c*	$R_r = R_c$,	d'où	$\rho = 0$,	et	$S = 1$,
fig. *d*	$R_r = \frac{R_c}{3}$,	d'ou	$\rho = -0{,}5$	et	$S = 3$,
fig. *e*	$R_r = 0$,	d'où	$\rho = -1$	et	$S = \infty$.

4-9. **Cas d'une ligne terminée sur une impédance complexe $Z_r = R_r + jX_r$.** — Il y a trois cas à envisager :

1° *Z_r est une réactance pure.*

L'onde réfléchie (de V ou de I) a la même amplitude que l'onde incidente : il y a réflexion totale, et la puissance dépensée dans Z_r est nulle.

2° *Z_r est une résistance pure.*

Il y a de la puissance absorbée, l'onde réfléchie a une amplitude inférieure à celle de l'onde incidente, et, à l'extrémité de la ligne, elle est en phase ou en opposition avec l'onde incidente (suivant que $R_r \gtrless R_c$).

3° *Z_r est de la forme $R_r + jX_r$.*

L'onde réfléchie peut avoir une amplitude quelconque (plus petite que l'onde incidente) et une phase quelconque, tout dépend de la valeur de ρ :

$$\rho = \frac{V_r^-}{V_r^+}.$$

— *Exemple.* — *Soit une ligne où* $\rho = 0{,}5 \exp(60\,j)$ et $Z_c = 50\ \Omega$.

— On aura :

$$\begin{aligned} V_r &= V_r^+ + V_r^- = V_r^+ + 0{,}5V_r^+ \exp(60j) \\ &= V_r^+(1 - 0{,}5\cos 60^\circ + j\cdot 0{,}5 \sin 60^\circ) \\ &= 1{,}32V_r^+ \exp(19j). \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} I_r &= I_r^+ - I_r^- = I_r^+ - 0{,}5I_r^+ \exp(60j) \\ &= \frac{V_r^+}{Z_c}(1 - 0{,}5\cos 60^\circ - j\cdot 0{,}5 \sin 60^\circ) \\ &= 0{,}866\,\frac{V_r^+}{Z_c} \exp(-30j), \end{aligned}$$

et l'impédance Z_r qui produira un tel coefficient de réflexion est :

$$\begin{aligned} Z_r = \frac{V_r}{I_r} &= \frac{1{,}32}{0{,}866} Z_c \exp[j(19 + 30)] \\ &= 1{,}53\ Z_c \exp(49j) \\ &= 1{,}53 \cdot 50 \exp(49j) = 50 + j57{,}8. \end{aligned}$$

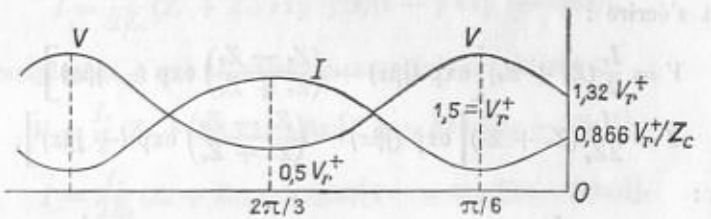


FIG. 4-5.

On aura le diagramme de la figure 4-4 comme celui de la figure 4-5. Il suffit de partir de la courbe de la figure 4-4 où $Z_r = R_r$, et de décaler les courbes, car ρ est le même.

Conclusion. — La forme du diagramme des ondes stationnaires et les amplitudes dépendent de ρ, tandis que la position des courbes le long de la ligne dépend uniquement de l'angle de ρ.

En effet, on a :

$$\frac{V^-}{V^+} = \frac{V_r^- \exp(-j\beta x)}{V_r^+ \exp(+j\beta x)} = \rho \exp(-2j\beta x),$$

or, ρ peut s'écrire :

$$\bar{\rho} = \rho_r \exp(j\varphi)$$

d'où

$$\frac{V^-}{V^+} = \rho_r \exp(j\varphi)\cdot\exp(-2j\beta x) = \rho_r \exp[j(\varphi - 2\beta x)]$$

ou

$$\frac{V^-}{V^+} = \rho_r \exp(j\theta). \tag{4-10}$$

On voit ainsi qu'un changement de φ revient à changer la valeur de x, ce qui revient à décaler le diagramme des ondes stationnaires le long de la ligne.

V^- et V^+ sont en phase si $\varphi - 2\beta x = 0$, soit

$$\beta x = \varphi/2$$

valeur comptée depuis le récepteur.

En ces points, et à des distances $\lambda/2$, on a un ventre maximum de potentiel.

La valeur de l'amplitude de ρ agit sur l'amplitude des ondes stationnaires, et puisque l'amplitude des courbes est indépendante de l'angle θ, la formule

$$S = \frac{1+\rho}{1-\rho}$$

est valable pour n'importe quelle valeur de Z_r.

4-10. **Calcul de la tension V, du courant I, et de l'impédance d'entrée Z_0 d'une ligne, en fonction du coefficient de réflexion ρ.** — Les équations (4-6) peuvent s'écrire :

$$V = \frac{I_r}{2}(Z_r + Z_c)\left[\exp(j\beta x) + \left(\frac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c}\right)\exp(-j\beta x)\right]$$
$$I = \frac{I_r}{2Z_c}(Z_r + Z_c)\left[\exp(j\beta x) - \left(\frac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c}\right)\exp(-j\beta x)\right],$$

ou bien :

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{I_r}{2}(Z_r + Z_c)[\exp(j\beta x) + \rho\exp(-j\beta x)] \\ I &= \frac{I_r}{2Z_c}(Z_r + Z_c)[\exp(j\beta x) - \rho\exp(-j\beta x)] \end{aligned}\right\} \tag{4-11}$$

qui donnent V et I en fonction de ρ, x, β, I_r, Z_c et Z_r.

En les divisant membre à membre on obtient l'impédance d'entrée Z_0 de la ligne, en faisant $x = l$, c'est-à-dire à la source :

$$\boxed{\begin{aligned} Z_0 &= \frac{V_0}{I_0} \\ Z_0 &= Z_c\left[\frac{\exp(j\beta l) + \rho\exp(-j\beta l)}{\exp(j\beta l) - \rho\exp(-j\beta l)}\right] \end{aligned}} \tag{4-12}$$

formule que l'on peut écrire, en utilisant la notation simplifiée des imaginaires, et où ρ est le nombre imaginaire $\bar{\rho} = \rho_r \exp(j\varphi)$:

$$Z_0 = Z_c\left[\frac{1\angle\beta l + \rho_r\angle\varphi - \beta l}{1\angle\beta l - \rho_r\angle\varphi - \beta l}\right],$$

ou encore, en divisant haut et bas par $\exp(j\beta l)$:

$$Z_0 = Z_c\left[\frac{1 + \rho_r\angle\varphi - 2\beta l}{1 - \rho_r\angle\varphi - 2\beta l}\right]. \tag{4-13}$$

4-11. **Amplitudes des ventres et des nœuds de potentiel et de courant.** — Les ventres de potentiel ont lieu aux endroits où l'onde incidente et l'onde réfléchie sont en phase et s'ajoutent arithmétiquement, tandis qu'aux nœuds elles se retranchent.

D'après les équations (4-11) établies plus haut, et que nous récrivons, on a :

$$V = \frac{I_r}{2}(Z_r + Z_c)[\exp(j\beta x) + \rho\exp(-j\beta x)]$$

et :

$$I = \frac{I_r}{2Z_c}(Z_r + Z_c)[\exp(j\beta x) - \rho\exp(-j\beta x)],$$

ou encore

$$V = \frac{I_r}{2}(Z_r + Z_c)\exp(j\beta x)[1 + \rho\exp(-2j\beta x)]$$
$$I = \frac{I_r}{2Z_c}(Z_r + Z_c)\exp(j\beta x)[1 - \rho\exp(-2j\beta x)].$$

Si nous remplaçons ρ par sa valeur $\rho_r \exp(j\varphi)$, on obtient :

$$V = \frac{I_r}{2}(Z_r + Z_c)\exp(j\beta x)[1 + \rho_r\exp[j(\varphi - 2\beta x)]]$$
$$I = \frac{I_r}{2Z_c}(Z_r + Z_c)\exp(j\beta x)[1 - \rho_r\exp[j(\varphi - 2\beta x)]].$$

Mais, quand V est maximum à un ventre, on a :

$$\varphi = 2\beta x,$$

ce qui donne

$$V_{max.} = \frac{I_r}{2}(Z_r + Z_c)[\exp(j\beta x)](1 + \rho_r)$$

et

$$I_{min.} = \frac{I_r}{2Z_c}(Z_r + Z_c)[\exp(j\beta x)](1 - \rho_r),$$

d'où

$$\boxed{\frac{V_{max.}}{I_{min.}} = Z_{max.} = Z_c\frac{1+\rho_r}{1-\rho_r} = SZ_c}. \tag{4-14}$$

Comme, d'autre part, on a :

$$S = \frac{1+\rho_r}{1-\rho_r},$$

on en déduit

$$\rho_r = \frac{S-1}{S+1} = \frac{(V_{max.}/V_{min.}-1)}{(V_{max.}/V_{min.}+1)},$$

ou enfin, la formule fondamentale :

$$\boxed{\rho_r = \frac{V_{max.}-V_{min.}}{V_{max.}+V_{min.}}}. \qquad (4\text{-}15)$$

Ainsi, si l'on peut mesurer expérimentalement $V_{max.}$ et $V_{min.}$, on pourra calculer S et ρ_r.

Les mêmes calculs donneraient :

$$V_{min.} = \frac{I_r}{2}(Z_r + Z_c)(1-\rho_r)\exp(j\beta x)$$

et

$$I_{max.} = \frac{I_r}{2Z_c}(Z_r + Z_c)(1+\rho_r)\exp(j\beta x)$$

d'où

$$\boxed{\frac{V_{min.}}{I_{max.}} = Z_{min.} = Z_c\left(\frac{1-\rho_r}{1+\rho_r}\right) = \frac{Z_c}{S}}. \qquad (4\text{-}16)$$

Ces deux expressions permettent de mesurer facilement Z_c.

— Aux ventres de potentiel on a un nœud de courant et inversement, $V_{max.}$ et $I_{min.}$ sont en phase, ainsi que $V_{min.}$ et $I_{max.}$, donc en ces points (nœuds et ventres) l'impédance est ohmique et égale à SZ_c ou bien Z_c/S (où Z_c est ohmique).

4-12. **Calcul de la puissance.** — La puissance passant à un ventre de potentiel est :

$$P = \frac{V_{max.}^2}{Z_{max.}} = \frac{V_{max.}^2}{SZ_c},$$

de même, à un nœud de potentiel :

$$P = \frac{V_{min.}^2}{Z_{min.}} = \frac{V_{min.}^2 \cdot S}{Z_c},$$

or ces deux puissances sont égales, la ligne étant sans pertes, d'où :

$$P^2 = \frac{V_{max.}^2 \cdot V_{min.}^2}{Z_{max.} \cdot Z_{min.}} = \frac{V_{max.}^2 \cdot V_{min.}^2}{SZ_c \cdot Z_c/S}$$

et enfin

$$\boxed{P = \frac{V_{max.} \cdot V_{min.}}{Z_c}}, \qquad (4\text{-}17)$$

ou encore

$$P = \frac{(V^+ + V^-)(V^+ - V^-)}{Z_c} = \frac{(V^+)^2}{Z_c} - \frac{(V^-)^2}{Z_c},$$

le premier terme est la puissance transportée par l'onde incidente, et le deuxième terme la puissance transportée par l'onde réfléchie ; mais cette séparation de P en deux termes ne peut se faire que si Z_c est ohmique, c'est-à-dire dans le cas d'une ligne sans pertes.

On aurait aussi :

$$P = I_{max.} \cdot I_{min.} \cdot Z_c.$$

Ces équations permettent ainsi de mesurer la puissance, celle-ci étant transportée par la ligne dans le récepteur, si celui-ci en absorbe, c'est-à-dire s'il a une composante ohmique.

Pratiquement, on repère les nœuds de potentiel, car un minimum est très précis à repérer, tandis qu'un maximum est flou en général.

4-13. **Exemples.**

Premier exemple. — Soit une ligne transportant une puissance de 100 *watts, avec* $Z_c = 100 + 0j$ *et un récepteur capacitif* $Z_r = 200 - 100j$, *avec* $S = 2$. *Calculer* $V_{max.}$, $V_{min.}$, $I_{max.}$, $I_{min.}$, I_r *et* V_r, *la ligne étant sans pertes.*

— On a

$$P = \frac{V_{max.}^2}{SZ_c},$$

d'où

$$V_{max.}^2 = PSZ_c = 100 \cdot 2 \cdot 100 = 2 \cdot 10^4,$$

et

$$V_{max.} \approx 142 \text{ volts.}$$

Le T. O. S. a pour valeur :

$$S = \frac{V_{max.}}{V_{min.}},$$

d'où

$$V_{min.} = \frac{V_{max}}{S} = \frac{142}{2} = 71 \text{ volts.}$$

D'autre part, on a :

$$I_{max.} = \frac{V_{max.}}{Z_c} = \frac{142}{100} = 1{,}42 \text{ A}$$

et

$$I_{min.} = \frac{V_{min.}}{Z_c} = \frac{71}{100} = 0{,}71 \text{ A}.$$

Comme la ligne est sans pertes on a encore 100 watts dans le récepteur Z_r ($Z_r = R_r + jX = 200 - 100j$), on aura donc :

$$P = R_r I_r^2,$$

d'où

$$I_r^2 = \frac{P}{R_r} = \frac{100}{200} = 0{,}5$$

et

$$I_r \approx 0{,}71 \text{ A}.$$

Enfin, la D. D. P. V_r aux bornes du récepteur est, en prenant le module de Z_r :

$$\begin{aligned} V_r &= I_r \cdot Z_r \\ &= 0{,}71\sqrt{200^2 + 100^2} \\ &= 159 \text{ volts}. \end{aligned}$$

Connaissant ainsi les valeurs des ventres et des nœuds de V et de I, ainsi que la valeur de V_r on peut tracer le diagramme des ondes stationnaires de V et de I en partant du récepteur, puisque à cet endroit on a 159 volts et 0,71 ampère. On en déduirait graphiquement les endroits où se produisent les nœuds et les ventres.

Deuxième exemple. — On place à l'extrémité d'une ligne bifilaire, ayant $Z_c = 500\ \Omega$, une charge inconnue. En effectuant le relevé du courant le long de la ligne, on trouve, après corrections, les valeurs suivantes : 200 µA *aux maxima et* 40 µA *aux minima. Cette charge devant être adaptée à la ligne, on utilise un transformateur quart d'onde formé de* 2 *tiges de* 5 *mm de diamètre. On alimente la ligne sans pertes par un générateur qui fournit* 1 kW.

Calculer :

1° *La distance d'axe en axe des tiges de la ligne quart d'onde.*

2° *Le courant et la* D. D. P. *: à la charge, à l'entrée de la ligne quart d'onde, et à l'entrée de la ligne.*

— *Distance des tiges.*

Le taux d'ondes stationnaires est

$$S = \frac{I_{\max.}}{I_{\min.}} = \frac{200}{40} = 5.$$

Z_r se trouve à un ventre de courant, or on sait qu'à cet endroit on a :

$$\begin{aligned} Z_r &= \frac{Z_c}{S} = \frac{500}{5} \\ &= 100\ \Omega. \end{aligned}$$

On en déduit la valeur de Z de la ligne quart d'onde :

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{Z_r Z_c} = \sqrt{100 \cdot 500} \\ &= 224\ \Omega. \end{aligned}$$

Sachant que

$$Z = 276 \lg \frac{2D}{d},$$

on a

$$\lg \frac{2D}{d} = \frac{224}{276} = 0{,}81$$

et $2D/d = 6{,}45$, d'où

$$\begin{aligned} 2D &= 6{,}45\, d = 6{,}45 \cdot 5 \\ &= 32{,}2 \text{ mm} \end{aligned}$$

et

$$D = 16{,}1 \text{ mm}.$$

Courant et tension.

1° *à l'entrée de la ligne :*

$$P = Z_c I_0^2,$$

d'où

$$I_0^2 = \frac{P}{Z_c} = \frac{1\,000}{500} = 2$$

$$I_0 = \sqrt{2}\,\text{A}.$$

La tension V_0 est donnée par :

$$V_0 = \frac{P}{I_0} = \frac{1\,000}{1{,}41} = 710 \text{ volts}.$$

2° *à l'entrée de la ligne quart d'onde.*

Comme la ligne est adaptée et sans pertes, la tension est la même tout le long de la ligne, et on a :

$$I = 1{,}41 \text{ A} \qquad \text{et} \qquad V = 710 \text{ V}.$$

3° *à la charge :* on a encore 1 000 watts, d'où

$$I_r^2 = \frac{P}{Z_r} = \frac{1\,000}{100} = 10$$

et

$$I_r = 3{,}16 \text{ A}.$$

Enfin, la D.D.P. aux bornes de la charge est :

$$\begin{aligned} V_r &= Z_r I_r \\ &= 100 \cdot 3{,}16 = 316 \text{ volts}. \end{aligned}$$

Remarque. — Le coefficient de surtension Q d'une ligne, et le calcul de la tension en bout de ligne seront donnés à la fin de l'étude de la ligne avec pertes.

4-14. **Étude graphique des variations du potentiel et du courant le long de la ligne par le diagramme en manivelle.** — Supposons une ligne sans pertes, ou à très faibles pertes. Il s'agit de déterminer graphiquement le diagramme des ondes stationnaires le long de la ligne.

On utilise dans ce but *le diagramme vectoriel en manivelle* (fig. 4-6).

Partons d'une ligne horizontale OA représentant V_r^+, c'est-à-dire la tension incidente au récepteur. On calcule ensuite le coefficient de réflexion au récepteur :

$$\rho_r = \frac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c},$$

ce qui permet de calculer l'amplitude de l'onde réfléchie à l'extrémité de la ligne :

$$V_r^- = \rho_r V_r^+.$$

De A comme centre traçons une circonférence de rayon égal à cette quantité, le vecteur $AB = V_r^-$ représentera l'onde réfléchie, décalée en arrière sur V_r^+ d'un angle φ donné par $\rho = \rho_r \exp(j\varphi)$. La somme vectorielle de OA et AB donne le vecteur OB qui représente V_r résultant.

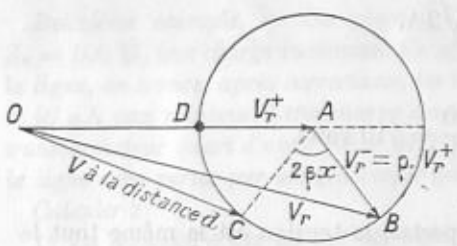


Fig. 4-6.

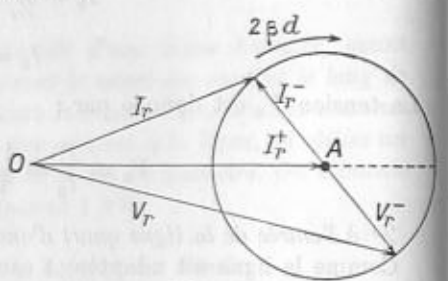


Fig. 4-7.

Pour trouver la tension V à la distance x du bout de la ligne, on fait tourner d'un angle $2\beta x$ le vecteur V_r^- dans le sens des aiguilles d'une montre, et la somme vectorielle OC donnera V à cet endroit. Comme Z_c est ohmique, I_r^+ est en phase avec V^+, mais I_r^- est en opposition de phase avec V_r^-, ce que représente la figure 4-7 analogue, pour les courants, à celle des tensions. On peut prendre naturellement I_r^+ et I_r^- égaux à V_r^+ et V_r^-, d'où l'impédance :

$$Z = \frac{\text{longueur de } V_r}{\text{longueur de } I_r} \cdot Z_c.$$

Si la distance x augmente, les vecteurs tournent comme une... manivelle et font un tour à chaque demi-onde.

La figure montre bien que, lorsque V est maximum, I est minimum, et inversement ; l'impédance de la ligne varie de la même façon périodiquement et elle est ohmique aux moments des maxima et des minima.

Si le vecteur AB tourne de $2\beta l$ on aura une résultante OC qui donnera V_0 à l'entrée de la ligne ; c'est une valeur connue, c'est donc à ce moment que l'on connaîtra l'échelle du dessin et que l'on en déduira les valeurs de V_r^+ et V_r^-.

Si $\rho = 0$, les vecteurs AB et OA seraient dans le prolongement l'un de l'autre. Inversement, si $\rho = 1$ (cas de réflexion totale), le diagramme des ondes stationnaires devient une succession d'arches de sinusoïdes (fig. 4-8), puisque dans ce cas :

$$V_r^- = V_r^+$$

et

$$OA = AB, \quad \text{d'où} \quad OD = 0.$$

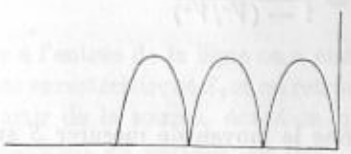


Fig. 4-8.

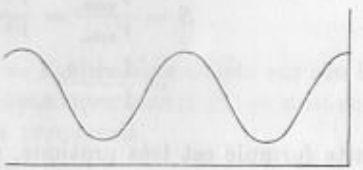


Fig. 4-9.

On aperçoit que les maxima sont alors flous, tandis que les minima sont très précis.

On verrait facilement que :

$$\left(\frac{V}{V^+}\right)^2 = 1 + \rho^2 + 2\rho_r \cdot \cos(2\beta x + \varphi)$$

où φ est l'angle de ρ au bout de la ligne.

Enfin, entre les deux cas extrêmes $\rho = 0$ et $\rho = 1$, on aurait des ondulations (fig. 4-9).

— Nous utiliserons toute cette théorie sur l'abaque de Smith, au Chapitre V.

4-15. **Remarques sur le diagramme en manivelle.** — Le taux d'ondes stationnaires S a la même valeur pour les tensions et pour les courants. En effet, $V_{max.}$ et $I_{max.}$ sont représentés (fig. 4-10) par la même longueur sur le diagramme, bien qu'ils aient lieu à une distance $\lambda/4$ l'un de l'autre. De même, $V_{min.}$ et $I_{min.}$ sont représentés par la même longueur, donc :

$$S = \frac{V_{max.}}{V_{min.}} = \frac{I_{max.}}{I_{min.}},$$

et la valeur de S entraîne celle de ρ. Ces valeurs se liront direc-

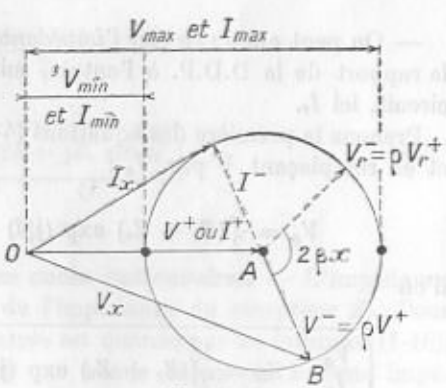


Fig. 4-10.

tement sur l'abaque de SMITH (voir Chapitre V) avec lequel nous ferons plusieurs exemples numériques.

On observe bien sur le diagramme en manivelle que l'on a un ventre de potentiel $V_{max.}$ lorsque V^+ et V^- s'ajoutent directement, et que l'on a $V_{min.}$ quand V^+ et V^- se retranchent :

$$V_{max.} = V^+ + V^-$$
$$V_{min.} = V^+ - V^-,$$

d'où

$$S = \frac{V_{max.}}{V_{min.}} = \frac{V^+ + V^-}{V^+ - V^-} = \frac{1 + (V^-/V^+)}{1 - (V^-/V^+)} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho},$$

et cette formule est très pratique, elle donne le moyen de mesurer S sur le diagramme de SMITH.

4-16. **Autre expression de l'impédance en un point quelconque et impédance de transfert.** — Divisons l'une par l'autre les deux équations (4-6) pour faire apparaître V/I qui représente l'impédance Z en un point quelconque de la ligne :

$$\boxed{\frac{V}{I} = Z = Z_c \cdot \frac{(Z_r + Z_c)\exp(j\beta x) + (Z_r - Z_c)\exp(-j\beta x)}{(Z_r + Z_c)\exp(j\beta x) - (Z_r - Z_c)\exp(-j\beta x)}} \quad (4\text{-}18)$$

d'ailleurs si $x = 0$, on retrouve :

$$Z = Z_r.$$

— On peut aussi calculer *l'impédance de transfert* Z_{tr} (voir Tome I), qui est le rapport de la D.D.P. à l'entrée, soit ici V_0, au courant à l'extrémité du circuit, ici I_r.

Prenons la première des équations (4-6) en faisant $x = l$ (donc à la source), et en remplaçant V par V_0 :

$$V_0 = \frac{I_r}{2}(Z_r + Z_c)\exp(j\beta l) + \frac{I_r}{2}(Z_r - Z_c)\exp(-j\beta l)$$

d'où

$$\boxed{\frac{V_0}{I_r} = Z_{tr} = \frac{1}{2}[(Z_r + Z_c)\exp(j\beta l) + (Z_r - Z_c)\exp(-j\beta l)]} \quad (4\text{-}19)$$

De même, dans la deuxième équation (4-6), faisons $x = l$ et $I = I_0$:

$$\boxed{\frac{I_0}{I_r} = \frac{(Z_c + Z_r)\exp(j\beta l) + (Z_c - Z_r)\exp(-j\beta l)}{2Z_c}} \quad (4\text{-}20)$$

qui donne I_r, connaissant I_0 à l'entrée de la ligne.

— On peut tirer plusieurs conséquences de toutes ces équations. Si l'on fait, par exemple $Z_r = Z_c$, la formule (4-18) de Z donne, *en un point quelconque de la ligne* :

$$Z = Z_c,$$

donc à l'entrée de la ligne on a encore $Z_0 = Z_c$, la source débite sur son impédance caractéristique Z_c et on retrouve les deux équations (1-11) où x est compté à partir de la source, équation que l'on trouverait directement en partant des deux équations (4-6) :

$$V = V_0 \exp(-j\beta x)$$

et

$$I = I_0 \exp(-j\beta x)$$

ce qui donne le schéma équivalent de la figure 4-11. On peut alors calculer I_0, V_r ainsi que la puissance absorbée par la charge $Z_r = Z_c$.

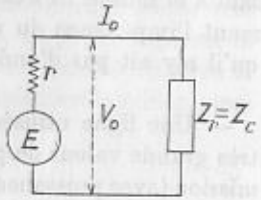


FIG. 4-11.

Remarque sur l'impédance de transfert. — La formule de Z_{tr} peut s'écrire :

$$Z_{tr} = Z_r\left(\frac{\exp(j\beta l) + \exp(-j\beta l)}{2}\right) + Z_c\left(\frac{\exp(j\beta l) - \exp(-j\beta l)}{2}\right).$$

Or, d'après les formules d'EULER, on sait que

$$\cos x = \frac{\exp(jx) + \exp(-jx)}{2}$$

et

$$\sin x = \frac{\exp(jx) - \exp(-jx)}{2j},$$

on aura ainsi

$$\boxed{Z_{tr} = Z_r \cos\beta l + jZ_c \sin\beta l} \quad (4\text{-}21)$$

dont on pourrait prendre le module.

4-17. **Emploi des lignes avec ou sans ondes stationnaires.** — L'impédance d'entrée Z_0 est en général différente de l'impédance du récepteur Z_r. Pour une ligne sans pertes, l'impédance d'entrée est donnée par les formules (1-16). Par un ajustage convenable, donnant une bonne valeur de Z_c, une impédance Z_r peut être transformée.

A ce point de vue une ligne sans pertes est équivalente à un transformateur parfait (ainsi qu'on l'a vu au § *Ligne quart d'onde*) comme adaptateur d'impédances, et de faibles sections de ligne servent d'inductances ou de capacités.

— Pour transmettre de la puissance HF à une distance supérieure à λ, il faut éviter les ondes stationnaires et utiliser les ondes progressives, la production d'arcs limitant $V_{max.}$. Pour un $V_{max.}$ donné, la puissance maximum est transmise par une ligne sans ondes stationnaires : en effet, puisque les pertes Joule sont proportionnelles à I^2, les pertes aux ventres sont plus grandes qu'elles ne le seraient si la ligne était terminée sur Z_c (et aux nœuds elles seront plus petites), mais les pertes totales sur une ligne résonnante seraient plus grandes (car il n'y a pas compensation) que sur une ligne à ondes progressives transmettant la même puissance.

Si λ est très petite, on peut utiliser une ligne résonnante, les réglages se faisant à la source. Si λ est grande il faut adapter la ligne à l'antenne en transformant l'impédance du récepteur (par exemple cette antenne) en Z_c de façon qu'il n'y ait pas d'ondes stationnaires.

— Une ligne utilisée comme réactance ou comme ligne résonnante a une très grande valeur de ρ, presque infinie. Mais, en pratique, une ligne de transmission (avec puissance) doit avoir un S très faible et pas d'ondes stationnaires ; $S = 1$ est impossible, et on arrive à 1,2 et 2 au plus.

Il y a aussi d'autres avantages : le rendement de la ligne est plus grand ; la puissance transmise est plus grande, car $V_{max.}$ est limité par l'isolement, et surtout la ligne est beaucoup moins sensible à de petits changements de λ ou de S.

— Tous ces calculs et toutes ces notions servent de base à la théorie des antennes, et en particulier des antennes en U.H.F. et en V.H.F., dans les radars et dans les systèmes d'émission et de réception dirigées, et que nous abordons au chapitre X.

CHAPITRE V

L'ABAQUE DE SMITH

Construction — Propriétés — Emploi.

5-1. **Principe de l'abaque.** — Le diagramme, imaginé par l'ingénieur américain SMITH, est un abaque permettant de résoudre la plupart des problèmes ayant trait aux lignes de transmission en BF, HF et U.H.F.

Supposons un générateur H.F. alimentant une ligne infinie, la puissance transmise à la ligne se dissipe en chaleur ; aucune puissance n'est réfléchie vers la source. Si l'on coupe la ligne à un endroit quelconque, on peut remplacer la partie qui ne contient pas le générateur par une impédance dont on ajustera la valeur pour que tout se passe comme si la ligne était infinie : cette valeur, ainsi qu'on le sait, est l'impédance caractéristique Z_c :

$$Z_c = \sqrt{L/C},$$

qui est ohmique pure.

Nous supposons une ligne sans pertes, c'est-à-dire que nous supposons nulles la résistance ohmique par kilomètre, ainsi que les fuites entre les deux fils. Pour toute impédance différente de Z_c, en bout de ligne, il se produira une réflexion de la puissance, et on aura des ondes stationnaires du courant et du potentiel.

Quand le générateur H.F. et le récepteur ont chacun une impédance égale à celle de la ligne il y a adaptation.

On caractérise le degré d'adaptation par *le coefficient de réflexion* ρ, qui est le quotient de l'intensité (ou de la tension) de l'onde réfléchie par l'intensité (ou la tension) de l'onde incidente. L'impédance du récepteur étant Z_r, on a vu que :

$$\rho = \frac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c}.$$

Précisons cette valeur de ρ pour différentes natures de l'impédance du récepteur, en utilisant cette formule, ce qui donne :

pour $Z_r = Z_c$,	$\rho = 0$;
$Z_r = 0$ (court-circuit),	$\rho = -1$;
$Z_r = \infty$,	$\rho = +1$;
$Z_r = -j/C\omega$,	$\rho = -j$;
$Z_r = jL\omega$,	$\rho = +j$.

Quant au déphasage entre l'onde réfléchie et l'onde incidente il varie de 0 à 180° suivant la nature de l'impédance du récepteur, et, comme l'onde directe

et l'onde réfléchie se propagent en sens inverse, ce déphasage varie quand on s'éloigne du récepteur le long de la ligne.

A une distance $\lambda/2$ chaque onde, de I ou de V, est déphasée de 180°, donc le déphasage total entre les deux ondes est de 360°. Ainsi, l'angle de phase du coefficient de réflexion reprend donc les mêmes valeurs à chaque $\lambda/2$ le long de la ligne.

Si la fréquence f est en mégacycles par seconde, la longueur d'onde dans l'air est, en mètres :

$$\lambda = 300/f.$$

Le coefficient de réflexion ρ pourra donc être donné par un diagramme polaire où l'angle de déphasage serait obtenu dans une direction donnée et où sa valeur

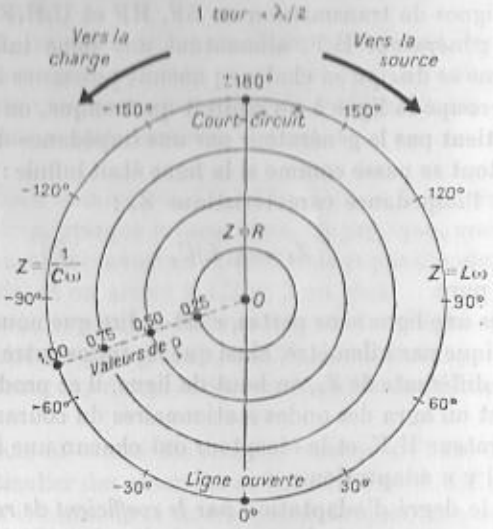


FIG. 5-1.

numérique serait donnée par la distance au pôle. Ainsi, le déplacement le long d'une ligne correspondrait au déplacement à la périphérie du cercle de l'abaque, avec un rayon constant pour une ligne sans pertes, tandis que pour une ligne avec pertes on se déplacerait en suivant une spirale exponentielle.

Dans l'abaque circulaire de SMITH, on a adopté le sens des aiguilles d'une montre lorsqu'on se déplace du récepteur *vers la source* (fig. 5-1).

5-2. Construction de l'abaque. — Ces généralités étant bien précisées, nous pouvons aborder la construction de l'abaque. Les cinq points correspondants à des charges en bout de ligne :

$$Z_r = 0 \qquad Z_r = \mathrm{j}L\omega$$
$$Z_r = \infty \qquad Z_r = -\mathrm{j}/C\omega$$
$$Z_r = R$$

sont indiqués sur la figure 5-1 qui donne les valeurs de ρ. Si $Z_r = R$, on lit ρ sur le diamètre, tandis que si Z_r est inductif ou capacitif, on lit ρ sur la demi-circonférence de droite ou bien sur celle de gauche.

On notera qu'une charge, de résistance ou de réactance infinie, est équivalente à une ligne ouverte, et qu'une charge de résistance ou de réactance nulle est équivalente à un court-circuit ; c'est pourquoi les points O et ∞ sont communs aux échelles de résistance et de réactance (fig. 5-2).

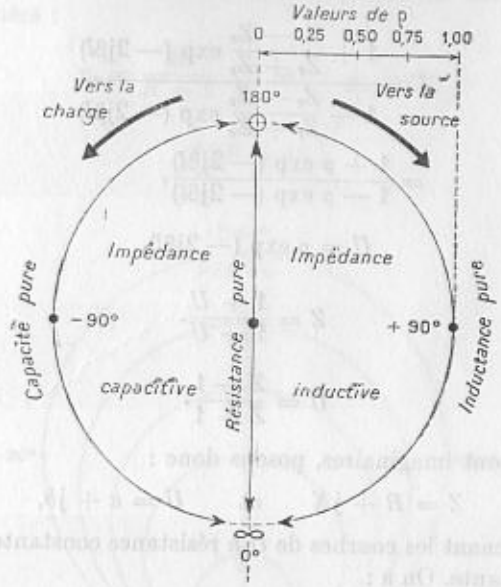


FIG. 5-2.

Comme l'impédance caractéristique

$$Z_c = \sqrt{L/C}$$

est une constante pour une ligne donnée, on a pris l'habitude d'exprimer l'impédance Z_r du récepteur par rapport à Z_c, et on appellera *impédance réduite du récepteur* l'expression :

$$Z_1 = Z_r/Z_c.$$

Le coefficient de réflexion prend alors la forme suivante :

$$\rho = \frac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c} = \frac{[(Z_r/Z_c) - 1]}{[(Z_r/Z_c) + 1]}$$
$$= \frac{Z_1 - 1}{Z_1 + 1}.$$

Or, pour une ligne sans pertes, l'impédance d'entrée est :

$$Z_0 = Z_c \frac{Z_r \cos \beta l + \mathrm{j} Z_c \sin \beta l}{Z_c \cos \beta l + \mathrm{j} Z_r \sin \beta l},$$

où $\beta = \omega\sqrt{LC}$ et l la distance au récepteur.

On aura ainsi :

$$\frac{Z_0}{Z_c} = Z = \frac{Z_r \cos \beta l + \mathrm{j} Z_c \sin \beta l}{Z_c \cos \beta l + \mathrm{j} Z_r \sin \beta l},$$

ou encore

$$Z = \frac{1 + \dfrac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c} \exp(-2\mathrm{j}\beta l)}{1 - \dfrac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c} \exp(-2\mathrm{j}\beta l)} = \frac{1 + \rho \exp(-2\mathrm{j}\beta l)}{1 - \rho \exp(-2\mathrm{j}\beta l)},$$

ou, en posant

$$U = \rho \exp(-2\mathrm{j}\beta l),$$

Z peut s'écrire :

$$Z = \frac{1 + U}{1 - U}. \tag{5-1}$$

On en tire

$$U = \frac{Z - 1}{Z + 1}. \tag{5-2}$$

Comme Z et U sont imaginaires, posons donc :

$$Z = R + \mathrm{j}X \quad \text{et} \quad U = a + \mathrm{j}b,$$

et traçons maintenant les courbes de U à résistance constante, puis les courbes à réactance constante. On a :

$$U = a + \mathrm{j}b = \frac{Z - 1}{Z + 1} = \frac{R + \mathrm{j}X - 1}{R + \mathrm{j}X + 1}$$

ou

$$(a + aR - bX) + \mathrm{j}(Rb + aX + b) = R + \mathrm{j}X - 1.$$

Identifions :

$$\left.\begin{aligned} a + aR - bX &= R - 1 \\ Rb + aX + b &= X. \end{aligned}\right\} \tag{5-3}$$

L'équation des courbes à résistance constante s'obtient en éliminant X entre ces deux équations. La première donne

$$X = \frac{(a + aR - R + 1)}{b},$$

et la seconde

$$X = \frac{Rb + b}{1 - a}.$$

En égalant ces deux valeurs on obtient :

$$a^2(R + 1) - 2aR + R - 1 = -b^2(R + 1),$$

on en tire :

$$\boxed{\left[a - \frac{R}{R + 1}\right]^2 + b^2 = \frac{1}{(R + 1)^2}}. \tag{5-4}$$

Cette équation représente donc une famille de cercles dont les centres ont comme coordonnées :

$$x_0 = \frac{R}{R + 1} \quad \text{et} \quad y_0 = 0,$$

et pour rayon

$$1/(R + 1).$$

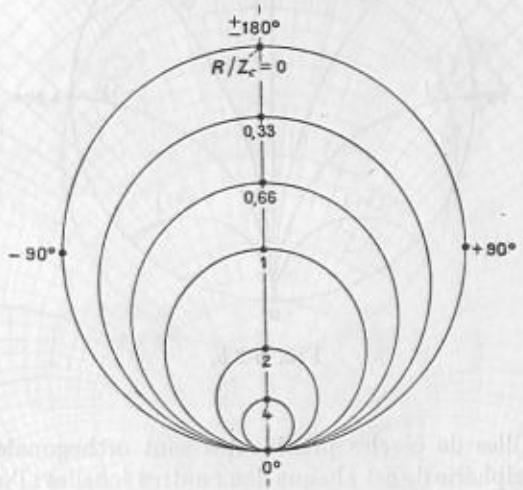


FIG. 5-3 *a*.

Tous ces cercles passent par le point (1, 0) et ont leurs centres sur le diamètre formant axe des résistances (fig. 5-3 *a*). En portant la valeur R/Z_c dans ces formules, on aura le cercle de résistance réduite constante, égale à R/Z_c.

L'équation des courbes à réactance constante s'obtient en éliminant R entre ces deux équations 5-3 ; on obtient facilement :

$$(a - 1)^2 + \left(b - \frac{1}{X}\right)^2 = \frac{1}{X^2},$$

expression qui représente encore une famille de cercles dont les centres ont comme coordonnées $x_0 = 1, y_0 = 1/X$, et pour rayon $1/X$, où X est positif ou négatif.

Tous ces cercles passent par le point (1, 0) de la figure 5-3 *b*. Ainsi, tous les récepteurs ayant la même réactance réduite X/Z_c ont un coefficient de réflexion qui se trouve sur l'un de ces cercles. Leurs centres se trouvent sur une ligne perpendiculaire à l'axe des R et passant par le point dont le coefficient de réflexion correspond à un déphasage nul.

La figure 5-4, *placée en dépliant à la fin du volume (afin de lui donner une grande dimension, et de pouvoir la placer à proximité d'une page quelconque, pour suivre les explications du texte)*, montre l'abaque complet de SMITH donnant les coefficients de réflexion pour les impédances réduites $Z_1 = Z_r/Z_c$.

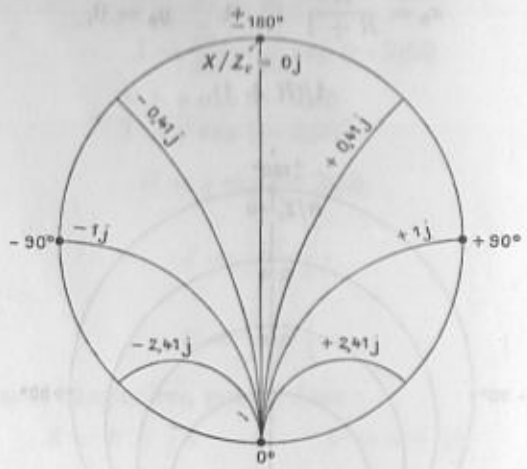


FIG. 5-3 *b*.

Les deux familles de cercles précédentes sont orthogonales.

On voit à la périphérie de cet abaque deux autres échelles : l'une en longueurs d'onde vers le générateur, et l'autre en longueurs d'onde vers le récepteur ; ces deux échelles ont leur point de départ en haut de l'abaque, au point d'impédance minimale (déphasage de ± 180°). Mais ceci n'empêche pas que l'on puisse, sur cette circonférence extérieure, se déplacer d'une longueur quelconque *à partir d'un point quelconque*, ainsi que nous le verrons dans les exemples suivants.

— *Par exemple*, sur la figure 5-5, le point M correspond à $Z_1 = 2 + 1j$ (où 2 correspond au cercle passant par 2 sur l'axe des résistances, et 1 correspond à l'arc de cercle passant par + 1j (+ 90°) sur l'échelle périphérique des réactances.

Le point symétrique M' correspond à $Z_1 = 2 - j$.

— Le point M représente deux quantités : c'est d'une part $2 + j$, et d'autre

part c'est une certaine valeur de $U = a + jb$. Cette valeur de U peut s'obtenir par l'équation

$$U = \rho \exp(-2j\beta l)$$

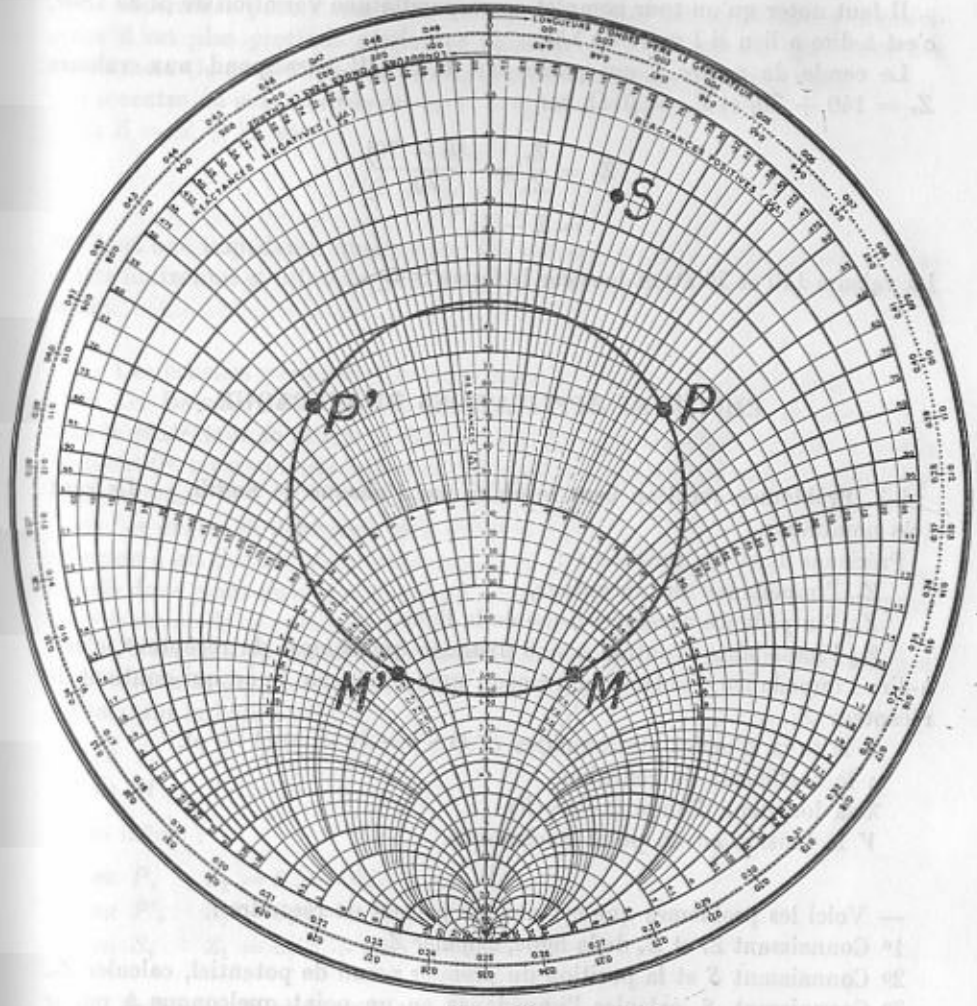


FIG. 5-5.

en fonction de Z_r, Z_c et βl, *ou bien* par l'équation :

$$U = \frac{Z - 1}{Z + 1}$$

en fonction de R et de X, avec $Z = R + jX$.

L'équation $U = \rho \exp(-2j\beta l)$ signifie que le lieu de U, en fonction de Z_r,

Z_c et βl, est un cercle. Si Z_r est constante, mais si l varie, le centre du cercle (lieu de U) se déplace sur un cercle dont le centre est l'origine.

La valeur de ρ peut changer seulement si Z_r change, et $\exp(-2j\beta l)$ change si l change, pour une fréquence donnée.

Il faut noter qu'un tour complet correspond à une variation de βl de 180°, c'est-à-dire a lieu si l varie de $\lambda/2$.

Le cercle de centre 1 qui passe par M et M' correspond aux valeurs $Z_r = 140 + 70j$ et $Z_c = 70\ \Omega$, car

$$Z_1 = \frac{Z_r}{Z_c} = \frac{140 + 70j}{70}$$
$$= 2 + 1j,$$

les valeurs 140 et 70 étant lues sur la figure 5-5.

EMPLOI ET APPLICATIONS DE L'ABAQUE

5-3. **Problèmes que l'on peut résoudre par l'abaque de Smith.** — Ils sont très nombreux.

Précisons bien les notations :

Z_r, l'impédance du récepteur,

Z_c, l'impédance caractéristique de la ligne,

Z_0, l'impédance d'entrée à une distance quelconque du récepteur, c'est-à-dire l'impédance d'entrée du tronçon quelconque de ligne qui contient le récepteur Z_r.

S le taux d'ondes stationnaires (T.O.S.) $= (1 + \rho)/(1 - \rho)$,

ρ le coefficient de réflexion,

λ la longueur d'onde ($\lambda = \gamma/F$),

V la tension en un point quelconque.

— Voici les problèmes que cet abaque permet de résoudre :

1° Connaissant Z_r et Z_c de la ligne, calculer Z_0.

2° Connaissant S et la position du premier nœud de potentiel, calculer Z_r.

3° Connaissant S, calculer l'impédance en un point quelconque à partir d'un point où la tension est minimale.

4° Calculer ρ en un point quelconque d'une ligne.

5° Calculer le taux d'ondes stationnaires S.

6° Connaissant Z_c, Z_r et λ, calculer ρ ainsi que la distance du récepteur au premier nœud de potentiel.

7° Connaissant Z_r, Z_c, S et la puissance terminale, calculer $V_{max.}$, $V_{min.}$, $I_{max.}$ et $I_{min.}$.

8° Différents problèmes sur les stubs, simples ou doubles ; trouver leurs longueurs, leurs positions et faire les adaptations.

Tout ceci pour des lignes sans pertes ou avec pertes.

5-4. **Généralités pour l'emploi de l'abaque.** — Pour les applications numériques il est plus pratique d'orienter l'abaque de telle manière que l'axe des résistances (le trait diamètral des figures précédentes) soit *horizontal*.

Le centre du grand cercle est en $1 + 0j$, et son rayon est 1.

Si $Z = R + jX$ et :

$$Z_1 = \frac{Z}{Z_c} = \frac{R}{Z_c} + j\frac{X}{Z_c},$$

où Z est une impédance quelconque, les valeurs de R/Z_c se lisent sur le diamètre horizontal et celles de $\pm X/Z_c$ se lisent sur les cercles à réactance constante.

— Les échelles périphériques extérieures indiquent deux éléments :

1° *Les longueurs de ligne*, exprimées en fonction de λ (par exemple $0{,}1\ \lambda$) vers le générateur en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, à partir du point 0°, ou vers le récepteur en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

2° *Les angles de déphasage le long de la ligne.* La valeur du coefficient de réflexion ρ est donnée, pour n'importe quel point de l'abaque, par la distance radiale de ce point au centre du grand cercle (où $R/Z_c = 1$), en prenant comme unité le rayon de ce grand cercle.

Sur l'abaque, un point correspondant à une impédance donnée se détermine par l'intersection de deux cercles : celui des R et celui des X.

Ainsi, sur la figure 5-5 :

en M, $Z_1 = 2 + j$;
en M', $Z_1 = 2 - j$.

De même :

en P, $Z_1 = 0{,}5 + 0{,}5\,j$;
en P', $Z_1 = 0{,}5 - 0{,}5\,j$;
en S, $Z_1 = 0{,}15 + 0{,}2\,j$.

5-5. **Problème fondamental.** — *Connaissant $Z_r = R + jX$ du récepteur ainsi que les constantes de la ligne (ou bien son impédance caractéristique Z_c), calculer l'impédance d'entrée Z_0 du tronçon de ligne comprenant le récepteur, et à une distance quelconque de ce récepteur.*

— Voici la marche à suivre :

1° On calcule d'abord l'impédance réduite $Z_1 = Z_r/Z_c$ et l'on place le point T correspondant sur l'abaque (fig. 5-6).

2° Pour avoir Z_0 à une distance d vers la source, on trace la droite OT (rayon du grand cercle), on lit en A sur l'échelle extérieure une certaine valeur de distance exprimée en fraction de λ.

3° On fait tourner ce rayon d'un angle correspondant à la longueur de ligne désirée (exprimée en fraction de λ). On obtient le rayon OB.

4° On lit la valeur $R_1 + jX_1$ du nouveau point T' à l'intersection du rayon OB avec le cercle de centre O et passant par T.

5° On en déduit

$$Z_0 = Z_c(R_1 + jX_1).$$

— Pour une ligne sans pertes, les lieux des points à T.O.S. constant (ou à ρ constant) sont des cercles concentriques de centre 1 sur l'axe des R, et de rayons variables, et on aura des lignes ayant un T.O.S. donné en suivant l'un de ces cercles.

Le rapport R/Z_c où l'un de ces cercles coupe l'axe diamètre des R, et *à droite du centre*, donne la valeur du T.O.S.

— *En résumé, la valeur du* T.O.S. *est donnée par la distance d'un point quelconque de l'abaque au centre* (1, 0) *du grand cercle.*

En effet, en un ventre de potentiel, on a (d'après les équations initiales) :

$$V_{max.} = I_r\left[\frac{Z_r + Z_c}{2}\right][\exp(j\beta x)](1 + \rho),$$

$$I_{min.} = I_r\left[\frac{Z_r + Z_c}{2Z_c}\right][\exp(j\beta x)](1 - \rho),$$

d'où

$$\frac{V_{max.}}{I_{min.}} = Z = Z_c\frac{1 + \rho}{1 - \rho},$$

et, enfin :

$$\frac{Z}{Z_c} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} = S.$$

Ainsi, au point où la tension V est maximale, Z/Z_c est ohmique pure, et on lira la valeur du T.O.S. sur l'axe des R, *et à droite du centre* (1, 0).

Tout ceci sera mieux compris grâce aux exemples numériques.

5-6. Applications numériques. Problème I. — Posons, pour l'impédance réduite :

$$Z_1 = \frac{R + jX}{Z_c} = \frac{R}{Z_c} + j\frac{X}{Z_c}$$

$$\boxed{Z_1 = r + jx}.$$

En supposant $r + jx = 0{,}9 + 0{,}7\,j$ (fig. 5-6), *chercher l'impédance d'entrée* Z_0 *de la ligne, à une distance* 0,05 λ *vers la source, en supposant* $Z_c = 100 + 0\,j$. *Calculer* S *et* ρ.

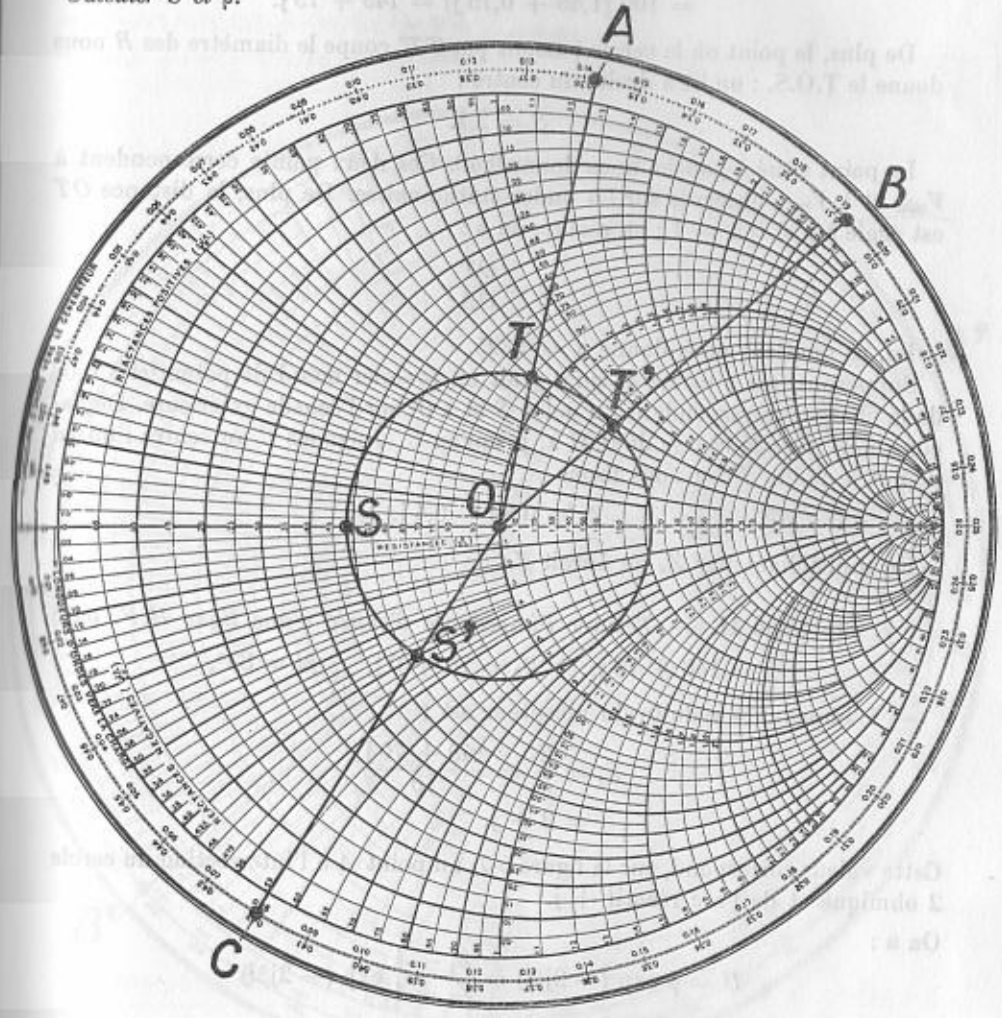


FIG. 5-6.

— Du point A (où on lit 0,142 λ) déplaçons-nous de 0,05 λ dans le sens des aiguilles d'une montre, ce qui donne le point B, où on lit :

$$0{,}142\ \lambda + 0{,}05\ \lambda = 0{,}192\ \lambda.$$

L'intersection T' du rayon OB et du cercle de centre (1, 0) passant par T, donne la valeur cherchée de l'impédance à une distance 0,05 plus loin. En T' nous lisons :

$$r' + jx' = 1{,}45 + 0{,}75\,j = Z_1,$$

d'où

$$Z_0 = Z_c(r' + jx')$$
$$= 100\,(1{,}45 + 0{,}75\,j) = 145 + 75\,j.$$

De plus, le point où le cercle passant par TT' coupe le diamètre des R nous donne le T.O.S. : on lit à droite du centre :

$$S = 2{,}1.$$

Le point situé à gauche nous donne 0,49. Ces deux points correspondent à $V_{min.}$ et à $V_{max.}$ observés sur les ondes stationnaires. De plus, la distance OT est égale à ρ si $OA = 1$; en réalité, on a :

$$\rho = \frac{OT}{OA}.$$

Ici, ce quotient nous donne $\rho = 0{,}325$.

Supposons que $\rho = 2{,}1$ et qu'il y ait un premier nœud de potentiel à 0,08 de la charge, correspondant au point S et à 0° sur l'échelle extérieure. Déplaçons-nous *vers la charge* de 0,08 λ, jusqu'en C. Joignons C au centre : on en déduit le point S' où nous lisons

$$Z_1 = 0{,}59 - 0{,}4\,j.$$

En multipliant par Z_c on aurait Z_r.

5-7. **Problème II.** — *Trouver l'impédance d'entrée d'une ligne H.F. où :*

$$Z_r = 140 + 70\,j, \qquad Z_c = 70 + 0\,j, \qquad \beta l = 82°,$$

— L'impédance réduite du récepteur est :

$$Z_1 = \frac{Z_r}{Z_c} = \frac{140 + 70\,j}{70}$$
$$= 2 + j.$$

Cette valeur correspond, sur la figure 5-7, au point A à l'intersection du cercle 2 ohmique et de l'arc réactif + j.

On a :

$$U = \rho \exp(-2j\beta l) = \frac{Z_1 - 1}{Z_1 + 1} \exp(-2j\beta l)$$
$$= \left(\frac{2 + j - 1}{2 + j + 1}\right) \exp(-2j\beta l)$$
$$= 0{,}447\,/\underline{26°57}\,/\underline{-164°} = 0{,}447\,/\underline{-137°43}.$$

ρ est donné par le point A, en fonction de a et de b. Il faut alors tourner de 137° 43 vers la source, ce qui donne le point B correspondant à 0,43 — 0,32 j.

La valeur Z_0 à l'entrée de la ligne est donc :

$$Z_0 = (0{,}43 - 0{,}32\,j)70$$
$$= 30{,}1 - 22{,}4\,j\ \Omega.$$

Il est plus commode de transformer 164° en fonction de λ :

180° correspondent à $\lambda/4$ et 164° correspondent à

$$\frac{\lambda \cdot 164}{4 \cdot 180} = 0{,}227\,\lambda,$$

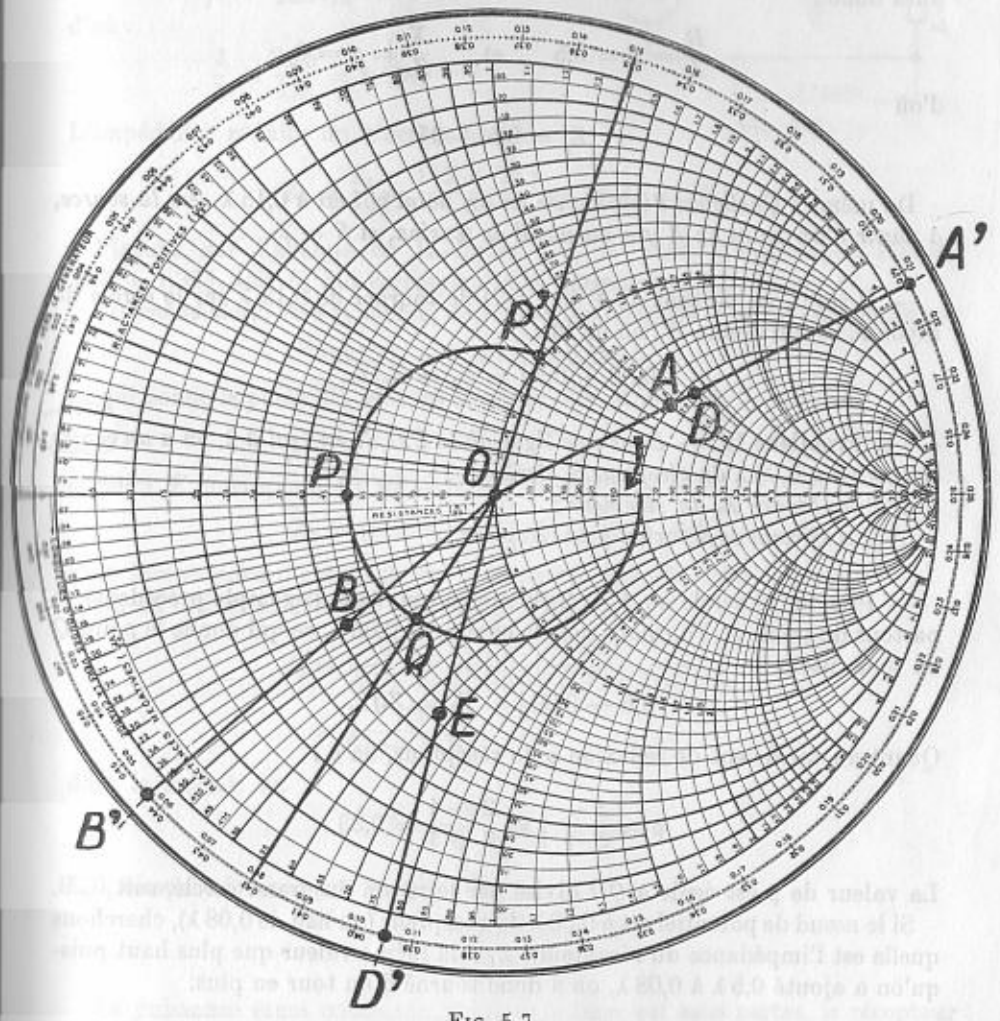


FIG. 5-7.

qu'il suffit d'ajouter à la valeur marquée en A', soit 0,213 λ :

$$0{,}213\,\lambda + 0{,}227\,\lambda = 0.440\,\lambda,$$

ce qui donne le point B', d'où l'on déduit le point B.

5-8. **Problème III.** — *Quelle est la valeur de l'impédance Z en un point où l'on a un nœud de tension, si le T.O.S. = 2.*

— Si l'on trace, de 1 comme centre, la circonférence passant par 2 sur l'axe de R ($S = 2$), elle coupe cet axe, à gauche du centre, en P où on lit 0,5 : on aura donc :

$$\frac{R}{Z_c} = r = 0{,}5 \qquad \text{et} \qquad \frac{X}{Z_c} = x = 0,$$

d'où

$$Z_1 = 0{,}5 + 0\,\text{j}.$$

De même : *Quelle est l'impédance en un point qui est à* 0,15 λ *vers la source, à partir d'un point où il y a un nœud de tension, si* $S = 2$.

— Il suffit, en partant de P (fig. 5-7) de tourner de 0,15 λ sur le cercle de rayon 2, ce qui donne P', où on lit :

$$0{,}98 + 0{,}7\,\text{j} = Z_1 = Z_0/Z_c.$$

5-9. **Problème IV.** — *Dans une ligne où le T.O.S. est égal à* 2, *on a un ventre de tension à* 0,08 λ *du récepteur. Calculer :*

a) *l'impédance* Z_r *du récepteur ;*

b) *le coefficient de réflexion* ρ *au récepteur.*

— Prenons le cercle où $S = 2$ (le même que dans l'exemple précédent) et partons du point P. Tournons vers la charge de 0,08 λ, ce qui donne le point Q où nous lisons :

$$0{,}6 - 0{,}39\,\text{j} = Z_1 = Z_r/Z_c.$$

Quant au coefficient de réflexion ρ au récepteur, on a :

$$\rho = \frac{S-1}{S+1} = \frac{2-1}{2+1} = 0{,}33.$$

La valeur de ρ est égale à QO divisé par le rayon du grand cercle, soit 0,33.

Si le nœud de potentiel est à 0,58 λ du récepteur (au lieu de 0,08 λ), cherchons quelle est l'impédance du récepteur : Z_r a la même valeur que plus haut puisqu'on a ajouté 0,5 λ à 0,08 λ, on a donc tourné d'un tour en plus.

5-10. **Problème V.** — *Une ligne H.F. sans pertes, de* 2,25 *mètres de longueur, et dont* $Z_c = 55 + 0\,\text{j}$, *est alimentée par un générateur dont* $E = 100$ *volts efficaces et dont l'impédance interne est* $Z_s = 40 + 0\,\text{j}$. *A son extrémité est un récepteur dont* $Z_r = 115 + 75\,\text{j}$. *La fréquence est* $f = 150$ Mc/s, *et on admet que la vitesse de propagation est les* 95/100 *de la vitesse de la lumière.*

Calculer le courant dans le récepteur Z_r, *la* D.D.P. *à ses bornes, ainsi que la puissance qu'il absorbe (fig.* 5-8).

— La longueur d'onde est :

$$\lambda = \frac{\gamma}{f} = \frac{0{,}95 \cdot 3 \cdot 10^8}{150 \cdot 10^6} = 1{,}9\ \text{m},$$

d'où

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{2{,}25}{1{,}9} = 1{,}184.$$

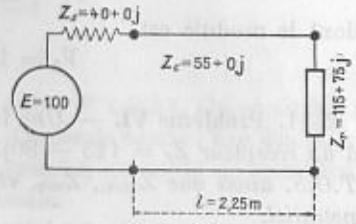


FIG. 5-8.

L'impédance réduite du récepteur est :

$$Z_1 = \frac{Z_r}{Z_c} = \frac{115 + 75\,\text{j}}{55} = 2{,}09 + 1{,}36\,\text{j}.$$

Plaçons sur l'abaque de la figure 5-7, le point d'impédance réduite 2,09 + 1,36 j, soit D, qui correspond à la périphérie à 0,212 λ en A'.

Tournons alors, vers la source, de 1,184 λ, *ou* de 0,184 λ, ce qui est identique :

$$0{,}212\,\lambda + 0{,}184\,\lambda = 0{,}396\,\lambda$$

ce qui donne le point D'. Menons le rayon OD' et portons

$$OE = OD,$$

le point E correspond à 0,49 — 0,65 j. On aura ainsi :

$$Z_0 = (0{,}49 - 0{,}65\,\text{j})55 = 27 - 35{,}8\,\text{j},$$

c'est l'impédance d'entrée Z_0 de la ligne sur laquelle débite la source.

On en déduit le courant fourni par la source :

$$I_0 = \frac{E}{Z_s + Z_0} = \frac{100}{[40 + (27 - 35{,}8\,\text{j})]} = \frac{100}{67 - 35{,}8\,\text{j}},$$

dont le module est

$$I_0 = \frac{100}{75{,}8} = 1{,}32\ \text{A}_{\text{eff.}}$$

La puissance fournie par la source est :

$$P = R_0 I_0^2 = 27 \cdot 1{,}32^2 = 47\ \text{watts}.$$

La puissance étant constante, puisque la ligne est sans pertes, le récepteur absorbe 47 watts ; on en déduit le courant I_r dans le récepteur :

$$47 = 115\, I_r^2,$$

d'où

$$I_r = \sqrt{\frac{47}{115}} = 0{,}64\ \text{A}_{\text{eff.}}$$

La D.D.P. aux bornes du récepteur est alors :

$$V_r = Z_r I_r = (115 + 75\,\mathrm{j})0{,}64$$

dont le module est

$$V_r = 137 \cdot 0{,}64 = 87{,}7 \text{ volts.}$$

5-11. **Problème VI.** — *Une ligne sans pertes où* $Z_c = 70 + 0\mathrm{j}$ *est connectée à un récepteur* $Z_r = 115 - 80\mathrm{j}$. *La longueur d'onde est* $\lambda = 2{,}5$ m. *Calculer le T.O.S. ainsi que* $Z_{max.}$, $Z_{min.}$ *et la distance du récepteur au premier nœud de potentiel.*

Si la ligne transmet une puissance de 50 *watts, calculer* $V_{max.}$, $V_{min.}$, $I_{max.}$, $I_{min.}$ *et la D.D.P.* V_r *aux bornes du récepteur* (fig. 5-9).

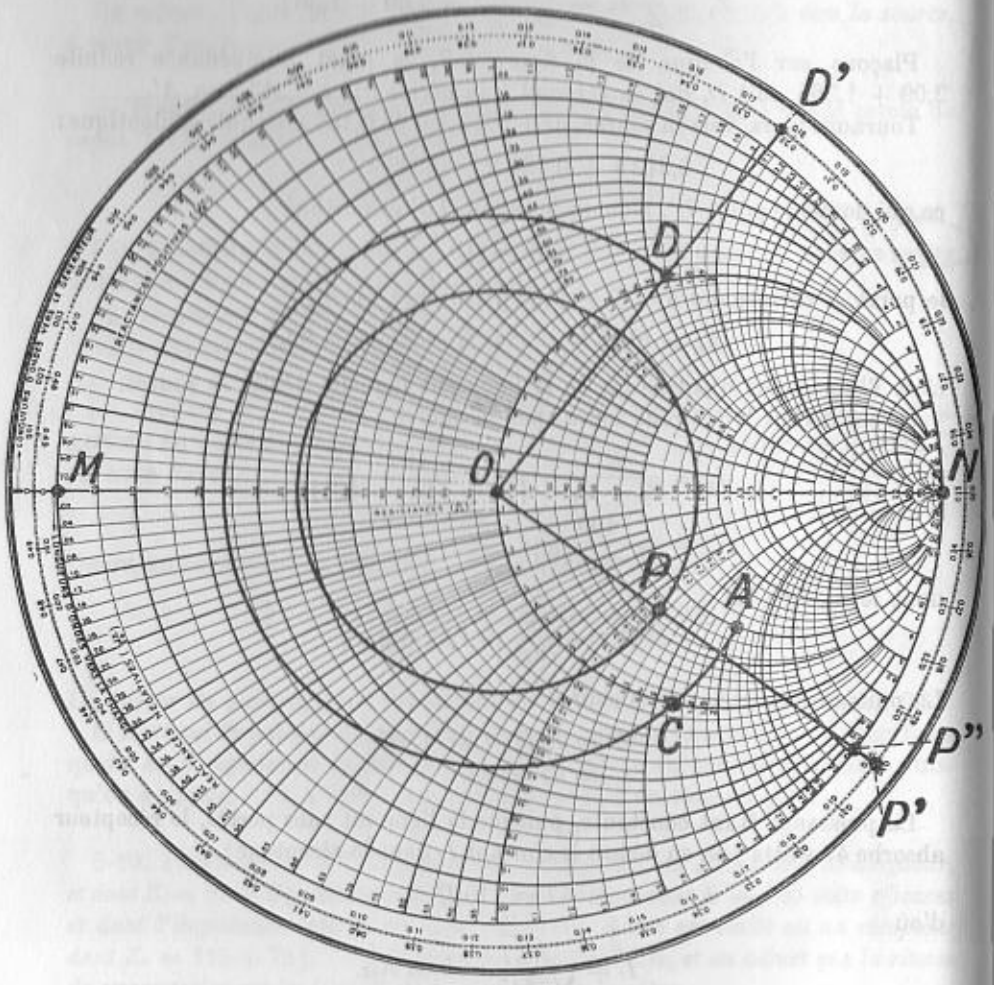


FIG. 5-9.

L'impédance réduite du récepteur est égale à :

$$Z_1 = \frac{Z_r}{Z_c} = \frac{115 - 80\,\mathrm{j}}{70}$$
$$= 1{,}64 - 1{,}14\,\mathrm{j}.$$

Plaçons en P le point correspondant, d'où le point P' à $0{,}3\,\lambda$. On en déduit, en traçant le cercle de rayon OP, que $S = 2{,}7$. Ce cercle coupe l'axe des R, à gauche du centre, à une valeur 0,37, qui correspond à un nœud de potentiel et à un ventre de courant, donc où Z est minimale.

La distance du récepteur à ce nœud de potentiel est obtenue en tournant de M vers P', soit $0{,}2\,\lambda$:

$$0{,}2\,\lambda = 0{,}2 \cdot 2{,}5 = 0{,}50 \text{ m.}$$

On obtient ainsi $Z_{min.}$:

$$Z_{min.} = 70(0{,}37 + 0\,\mathrm{j}) = 25{,}9 + 0\,\mathrm{j}.$$

A partir de M, et à une distance $\lambda/4$ en plus, soit en tournant de 180°, le cercle de rayon OP coupe l'axe à 2,7 qui est la position du ventre de potentiel et du nœud de courant, et où l'on a $Z_{max.}$, donc le T.O.S. est $S = 2{,}7$.

La distance du récepteur au premier ventre de potentiel est donc $0{,}2\,\lambda + \lambda/4 = 1{,}37$ m, et l'on a :

$$Z_{max.} = SZ_c = 2{,}7 \cdot 70$$
$$= 189 + 0\,\mathrm{j}.$$

— Calculons maintenant les puissances et les courants.

On a :

$$P = \frac{V_{max.}^2}{Z_{max.}} = \frac{V_{max.}^2}{SZ_c},$$

soit

$$50 = \frac{V_{max.}^2}{189},$$

d'où

$$V_{max.} = 97{,}2 \text{ V.}$$

D'autre part, on a :

$$V_{max.} = SV_{min.},$$

d'où

$$V_{min.} = \frac{97{,}2}{2{,}7} = 36 \text{ V.}$$

On obtient de même :

$$I_{max.} = \frac{V_{max.}}{Z_c}$$
$$= \frac{97{,}2}{70} = 1{,}4 \text{ A},$$
$$I_{min.} = \frac{V_{min.}}{Z_c}$$
$$= \frac{36}{70} = 0{,}5 \text{ A}.$$

Le courant dans le récepteur est donné par

$$P = R_r I_r^2,$$

où $R_r = 115\ \Omega$, et $P = 50$ W, ce qui donne :

$$I_r = \sqrt{\frac{50}{115}} = 0{,}66 \text{ A}.$$

Enfin

$$V_r = Z_r I_r = (115 - 80\,\mathrm{j})0{,}66.$$

dont le modèle est 93 volts.
Le coefficient de réflexion ρ au récepteur est enfin donné par :

$$\frac{OP}{OP'} = 0{,}324.$$

5-12. **Remarques sur la réactance d'une ligne.** — Une ligne en court-circuit a une réactance nulle en bout de ligne. La réactance à l'entrée d'une ligne en court-circuit peut se déterminer en partant du point M de la figure 5-9, où $Z = 0$ ($R = 0$ et $X = 0$), et en tournant vers la source d'une distance convenable comptée à la périphérie.

De même, pour une ligne ouverte, la réactance d'entrée de la ligne s'obtiendrait en partant du point N où $Z = \infty$ ($R = \infty$ et $X = \infty$), et en tournant dans le même sens. Tout ceci à condition de connaître Z_c.

Inversement, connaissant l'impédance Z_0 d'entrée d'une ligne, on en déduirait Z_c.

D'autre part, on sait qu'une ligne ouverte à une extrémité apparaît comme une ligne en court-circuit à une distance $\lambda/4$ de cette extrémité, et, inversement, une ligne quart d'onde inverse la charge. Pour des charges réactives, la charge est inversée et le déphasage varie de 180° : une inductance apparaît comme une capacité, et inversement.

Par exemple, une charge dont $Z_r = 3 + 4\mathrm{j}$ ($Z_r = 5\ \Omega$) devient, à une distance $\lambda/4$ plus loin :

$$Z_0 = 0{,}12 - 0{,}16\,\mathrm{j}$$

dont le module est $Z_0 = 0{,}2\ \Omega$.

Tout ceci se voit facilement sur l'abaque en partant du point $3 + 4\mathrm{j}$ et en tournant de 180° (ou $\lambda/4$) ; on obtient

$$Z_0 = 0{,}12 - 0{,}16\,\mathrm{j}$$

et le déphasage, de 18°, devient — 162° ; d'inductif il est devenu capacitif.

5-13. **Adaptation par un stub.** — Nous avons vu qu'un *stub* est un tronçon de ligne, en général en court-circuit, connecté en un point d'une ligne et perpendiculairement à celle-ci : il se trouve ainsi en parallèle avec le morceau de ligne relié au récepteur de façon que l'impédance équivalente à ces deux impédances en parallèle soit égale à l'impédance Z_c du morceau de ligne relié à la source ; il y a alors adaptation parfaite, et à ce moment il n'y a plus d'ondes stationnaires entre la source et le stub.

Il est plus commode ici d'utiliser les admittances.

Et, de même que nous avons posé $Z_1 = Z_r/Z_c$, nous appellerons *admittance réduite* l'expression :

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{Y_r}{Y_c} \qquad \left(Y_c = \frac{1}{Z_c}\right)$$

$$Y_1 = \frac{1 - \rho \exp(-2\mathrm{j}\beta l)}{1 + \rho \exp(-2\mathrm{j}\beta l)}$$

$$= \frac{1 - U_1}{1 + U_1}. \qquad [U_1 = \rho \exp(-2\mathrm{j}\beta l)]$$

On en tire :

$$U_1 = \frac{1 - Y_1}{1 + Y_1},$$

et on aura :

$$U_1 = a + \mathrm{j}b = \frac{1 - Y_1}{1 + Y_1}$$

$$= \frac{1 - (G + \mathrm{j}B)}{1 + (G + \mathrm{j}B)}.$$

En écrivant $Y_1 = G + \mathrm{j}B$ et, en résolvant cette équation comme nous l'avons fait précédemment pour Z_1, on verrait que l'abaque s'utilise de la même façon en substituant G à R et B à X, avec $+ B$ pour $+ X$ et $- B$ pour $- X$.

L'abaque de SMITH peut ainsi être utilisé pour le calcul des admittances avec l'échelle des ρ, l'angle de rotation étant compté depuis 180°.

Le calcul d'un *stub* en court-circuit exige le calcul de sa longueur et celui de sa distance au récepteur (on suppose toujours un stub sans pertes).

Faisons un exemple numérique.

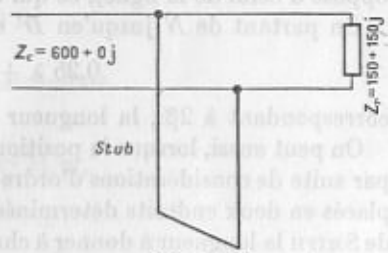


FIG. 5-10.

5-14. **Problème VII.** — *Déterminer un stub en court-circuit et chercher sa distance au récepteur afin d'adapter une ligne dont* $Z_c = 600 + 0\mathrm{j}$ *à un récepteur dont* $Z_r = 150 + 150\mathrm{j}$ (*fig.* 5-10).

— L'impédance caractéristique Z_c du stub doit être la même que celle de la ligne, on aura ainsi :

$$Z_c = 600 + 0\mathrm{j}, \qquad Y_c = 1/Z_c = 0{,}001\,67 \text{ mho},$$
$$Z_r = 150 + 150\mathrm{j}, \qquad Y_r = 1/Z_r = 0{,}003\,3 - 0{,}003\,3\,\mathrm{j}.$$

On en déduit :

$$\frac{Y_r}{Y_c} = \frac{0{,}0033 - 0{,}0033\,\mathrm{j}}{0{,}00167} = 2 - 2\mathrm{j},$$

et l'on est ainsi ramené, en remplaçant les impédances par les admittances, à un problème identique aux précédents.

a) *Calcul de la distance du stub au récepteur.*

Plaçons le point $2 - 2\mathrm{j}$, soit le point A de la figure 5-9. Traçons le cercle de rayon OA et tournons vers la source jusqu'en C (où $G = 1$) où nous lisons $1 - 6\mathrm{j}$. Le stub sera placé en ce point sur la ligne, puisque, en ce point :

$$G = 1/Z_c = Y_c$$

d'où

$$G = Y_c/Y_c = 1.$$

L'angle correspondant pour aller de A en C, est égal à 22° et correspond à $2\beta l$ d'où $\beta l = 11°$.

On en déduira l connaissant β et Z_c, l étant exprimée en fraction de $\overline{Z}_c$. D'ailleurs, sur la figure 5-9 nous lisons sur le cercle périphérique :

pour A, 0,291 λ,
pour C, 0,321 λ,

soit une différence de 0,03 λ, qui est la distance du stub au récepteur.

b) *Calcul de la longueur du stub.* — Partons du point N, où l'on a :

$$Y_{stub}/Y_c = 0,$$

et tournons sur le grand cercle de $G = 0$, passant par M et N, jusqu'à l'intersection avec la courbe de $X = +1{,}58$ (il faut en effet une réactance du type opposé à celui de la ligne), ce qui donne le point D, d'où le point D' (0,178 λ).

En partant de N jusqu'en D' on aura

$$0{,}25\ \lambda + 0{,}178\ \lambda = 0{,}428\ \lambda$$

correspondant à $2\beta l$, la longueur du stub sera donc la moitié, soit 0,214 λ.

On peut aussi, lorsque la position d'un stub à un endroit donné est impossible par suite de considérations d'ordre matériel, utiliser deux stubs en court-circuit placés en deux endroits déterminés à l'avance, et fixés, et calculer par l'abaque de SMITH la longueur à donner à chacun d'eux pour qu'il y ait adaptation à une ligne donnée, afin de supprimer les ondes stationnaires dans la portion de ligne reliée à la source.

5-15. **Adaptation par une ligne quart d'onde.** — On peut utiliser aussi une ligne en quart d'onde, sans pertes, entre un récepteur et une ligne, son impédance caractéristique pouvant être différente de celle de la ligne. En déterminant cette impédance caractéristique R_c, ainsi que l'emplacement de cette ligne en λ/4, on peut obtenir à l'entrée l'impédance désirée.

On a vu que l'impédance d'entrée d'une telle ligne est

$$Z_0 = R_c^2/Z_r.$$

Il faudra placer cette ligne de façon que la réactance à l'entrée de la ligne quart d'onde soit la même, mais de signe contraire, que la réactance de la charge. On règle ensuite R_c à la valeur convenable.

5-16. **Problème VIII. Exemple d'adaptation sans l'emploi de l'abaque de Smith.** — *Soit à adapter, par une ligne en λ/4, un récepteur $Z_r = 700 + 0\mathrm{j}$ à une source faisant $Z_s = 200 + 0\mathrm{j}$, avec $f = 50$ Mc. calculer les constantes de cette ligne.*

— On a

$$\lambda = \frac{\Upsilon}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{50 \cdot 10^6} = 6\ \mathrm{m},$$

d'où $\lambda/4 = 1{,}5$ m.

L'impédance caractéristique $Z_c = R_c + 0\mathrm{j}$ de la ligne quart d'onde devra être :

$$Z_c = \sqrt{Z_r \cdot Z_s} = \sqrt{700 \cdot 200} = 374\ \Omega.$$

La source débitera ainsi sur une impédance égale à

$$Z = \frac{374^2}{700} = 200\ \Omega.$$

et, à l'extrémité de la ligne, les 700 Ω du récepteur seront branchés sur une impédance égale à :

$$\frac{374^2}{200} = 700\ \Omega,$$

il y a ainsi *adaptation parfaite* aux deux extrémités.

On a, d'autre part :

$$L = 4 \ln \frac{d}{r} \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H/m},$$

et

$$C = \frac{1}{36 \cdot 10^9 \ln (d/r)}\ \mathrm{F/m},$$

où d est la distance d'axe en axe des fils et r leur rayon.

Comme on a

$$Z^2 = L/C = Z_r \cdot Z_c = 700 \cdot 200 = 140\,000,$$

il vient, en remplaçant L/C par sa valeur :

$$14\,400 \left(\ln \frac{d}{r}\right)^2 = 140\,000,$$

d'où

$$\ln \frac{d}{r} = \sqrt{\frac{140\,000}{14\,400}} = 3{,}12,$$

$$d/r = 22{,}5 \quad \text{et} \quad d = 22{,}5\, r.$$

Si, par exemple, $r = 1$ mm, on obtient $d = 22{,}5$ mm. La ligne est ainsi complètement déterminée.

5-17. **Problème IX. Exemple d'adaptation utilisant l'abaque de Smith.** — *On a une ligne dont* $Z_c = 100 + 0\text{j}$, *qui est terminée sur son impédance caractéristique* $Z_r = 100 + 0\text{j}$. *On désire à l'entrée de la ligne une impédance* $Z_0 = 80 - 80\text{j}$ *en plaçant, à la distance voulue, une ligne quart d'onde.*

Calculer l'impédance caractéristique $Z'_c = R'_c + 0\text{j}$ *de cette ligne quart d'onde, ainsi que sa distance à l'entrée de la ligne* (fig. 5-11).

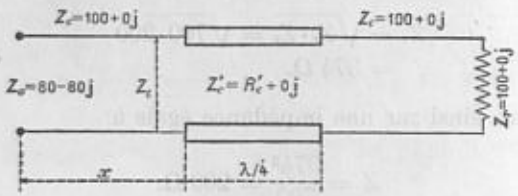


FIG. 5-11.

— L'impédance réduite à l'entrée de la ligne est :

$$Z_1 = \frac{Z_0}{Z_c} = \frac{80 - 80\text{j}}{100} = 0{,}8 - 0{,}8\,\text{j}.$$

Puisque la charge est ohmique pure, l'impédance d'entrée Z_t de la ligne quart d'onde sera aussi ohmique pure et lue sur l'abaque sur le grand diamètre horizontal.

Plaçons le point A correspondant à $0{,}8 - 0{,}8\text{j}$ (fig. 5-12). En vue d'obtenir l'impédance d'entrée Z_0, le point représentant Z_t doit se trouver sur le même cercle (de centre 1) que le point A. Traçons ce cercle, ce qui donne les deux points B et C. Ces deux points peuvent convenir théoriquement, mais prenons plutôt le point B qui donnera une valeur R'_c inférieure à l'impédance caractéristique de la ligne.

Déterminons ensuite le point D à l'extrémité du rayon passant par A, et où nous lisons 0,361 λ en tournant vers la source, ce qui donne la distance l.

En B nous lisons $0{,}42 + 0\text{j}$, qui est l'impédance réduite de la ligne quart d'onde.

Étant donnée la relation $Z = R_r^2/Z_c$ pour une ligne quart d'onde, l'impédance réduite de R'_c sera la moyenne géométrique des impédances réduites de 1 et 0,42.

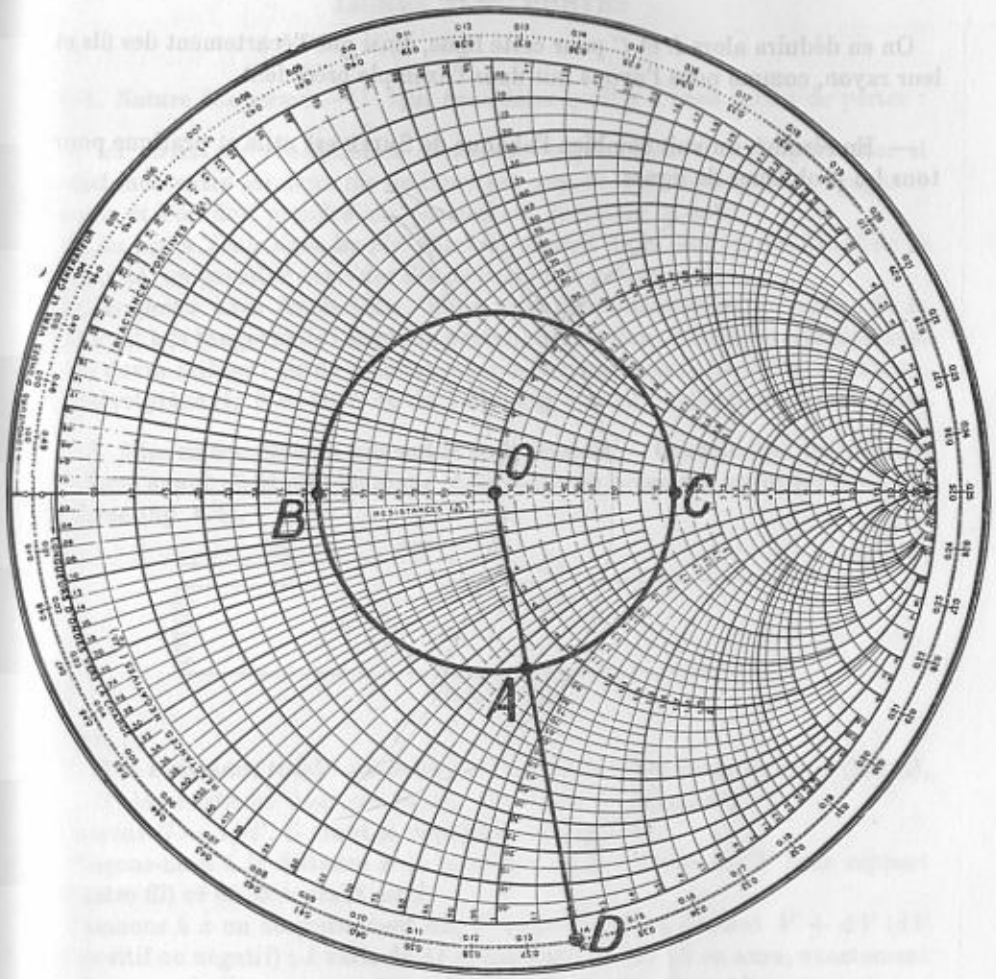


FIG. 5-12.

On a

$$\sqrt{1 \cdot 0{,}42} = 0{,}65$$

d'où, puisque

$$Z_r = 100 + 0\mathrm{j},$$

on déduit

$$R = 65\ \Omega.$$

On en déduira alors L et C pour cette ligne, ainsi que l'écartement des fils et leur rayon, comme nous l'avons fait dans l'exemple précédent.

— En résumé, on voit combien l'abaque de SMITH est utile et pratique pour tous les problèmes de lignes.

CHAPITRE VI

LIGNES AVEC PERTES

6-1. **Nature des pertes.** — Il faut considérer qu'il y a trois sortes de pertes :

a) *les pertes par rayonnement électromagnétique.* Elles sont importantes si la distance entre les deux fils de ligne est grande par rapport à la longueur d'onde, et l'on doit prendre un écartement inférieur à $\lambda/10$.

b) *les pertes Joule dans les fils.* Elles dépendent de la section des fils et de la résistivité, on prendra donc des fils de cuivre de grosse section.

c) *les pertes dans les isolants.* Elles sont proportionnelles au carré de la D.D.P. et à la tangente de l'angle de pertes, comme dans tous les condensateurs.

On devra utiliser l'air de préférence ou, à la rigueur dans les câbles coaxiaux, du polystyrène (tg $\delta = 10^{-4}$) ou du Téflon (tg $\delta = 10^{-4}$) plus facile à travailler.

6-2. **Mise en équation du courant et de la tension.** — Considérons maintenant une ligne ayant résistance ohmique et un mauvais isolement entre les deux fils de ligne (fig. 6-1).

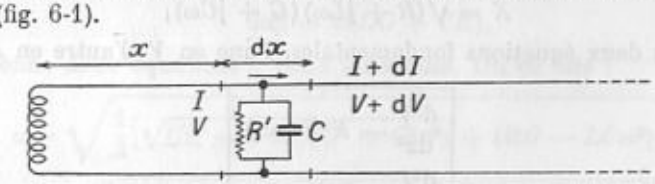


FIG. 6-1.

Soit :

R la résistance totale des deux fils par unité de longueur de ligne (le km),

R' la résistance due aux fuites, par unité de longueur,

et posons $G = 1/R'$, G étant la conductance (fig. 6-1).

Plaçons-nous à la distance x de la source où la tension est V (par rapport à l'autre fil) et où le courant est I.

Donnons à x un accroissement $\mathrm{d}x$, V varie de $\mathrm{d}V$ et devient $V + \mathrm{d}V$ ($\mathrm{d}V$ est positif ou négatif) ; I varie de $\mathrm{d}I$ et devient $I + \mathrm{d}I$, et on aura, exactement comme pour la ligne sans pertes, l'équation suivante, en se plaçant en régime permanent :

$$V - (V + \mathrm{d}V) = (R\mathrm{d}x + \mathrm{j}L\mathrm{d}x\omega)I$$

ou

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = (R + \mathrm{j}L\omega)I} \qquad (6\text{-}1)$$

où $R + \mathrm{j}L\omega$ est l'impédance série.

Le courant de capacité $j(C\,dx)V\omega$ s'ajoute au courant de fuite

$$\left(\frac{V}{R'}\right)dx = G\,dx \cdot V,$$

ce qui donne :

$$I - (I + dI) = jC\,dxV\omega + G\,dxV = V\,dx(G + jC\omega),$$

soit :

$$\boxed{-\frac{dI}{dx} = (G + jC\omega)V} \qquad (6\text{-}2)$$

où $G + jC\omega$ est l'admittance parallèle.

Dérivons les équations 6-1 et 6-2 :

$$-\frac{d^2V}{dx^2} = (R + jL\omega)\frac{dI}{dx} = (R + jL\omega)[-(G + jC\omega)V]$$

et

$$-\frac{d^2I}{dx^2} = (G + jC\omega)\frac{dV}{dx} = (G + jC\omega)[-(R + jL\omega)I],$$

ou, en posant :

$$K^2 = (R + jL\omega)(G + jC\omega)$$
$$K = \sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)},$$

on aura les deux équations fondamentales, l'une en V, l'autre en I :

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d^2V}{dx^2} - K^2V &= 0\\ \frac{d^2I}{dx^2} - K^2I &= 0.\end{aligned}} \qquad (6\text{-}3)$$

6-3. **Résolution.** — Ces deux équations sont des équations différentielles du second ordre, incomplètes, sans second membre et à coefficient constant.

L'équation caractéristique est

$$a^2 - K^2 = 0,$$

ou

$$a = \pm K.$$

On aura ainsi pour la première des deux équations (6-3) :

$$V = A\exp(Kx) + B\exp(-Kx). \qquad (6\text{-}4)$$

L'équation (6-1) donne alors :

$$I = -\frac{K[A\exp(Kx) - B\exp(-Kx)]}{R + jL\omega}$$
$$= -\frac{A\exp(Kx) - B\exp(-Kx)}{Z_c}$$

en posant :

$$\boxed{Z_c = \sqrt{\frac{R + jL\omega}{G + jC\omega}}}. \qquad (6\text{-}5)$$

On verrait facilement, par les équations aux dimensions, que cette expression a la dimension d'une impédance. On remarque qu'elle est indépendante de x, et comme elle est ainsi constante en tous points de la ligne on l'appelle *l'impédance caractéristique* Z_c.

— Posons

$$K = \sqrt{R + jL\omega}\cdot\sqrt{G + jC\omega} = \alpha + j\beta \qquad [6\text{-}6)$$

que l'on appelle *la constante de propagation.*

Calculons α et β. On a :

$$K^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + 2j\alpha\beta,$$

or, d'autre part, K^2 est aussi égal, d'après l'équation (6-6) à :

$$K^2 = (RG - LC\omega^2) + j\omega(LG + CR).$$

Identifions :

$$\alpha^2 - \beta^2 = RG - LC\omega^2$$
$$2\alpha\beta = \omega(LG + CR),$$

ce qui donne deux équations à deux inconnues. On en tire :

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(R^2 + L^2\omega^2)(G^2 + C^2\omega^2)} + (RG - LC\omega^2)\right]} \qquad (6\text{-}7)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(R^2 + L^2\omega^2)(G^2 + C^2\omega^2)} - (RG - LC\omega^2)\right]}, \qquad (6\text{-}8)$$

α s'appelle *le coefficient d'affaiblissement*, il s'exprime en Népers ou en décibels par km,

β s'appelle *la constante de longueur d'onde*, ou constante de phase, elle s'exprime en radians par km.

On verra que ces deux appellations sont particulièrement bien choisies.

— Transformons ces deux formules de α et β.

Si dans ces deux formules on ajoute et on retranche $2LCRG\omega^2$ au produit des deux premières parenthèses, on obtient :

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(RG + LC\omega^2)^2 + \omega^2(LG - CR)^2} + (RG - LC\omega^2)\right]} \qquad (6\text{-}9)$$

et

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(RG + LC\omega^2)^2 + \omega^2(LG - CR)^2} - (RG - LC\omega^2)\right]}.$$

Mais on voit aussitôt que, si l'on réalise la condition :

$$\boxed{LG = CR}$$

appelée *condition d'Heaviside*, du nom du savant anglais qui l'a trouvée, α est *minimum* puisque la parenthèse du milieu s'annule et il reste :

$$\alpha_{min.} = \sqrt{RG} \quad \text{et} \quad \beta = \omega\sqrt{LC}. \tag{6-10}$$

Il en résulte une conséquence tout à fait remarquable : c'est que α *est indépendant de la fréquence* ; nous verrons alors au paragraphe suivant que toutes les fréquences seront également transmises : *il n'y aura pas de distorsions.*

— D'ailleurs on aurait pu trouver la condition pour que α soit minimum en annulant la dérivée de α par rapport à L, ou mieux, pour simplifier les calculs, la dérivée de α^2. On trouve :

$$\frac{\mathrm{d}(\alpha^2)}{\mathrm{d}L} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{G^2 + C^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2}} \cdot 2L\omega^2 - 2C\omega^2\right] = 0$$

ou

$$(G^2 + C^2\omega^2)L^2 = (R^2 + L^2\omega^2)C^2,$$

et enfin

$$LG = CR.$$

Si dans K on remplace $\mathrm{j}L\omega$ par $\mathrm{j}C\omega R/G$, on trouve :

$$K = \alpha + \mathrm{j}\beta = \sqrt{RG} + \mathrm{j}\omega\sqrt{LC}.$$

— En pratique LG est beaucoup plus petit que CR, c'est pourquoi, dans la téléphonie par lignes, on augmente l'inductance L de la ligne :

a) Soit par le procédé du savant américain PUPIN, en plaçant, en série dans la ligne, des inductances de valeurs convenables régulièrement espacées.

b) Soit par le procédé du savant danois KRARUP, en enroulant autour du fil de cuivre, et à spires jointives, un fil magnétique fin, à haute perméabilité, tel que le Permalloy dont μ atteint 100 000, et même 120 000. On sait que le permalloy est saturé dans le champ magnétique terrestre.

C'est grâce à ces admirables perfectionnements qu'on était arrivé, avant la guerre de 1914, à une époque où il n'y avait pas d'amplificateurs, à téléphoner de Paris à Berlin, et de Paris à Rome ! Grâce aussi à un magnifique microphone à charbon (I = 300 mA) qui avait été fabriqué par la Société Industrielle des Téléphones.

— En résumé, l'augmentation de L a pour effet d'augmenter K (son module et son décalage), de réduire α, de réduire λ et la vitesse de propagation γ,

d'augmenter Z_c, ce qui diminue l'intensité du courant de ligne, et enfin de tendre à égaliser les valeurs de α et de γ pour toutes les fréquences, donc d'obtenir beaucoup moins de distorsions.

Mais en H.F., on peut considérer que :

$$R = 0 \quad \text{et} \quad G = 0, \qquad (R' = \infty)$$

il reste alors

$$\boxed{Z_c = \sqrt{L/C}}.$$

6-4. **Cas d'une ligne à faibles pertes.** — Très souvent l'amortissement dû à R et à la conductance G est faible, on peut alors simplifier les formules.

Supposons que l'on ait :

$$G = 0 \quad \text{et} \quad R^2 \ll L^2\omega^2.$$

Dans ce cas on obtient :

$$Z_c = \sqrt{\frac{R + \mathrm{j}L\omega}{\mathrm{j}C\omega}} = \sqrt{\frac{\mathrm{j}L\omega \cdot R/\mathrm{j}L\omega}{\mathrm{j}C\omega} + \frac{\mathrm{j}L\omega}{\mathrm{j}C\omega}}$$
$$= \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 - \mathrm{j}\frac{R}{L\omega}}.$$

Or, on sait que, d'après un développement en série de MAC-LAURIN, et si $x \ll 1$, on peut écrire :

$$\sqrt{1 - x} = 1 - (x/2).$$

On aura donc, puisque $R \ll L\omega$:

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}\left(1 - \mathrm{j}\frac{R}{2L\omega}\right).$$

De même, on aura :

$$K = \sqrt{(R + \mathrm{j}L\omega)(0 + \mathrm{j}C\omega)}$$
$$= \sqrt{-LC\omega^2} \cdot \sqrt{1 - \mathrm{j}\frac{R}{L\omega}} = \sqrt{-LC\omega^2}\left(1 - \mathrm{j}\frac{R}{2L\omega}\right),$$

et, en posant $R/2L\omega = \delta$ qu'on pourra appeler *coefficient d'amortissement de la ligne*, on obtient :

$$Z_c \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (\text{avec } \mathrm{tg}\,\varphi = \delta)$$
$$\alpha = \sqrt{\frac{R^2C}{4L}} = \frac{R}{2Z_c}$$
$$\beta = \sqrt{LC\omega^2}$$

d'où

$$\frac{\alpha}{\beta} = \delta,$$

ce qui simplifierait les calculs.

6-5. **Valeur de la constante de propagation K dans le cas d'une ligne en haute fréquence.** — On peut donner à K une valeur simplifiée, facilitant les calculs, dans le cas d'une ligne avec de la haute fréquence.

En effet, K peut s'écrire :

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)} \\ &= [(RG - LC\omega^2) + j\omega(LG + CR)]^{1/2} \\ &= (a + jb)^{1/2}. \end{aligned}$$

Or, en développant $(a + jb)^{1/2}$ par la formule du binôme de NEWTON (voir le Tome II de notre *Cours élémentaire de Mathématiques supérieures*, Éditeur Dunod), on obtient :

$$(a + jb)^{1/2} = a^{1/2} + \frac{1}{2}\frac{jb}{a^{1/2}} - \frac{1}{8}\frac{(jb)^2}{a^{3/2}} + \cdots$$

d'où

$$K = (RG - LC\omega^2)^{1/2} + \frac{1}{2}\frac{j\omega(LG + CR)}{(RG - LC\omega^2)^{1/2}} - \frac{1}{8}\frac{[j\omega(LG + CR)]^2}{(RG - LC\omega^2)^{3/2}} + \cdots$$

Mais, *si* ω *est très grande*, on a

$$RG \ll LC\omega^2,$$

et il reste :

$$K = \alpha + j\beta \approx j\omega\sqrt{LC} + \frac{LG + RC}{2\sqrt{LC}} + j\frac{[LG + RC]^2}{8\omega(LC)^{3/2}} + \cdots,$$

le troisième terme est négligeable par rapport au premier, et on obtient en identifiant :

$$\alpha = \frac{LG + CR}{2\sqrt{LC}}$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC}.$$

Remarque. Au contraire, en très basse fréquence, on aurait :

$$RG \gg LC\omega^2,$$

et on obtiendrait :

$$\alpha = \sqrt{RG} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\omega(LG + CR)}{2\sqrt{RG}}.$$

Dans ce cas la vitesse de propagation devient :

$$\gamma = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\sqrt{RG}}{LG + RC},$$

et si l'on a

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

il reste

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

soit la vitesse de la lumière.

6-6. **Cas d'une ligne à forte inductance.** — On sait que, si $x \ll 1$, on peut écrire (d'après le développement en série de MAC-LAURIN) :

$$\sqrt{1 + x} \approx 1 + x/2.$$

Or, on peut écrire successivement :

$$R + jL\omega = jL\omega\left[1 + \frac{R}{jL\omega}\right] \qquad (L\omega \gg R)$$

donc

$$\sqrt{R + jL\omega} = \sqrt{jL\omega}\left[1 + \frac{R}{2jL\omega}\right].$$

De même, puisque $G \ll C\omega$:

$$\sqrt{G + jC\omega} = \sqrt{jC\omega}\left[1 + \frac{G}{2jC\omega}\right].$$

On aura ainsi :

$$\begin{aligned} K = \alpha + j\beta &= \sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)} \\ &= j\omega\sqrt{LC}\left[1 + \frac{R}{2jL\omega}\right]\left[1 + \frac{G}{2jC\omega}\right] \end{aligned}$$

ou

$$\alpha + j\beta \approx j\omega\sqrt{LC}\left(1 + \frac{R}{2jL\omega} + \frac{G}{2jC\omega}\right).$$

En identifiant, on obtient :

$$\alpha = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC}.$$

On voit que α est indépendant de la fréquence, dans la limite des approximations faites : toutes les fréquences sont donc également bien transmises.

On peut chercher à rendre α minimum, L étant la seule variable, en annulant $d\alpha/dL$; on trouve :

$$\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

d'où

$$LG = CR,$$

c'est la formule d'Heaviside déjà trouvée plus haut.

6-7. **Cas d'une ligne théoriquement infinie.** — Pour $x = \infty$, $V = 0$, et dans l'équation 6-4 on aura $A = 0$, d'où :

$$V = V_0 \exp(-Kx)$$

et

$$I = -\frac{dV/dx}{R + jL\omega} = \frac{KV_0 \exp(-Kx)}{R + jL\omega}$$

$$= \sqrt{\frac{G + jC\omega}{R + jL\omega}} V_0 \exp(-Kx),$$

ou, en posant :

$$\sqrt{\frac{R + jL\omega}{G + jC\omega}} = Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{\frac{1 - (jR/L\omega)}{1 - (jG/C\omega)}}$$

qui a les dimensions d'une impédance, on aura finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} V &= V_0 \exp(-Kx) \\ I &= \frac{V_0}{Z_c} \exp(-Kx) \end{aligned}} \qquad (6\text{-}11)$$

C'est ici que l'on voit bien que l'expression que nous avions appelé Z_c au début est bien l'impédance en un point de la ligne, puisque l'on a :

$$\boxed{\frac{V}{I} = Z_c = \sqrt{\frac{R + jL\omega}{G + jC\omega}}} \qquad (6\text{-}12)$$

et, comme cette quantité est constante puisqu'elle ne contient pas x, elle caractérise la ligne, ce qui justifie son nom d'*impédance caractéristique*. Mais ici elle dépend de ω, alors que dans la ligne sans pertes elle n'en dépend pas.

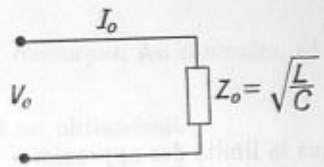


FIG. 6-2.

La source débite donc aussi sur Z_c (fig. 6-2), puisque l'on a :

$$V_0/I_0 = Z_c.$$

Les équations 6-11 montrent que V et I décroissent exponentiellement le long de la ligne.

— D'autre part, on peut écrire :

$$\exp(-Kx) = \exp(-\alpha x) \cdot \exp(-j\beta x)$$
$$= [\exp(-\alpha x)](\cos \beta x - j \sin \beta x),$$

il en résulte que :

$$\left.\begin{aligned} V &= V_0 [\exp(-\alpha x)](\cos \beta x - j \sin \beta x) \\ I &= \frac{V_0}{Z_c} [\exp(-\alpha x)](\cos \beta x - j \sin \beta x), \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}13)$$

dont les valeurs instantanées sont :

$$\left.\begin{aligned} v &= V_0 [\exp(-\alpha x)] \sin(\omega t - \beta x) \\ i &= \frac{V_0}{Z_c} [\exp(-\alpha x)] \sin(\omega t - \beta x). \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}14)$$

Ainsi, l'affaiblissement dépend de $\exp(-\alpha x)$ (et le déphasage de βx), ce qui justifie bien le nom que l'on a donné à α de *coefficient d'affaiblissement.*

— On voit maintenant que v et i passent périodiquement par des maxima et des minima chaque fois que βx augmente de 2π ; *cette distance constante est donc la longueur d'onde* λ :

$$\lambda = 2\pi/\beta. \qquad (6\text{-}15)$$

C'est la distance au bout de laquelle le déphasage a varié de 2π, d'où le nom de *constante de longueur d'onde* donné à β.

Les formules (6-14) sont à rapprocher des formules (1-11) de la ligne sans pertes : on a encore des ondes progressives, mais qui s'amortissent avec la distance x (fig. 1-4 de la ligne sans pertes).

6-8. **Ligne sans distorsion.** — Si on appelle γ la vitesse de propagation dans le fil ($\gamma = F \cdot \lambda$) on a :

$$\gamma = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\omega}{\beta} \qquad (6\text{-}16)$$

qui dépend de ω, *l'affaiblissement varie donc avec la fréquence*, c'est une cause grave de distorsion, surtout en téléphonie.

Il y a cependant un cas où γ serait la même pour toutes les fréquences, c'est celui où $LG = CR$. En effet, puisque l'on a :

$$\alpha = \sqrt{GR} \quad \text{et} \quad \beta = \omega\sqrt{LC},$$

on obtient :

$$\gamma = \frac{\omega}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (6\text{-}17)$$

c'est le câble sans déformations.

Dans ce cas, la condition $LG = CR$ portée dans l'équation (6-12) donne aussitôt :

$$Z_c = \sqrt{L/C}$$

qui est *la même valeur que pour la ligne sans pertes, et est indépendante de* ω, *ce qui est tout à fait remarquable.*

6-9. **Quelques données numériques.** — Dans un certain câble téléphonique standard, par kilomètre de longueur de ligne (soit 2 km de fils de cuivre) :

$$G = 0, \qquad R = 55\ \Omega, \qquad C = 0{,}031\ \mu\text{F}, \qquad L = 0{,}000\,63\ \text{H}.$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de α, β, λ, γ pour trois fréquences :

K (c/s)	ω	α (népers)	β (rd)	λ (km)	γ (km/s)
83	500	0,034	0,034	296	24 000
830	5 000	0,104	0,108	100	80 000
8 300	50 000	0,253	0,435	25,6	200 000

— Voici maintenant d'autres valeurs qui complètent celles de la ligne sans pertes :

a — *pour deux fils parallèles en cuivre* (et à 20 °C) :

$$R = 8{,}4\frac{\sqrt{F}}{a}\ \mu\Omega/\text{m}$$

où a est le rayon du fil en cm, et F la fréquence en c/s.

D'autre part, on a :

$$Z_c = \sqrt{(R + \mathrm{j}L\omega)(G + \mathrm{j}C\omega)} = R_c + \mathrm{j}X_c$$

avec

$$R_c = 276 \lg \frac{D}{a}, \qquad (D, \text{ distance des fils})$$

Z_c varie de 400 à 800 Ω en pratique, sauf en télévision où elle peut descendre vers 100 Ω.

b — *pour un câble coaxial*, avec les mêmes symboles que pour la ligne sans pertes :

$$R = \frac{4{,}2\sqrt{F}}{b}\left(\frac{b}{a} + 1\right)\ \mu\Omega/\text{m}$$

$$R_c = \frac{138}{\sqrt{\varepsilon}} \lg \frac{b}{a}\ \Omega$$

où ε est la constante diélectrique de l'isolant interne. On a aussi

$$\alpha = \frac{\sqrt{F\varepsilon}\,[(b/a) + 1]}{65{,}7 \lg (b/a)}.$$

Si b reste constant, α est minimum pour

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}a} = 0,$$

on tombe sur une équation transcendante, dont la résolution graphique donne, avec $\varepsilon = 1$ dans l'air :

$$b/a = 3{,}6.$$

Dans ce cas

$$\alpha_{\text{min.}} = 0{,}13\frac{\sqrt{F\varepsilon}}{b}10^{-6}\ \text{Np/m}.$$

On trouve alors

$$R_c = 77\ \Omega.$$

Le rapport b/a peut varier de 2 à 6 sans changer notablement la valeur du minimum de α.

— Voici quelques valeurs numériques pour deux câbles coaxiaux :

1° Câble de 50 Ω ($Z_c = 50\ \Omega$) :

$$L = 0{,}25\ \mu\text{H/m}$$
$$C = 95\ \text{pF/m}.$$

2° Câble de 75 Ω ($Z_c = 75\ \Omega$) :

$$L = 0{,}37\ \mu\text{H/m}$$
$$C = 72\ \text{pF/m}.$$

La valeur de α minimum pour le câble de 75 Ω, où $b = 0{,}55$ cm, est, avec de l'air :

pour 10 000 Mc/s,

$$\alpha = \frac{0{,}13\sqrt{10^{10}}}{0{,}55} \cdot 10^{-6} = \frac{0{,}013}{0{,}55}\ \text{Np/m},$$

et pour 100 mètres :

$$\alpha = \frac{1{,}3}{0{,}55} = 24\ \text{Np}$$

ou, en décibels :

$$\alpha = 2{,}4 \cdot 8{,}68 = 20\ \text{dB}.$$

Pour 100 Mc/s on aurait

$$\alpha \approx 2\ \text{dB}.$$

Pertes dans la câbles coaxiaux.

Dès que la fréquence devient très grande, par exemple au-dessus de $f = 10^7$ c/s, les pertes augmentent beaucoup dans l'isolant du coaxial.

Ainsi, par exemple, avec un coaxial ayant au centre un fil de cuivre de 0,05 cm de rayon, le tube extérieur ayant un diamètre intérieur de un cm, et l'isolant

ayant $\varepsilon/\varepsilon_0 = 2{,}3$ (avec $\operatorname{tg}\delta = 5\cdot10^{-4}$), on a les valeurs du tableau pour le pourcentage de pertes :

F (c/s)	Atténuation totale (dB/mi)	Pourcentage de pertes		
		fil central	tube extérieur	isolant
10^3	$5{,}35\cdot10^{-3}$	70	26	1
10^7	$4{,}78\cdot10^{-2}$	71	25	4
10^8	$5 \cdot 10^{-2}$	65	23	12
10^9	$3{,}86\cdot10^{-1}$	52	19	29
10^{10}	1,93	31	12	57

Ainsi, en passant de $F = 10^8$ à $F = 10^{10}$, les pertes dans l'isolant deviennent près de 60 fois plus grandes.

6-10. **Exemples numériques.**

Exemple I. — Soit un circuit téléphonique formé de deux fils de cuivre pour lequel on a, par km de ligne :

$$R = 8{,}25\ \Omega, \qquad L = 1{,}37\ \text{mH}, \qquad C = 0{,}0084\ \mu\text{F}, \qquad G = 0.$$

— Pour $\omega = 1\,000$, on trouve :

$$R^2 + L^2\omega^2 = 70 \qquad \text{et} \qquad C\omega = 8{,}4\cdot10^{-6},$$

et les formules 6-7 et 6-8 donnent :

$$\alpha = 5{,}4\cdot10^{-3} \qquad \text{et} \qquad \beta = 6{,}4\cdot10^{-3}.$$

On trouve enfin :

$$\gamma = \frac{\omega}{\beta} = \frac{10^3}{6{,}4\cdot10^{-3}} = 156\,250\ \text{km/s},$$

$$\lambda = \frac{\omega}{F} = \frac{2\pi}{\beta} = 981\ \text{km}.$$

Si l'on prend maintenant $\omega = 10\,000$, on trouve :

$$\alpha = 9{,}6\cdot10^{-3} \qquad \text{et} \qquad \beta = 35{,}3\cdot10^{-3},$$

avec :

$$\gamma = 283\,200\ \text{km/s} \qquad \text{et} \qquad \lambda = 178\ \text{km}.$$

Ainsi, en décuplant la fréquence, on a à peu près doublé α et diminué λ.

Exemple II (d'après Pauche et Jannès). — *Soit un circuit aérien en fils de 3 mm distant de 30 cm, et pour lequel on a :*

$$R = 5\ \Omega, \qquad L = 2{,}36\ \text{mH}, \qquad C = 5\cdot10^{-9}\ \text{F}, \qquad G = 10^{-6}\ \text{mho}.$$

Calculer Z_c.

Pour $\omega = 5\,000$ ($F = 800$), on a :

$$R + jL\omega = 5 + j\,11{,}8 = 12{,}8\ \exp.\ (67j)$$
$$G + jC\omega = 10^{-6} + j\,25\cdot10^{-6}$$
$$= 25\cdot10^{-6}\ \exp\ (87j),$$

d'où :

$$\bar{Z} = \sqrt{\frac{R + jL\omega}{G + jC\omega}} = \sqrt{\frac{12{,}8}{25}}\cdot10^3\ \exp\left[\left(\frac{67 - 87}{2}\right)j\right]$$
$$= 721\ \exp\ (-10\,j),$$

soit un module de :

$$Z_c = 721\ \Omega.$$

Exemple III. — Soit un câble de télévision pour lequel les constantes sont :

$$R = 10\ \Omega, \qquad L = 352\ \mu\text{H}, \qquad C = 44\cdot10^{-9}\ \text{F}, \qquad G = 34\cdot10^{-5}\ \text{mho}.$$

— On a ici :

$$L\omega \gg R, \qquad \text{et} \qquad Z_c = \sqrt{L/C} \approx 90\ \Omega.$$

On aura :

$$\alpha = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{10}{2\cdot90} + \frac{34\cdot10^{-5}}{2}\cdot90$$
$$= 0{,}056 + 0{,}015 = 0{,}071.$$

Exemple IV. — Calcul des constantes d'une ligne. Les constantes d'une ligne sont, par km de ligne : $R = 10\ \Omega$, $L = 0{,}003\,7$ H, $C = 0{,}008\,3\cdot10^{-6}$ F, $G = 0{,}4\cdot10^{-6}$ mhos, $f = 1\,000$. Calculer Z_c, K, α et β.

— On a

$$Z_c = \sqrt{\frac{R + jL\omega}{G + jC\omega}} = \sqrt{\frac{10 + j\,23{,}3}{(0{,}4 + j\,52)10^{-6}}}$$
$$= \sqrt{\frac{25{,}3\ \angle 66{,}8°}{52{,}1\cdot10^{-6}\ \angle 89{,}6°}} = \sqrt{48{,}5\cdot10^4\ \angle -22{,}8°}$$
$$= 697\ \angle -11{,}4° = 683 - 138\,j\ ;$$
$$K = \sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)}$$
$$= \sqrt{(25{,}3\ \angle 66{,}8°)(52{,}1\cdot10^{-6}\ \angle 89{,}6°)}$$
$$= \sqrt{13{,}2\cdot10^{-4}\ \angle 156{,}4°} = 0{,}0363\ \angle 78°$$
$$= 0{,}007\,4 + j\,0{,}035\,6\ \text{par km} = \alpha + j\beta\ ;$$

d'où

$$\alpha = 0{,}007\,4\ \text{Np/km},$$
$$\beta = 0{,}035\,6\ \text{rd/km}.$$

CHAPITRE VII

CAS GÉNÉRAL D'UNE LIGNE DE LONGUEUR FINIE LIGNES OUVERTE ET EN COURT-CIRCUIT

7-1. Équations générales de propagation. — Partons de l'équation (6-4) que nous écrivons à nouveau :

$$V = A \exp(Kx) + B \exp(-Kx).$$

L'équation (6-1) donne alors :

$$I = -\frac{K[A \exp(Kx) - B \exp(-Kx)]}{R + jL\omega} = -\frac{A \exp(Kx) - B \exp(-Kx)}{Z_c}. \qquad (7\text{-}1)$$

Calcul des constantes A et B.

Pour $x = 0$, on a :

$$I = I_0 \quad \text{et} \quad V = V_0,$$

ce qui donne

$$V_0 = A + B$$

$$I_0 = \frac{-A + B}{Z_c},$$

d'où l'on tire :

$$A = \frac{V_0 - Z_c I_0}{2} \quad \text{et} \quad B = \frac{V_0 + Z_c I_0}{2}.$$

Portons dans les équations (6-4) et (7-1) :

$$V = \left(\frac{V_0 - Z_c I_0}{2}\right) \exp(Kx) + \left(\frac{V_0 + Z_c I_0}{2}\right) \exp(-Kx),$$

$$I = \left(-\frac{V_0}{Z_c} + I_0\right) \frac{\exp(Kx)}{2} + \left(\frac{V_0}{Z_c} + I_0\right) \frac{\exp(-Kx)}{2},$$

ou encore :

$$V = V_0\left(\frac{\exp(Kx) + \exp(-Kx)}{2}\right) - Z_c I_0\left(\frac{\exp(Kx) - \exp(-Kx)}{2}\right)$$

$$I = I_0\left(\frac{\exp(Kx) + \exp(-Kx)}{2}\right) - \frac{V_0}{Z_c}\left(\frac{\exp(Kx) - \exp(-Kx)}{2}\right),$$

ce qui fait apparaître les lignes trigonométriques hyperboliques (voir le Tome III de mon *Cours élémentaire de Mathématiques supérieures* où elles sont expliquées et étudiées en détail) :

$$V = V_0 \operatorname{ch} Kx - Z_c I_0 \operatorname{sh} Kx$$

$$I = I_0 \operatorname{ch} Kx - \frac{V_0}{Z_c} \operatorname{sh} Kx.$$

Mais il est plus pratique de compter les distances, non pas à partir de la source, mais à partir du récepteur ; il suffit de changer x en $-x$, et comme on a :

$$\operatorname{ch} x = \operatorname{ch}(-x)$$

et

$$-\operatorname{sh} x = \operatorname{sh}(-x),$$

il vient (en appelant V_r et I_r les valeurs de V et I au bout de la ligne (pour $x = 0$) :

$$\boxed{\begin{aligned} V &= V_r \operatorname{ch} Kx + Z_c I_r \operatorname{sh} Kx \\ I &= I_r \operatorname{ch} Kx + \frac{V_r}{Z_c} \operatorname{sh} Kx \end{aligned}} \qquad (7\text{-}2)$$

qui sont *les équations générales de la propagation.*

Il est très intéressant de comparer ces formules (7-2) aux formules (1-7) de la ligne sans pertes.

7-2. Remarque sur la symétrie des équations de la ligne sans pertes et de la ligne avec pertes. — Les équations (1-7) de la ligne sans pertes sont, en imaginaires :

$$V = V_r \cos \beta x + jZ_c I_r \sin \beta x,$$

$$I = I_r \cos \beta x + j\frac{V_r}{Z_c} \sin \beta x;$$

elles peuvent encore s'écrire, puisque $V_r = Z_r I_r$:

$$V = V_r(\cos \beta x + j\frac{Z_c}{Z_r} \sin \beta x),$$

$$I = I_r(\cos \beta x + j\frac{Z_r}{Z_c} \sin \beta x).$$

Or, pour la ligne avec pertes, les équations (7-2) sont:

$$V = V_r \operatorname{ch} Kx + Z_c I_r \operatorname{sh} Kx$$

$$I = I_r \operatorname{ch} Kx + \frac{V_r}{Z_c} \operatorname{sh} Kx.$$

Mais, si l'on pose :

$$K = jD$$

on obtient :

$$V = V_r \operatorname{ch} \mathrm{j}Dx + Z_c \frac{V_r}{Z_r} \operatorname{sh} \mathrm{j}Dx,$$

$$I = I_r \operatorname{ch} \mathrm{j}Dx + Z_r \frac{I_r}{Z_c} \operatorname{sh} \mathrm{j}Dx,$$

que l'on peut enfin écrire :

$$V = V_r(\cos Dx + \mathrm{j}\frac{Z_c}{Z_r} \sin Dx),$$

$$I = I_r(\cos Dx + \mathrm{j}\frac{Z_r}{Z_c} \sin Dx),$$

équations tout à fait semblables aux équations précédentes de la ligne sans pertes. *Cette similitude est tout à fait remarquable.*

7-3. **Calcul de l'impédance d'entrée d'une ligne quelconque.** — Supposons une ligne terminée sur un récepteur d'impédance Z_r, et faisons $x = l$ (à la source), les équations (7-2) deviennent :

$$V_0 = V_r \operatorname{ch} Kl + Z_c I_r \operatorname{sh} Kl$$

$$I_0 = I_r \operatorname{ch} Kl + \frac{V_r}{Z_c} \operatorname{sh} Kl.$$

L'impédance d'entrée de la ligne est alors :

$$Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \frac{V_r \operatorname{ch} Kl + Z_c I_r \operatorname{sh} Kl}{I_r \operatorname{ch} Kl + \frac{V_r}{Z_c} \operatorname{sh} Kl},$$

en divisant haut et bas par I_r et en remplaçant V_r/I_r par Z_r, on obtient :

$$Z_0 = \frac{Z_r \operatorname{ch} Kl + Z_c \operatorname{sh} Kl}{\operatorname{ch} Kl + \frac{Z_r}{Z_c} \operatorname{sh} Kl},$$

ou enfin

$$\boxed{Z_0 = \frac{Z_r + Z_c \operatorname{th} Kl}{1 + \frac{Z_r}{Z_c} \operatorname{th} Kl}}. \qquad (7\text{-}3)$$

Application à quelques cas particuliers.

a) Faisons $l = \infty$, on a $\operatorname{th} Kl = 1$, d'où

$$Z_0 = Z_c,$$

valeur qu'on avait déjà trouvée.

b) La longueur l est finie, mais $Z_r = Z_c$, il vient alors

$$Z_0 = Z_c,$$

de même que pour une ligne infinie, et dans ce cas on obtient :

$$V = V_0 \exp(-Kx)$$

$$I = \frac{V_0}{Z_c} \exp(-Kx),$$

les équations (6-14) s'appliquent encore à ce cas : *on a des ondes progressives amorties.*

— Faisons le quotient des valeurs maxima pour calculer l'affaiblissement :

$$\frac{V_0}{V} = \exp(\alpha x),$$

et, en prenant les logarithmes népériens :

$$\ln \frac{V_0}{V} = \alpha x \text{ népers},$$

ou

$$20 \lg \frac{V_0}{V} = 8{,}7\ \alpha x \text{ décibels},$$

et de même pour les courants.

7-4. **Exemples numériques.** — *Premier exemple.* — *Soit une ligne terminée sur son impédance caractéristique qui, pour* $f = 1\,000$, *est égale à* $Z_c = 680 - 138\,\mathrm{j}$ *et dont la constante de propagation est* $K = 0{,}007\,4 + 0{,}035\,6\,\mathrm{j}$. *La longueur est de* 200 km, *et est alimentée par un générateur dont la F. E. M.* = 100 *volts eff. et la résistance interne est* $r = 500\ \Omega$. *Calculer le courant, la tension et la puissance à l'extrémité de la ligne et au départ de la ligne. Calculer la longueur d'onde* λ.

— Puisque $Z_r = Z_c$ il n'y a pas d'ondes stationnaires, la source débite sur Z_c, et on a le schéma équivalent de la figure 7-1.

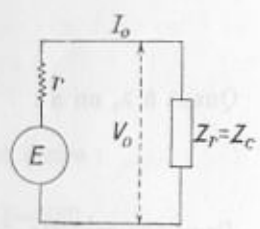


FIG. 7-1.

Le courant I_0 fourni par la source est :

$$\bar{I}_0 = \frac{\bar{E}}{r + \bar{Z}_c} = \frac{100}{500 + (680 - 138\,\mathrm{j})}$$

dont le module est, en valeur efficace :

$$I_0 = \frac{100}{1\,190} = 0{,}084 \text{ A}.$$

La tension V_0 au départ de la ligne est donc, en valeur efficace :

$$V_0 = I_0 Z_c = 0{,}084 \sqrt{680^2 + 138^2}$$

$$= 58{,}5 \text{ V}.$$

La puissance fournie par la source est :

$$P_0 = R_e I_0^2 \qquad (Z_e = R_e + jX_e)$$
$$= 680\ (0{,}084)^2 = 4{,}7 \text{ watts.}$$

La tension au bout de la ligne est :

$$V_r = V_0 \exp(-\alpha l) \cdot \exp(-j\beta l)$$

avec

$$-\alpha l = -0{,}007\,4 \cdot 200$$

et

$$-j\beta l = -j\,0{,}0356 \cdot 200,$$

d'où, au moyen des tables d'exponentielles :

$$V_r = 58{,}5 \exp(-1{,}48) \cdot \exp(-7{,}12\,j) = 13{,}3 \exp(-7{,}12\,j),$$
$$= 13{,}3\ \underline{/-7{,}12 \text{ rd}} = 13{,}3\ \underline{/-408°}.$$

La valeur efficace est ainsi de 13,3 volt.
La longueur de la ligne équivaut à :

$$\frac{7{,}12}{2\pi} = 1{,}134\ \lambda,$$

on peut donc soustraire 360° de 408° pour avoir le décalage de V_r :

$$V_r = 13{,}3\ \underline{/-48°}.$$

Le courant dans le récepteur est (puisque $Z_r = 695\ \Omega$) :

$$I_r = \frac{V_r}{Z_r} = \frac{13{,}3}{695} = 0{,}0191 \text{ A}_{\text{eff.}},$$

et la puissance absorbée par le récepteur est :

$$P_r = R_r I_r^2 \qquad (Z_r = R_r + jX_r = Z_e)$$
$$= 680(0{,}019\,1)^2$$
$$= 0{,}249 \text{ watt.}$$

Quant à λ, on a :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0{,}0356} = 176 \text{ km.}$$

Deuxième exemple. — Soit une ligne de 100 km *de longueur terminée sur son impédance caractéristique* Z_e, *alimentée par un générateur de* F. E. M. $E = 10$ *volts*, $f = 1\,000$. *Les constantes de la ligne sont :*

$L = 0{,}003\,67$ H/km, $\quad G = 0{,}8 \cdot 10^{-6}$ mho par km,
$R = 10{,}4\ \Omega$ par km, $\quad C = 0{,}008\,35\ \mu$F/km.

Calculer : Z_e, α, β, K, γ, λ, *le courant dans le récepteur, la* D. D. P. *au récepteur et la puissance absorbée par le récepteur.*

— On a :

$$R + jL\omega = 10{,}4 + j\,0{,}00367 \cdot 2\pi\,1\,000$$
$$= 10{,}4 + j\,23 = 25{,}2\ \underline{/66°},$$
$$G + jC\omega = 0{,}8 \cdot 10^{-6} + j\,0{,}008\,35 \cdot 2\pi\,1\,000 \cdot 10^{-6}$$
$$= (0{,}8 + j\,52{,}5)10^{-6} = 52{,}6 \cdot 10^{-6}\ \underline{/90°},$$

d'où

$$Z_c = \sqrt{\frac{R + jL\omega}{G + jC\omega}} = \sqrt{\frac{25{,}2\ \underline{/66°}}{52{,}6 \cdot 10^{-6}\ \underline{/90°}}}$$
$$\approx 692\ \underline{/-12°} = 683 - 138\,j.$$

On a :

$$K = \sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)}$$
$$= \sqrt{25{,}2\ \underline{/66°} \cdot 52{,}6 \cdot 10^{-6}\ \underline{/90°}} = 0{,}036\,3\ \underline{/78°},$$
$$= \alpha + j\beta,$$

d'où

$$\alpha = 0{,}036\,3 \cos 78° = 0{,}007\,55 \text{ Np/km},$$
$$\beta = 0{,}036\,3 \sin 78° = 0{,}035\,5 \text{ rd/km}.$$

La vitesse de propagation est :

$$\gamma = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi\,1\,000}{0{,}035\,5} = 177\,000 \text{ km/s},$$

et la longueur d'onde est :

$$\lambda = 2\pi/\beta = 177 \text{ km}.$$

Puisque la ligne est terminée sur Z_e, on a :

$$Z_0 = Z_e,$$

d'où le courant au départ de la ligne :

$$I_0 = \frac{E}{Z_0} = \frac{10}{692\ \underline{/-12°}}$$
$$= 0{,}0145\ \underline{/12°}\ \text{A}.$$

Pour avoir le courant I_r dans le récepteur, on peut écrire :

$$\frac{I_r}{I_0} = \exp(-Kl) = \exp(-\alpha l) \cdot \exp(-j\beta l)$$
$$= \exp(-0{,}755) \cdot \exp(-j\,3{,}55).$$

Mais, puisque exp (— j3,55) signifie un angle de décalage de — 3,55 radians, ou — 203°8, on peut écrire :

$$I_r = I_0 \exp(-0{,}755)\ \underline{/-203°8}$$
$$= 0{,}014\,5\ \underline{/12°} \cdot 0{,}472\ \underline{/-203°8}$$
$$= 0{,}006\,85\ \underline{/-191°8}. \qquad (E, \text{ origine des phases})$$

La D. D. P. aux bornes du récepteur est :

$$U_r = Z_r I_r = 692 \angle -12° \cdot 0{,}00685 \angle -191°8 \text{ V}$$
$$= 4{,}74 \angle -203°8 \text{ V},$$

et la puissance absorbée au récepteur est :

$$P = U_r I_r \cos \varphi = 4{,}74 \cdot 0{,}00685 \cos (203°8 - 191°8)$$
$$= 0{,}031\,8 \text{ W}.$$

7-5. **Impédance d'entrée d'une ligne ouverte et d'une ligne en court-circuit.** — La formule (7-3) donne les valeurs suivantes pour l'impédance d'entrée de la ligne, vue de la source :

a) *Ligne ouverte*, $Z_r = \infty$, et après division haut et bas par Z_r, il reste :

$$Z_{ou} = \frac{Z_c}{\text{th } Kl}. \tag{7-4}$$

b) *Ligne en court-circuit*, $Z_r = 0$, il reste :

$$Z_{cc} = Z_c \text{ th } Kl. \tag{7-5}$$

En multipliant membre à membre ces deux équations on obtient l'équation fondamentale :

$$\boxed{Z_c^2 = Z_{ou} \cdot Z_{cc}} \tag{7-6}$$

qui permet de calculer Z_c connaissant Z_{ou} et Z_{cc}. On en déduit aussi :

$$\text{th } Kl = \sqrt{\frac{Z_{cc}}{Z_{ou}}}.$$

— Pour étudier la répartition du potentiel et du courant, partons des équations 7-2 qui sont les équations générales de la ligne avec pertes, et étudions en détail les deux cas précédents.

7-6. **Ligne ouverte.** — Faisons $I_r = 0$, il reste :

$$V = V_r \text{ ch } Kx,$$

et, pour $x = l$, on obtient $V_0 = V_r \text{ ch } Kl$, ce qui donne :

$$V = \frac{V_0 \text{ ch } Kx}{\text{ch } Kl}. \tag{7-7}$$

A l'extrémité de la ligne, pour $x = 0$, la tension est :

$$V_r = \frac{V_0}{\text{ch } Kl}. \tag{7-8}$$

De même, l'équation 7-2 donne :

$$I = \frac{V_r}{Z_c} \text{sh } Kx,$$

et, pour $x = l$,

$$I_0 = \frac{V_r}{Z_c} \text{sh } Kl,$$

ce qui donne :

$$I = \frac{V_0}{Z_c} \cdot \frac{\text{sh } Kx}{\text{sh } Kl}. \tag{7-9}$$

— Étudions maintenant les maxima et les minima de I. On a, puisque $K = \alpha + j\beta$:

$$\text{sh } Kx = \text{sh } (\alpha x + j\beta x)$$
$$= \text{sh } \alpha x \cdot \cos \beta x + j \cdot \text{ch } \alpha x \cdot \sin \beta x$$

dont le module est :

$$\sqrt{\text{sh}^2 \alpha x \cdot \cos^2 \beta x + \text{ch}^2 \alpha x \cdot \sin^2 \beta x} = \sqrt{\text{sh}^2 \alpha x + \sin^2 \beta x} \tag{7-10}$$

où sin βx varie périodiquement.

Les maxima et minima de I auront lieu en annulant la dérivée de sh Kx par rapport à x, ou pour simplifier les calculs, la dérivée de sh^2 Kx :

$$\frac{\text{d}(\text{sh}^2 Kx)}{\text{d}x} = 0,$$

on trouve facilement :

$$\frac{\text{sh } 2\alpha x}{\sin 2\beta x} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Or, pour une ligne sans pertes, on avait trouvé :
maximum de I pour $\beta l = \pi/2,\ 3\pi/2,...$
minimum de I pour $\beta l = 0,\ \pi,\ 2\pi,...$
On aura donc encore ici, d'après l'équation 7-10, une série de maxima et de minima de I.

— Pour le potentiel, étudions la formule 7-7, où :

$$\text{ch } Kx = \text{ch } (\alpha x + j\beta x)$$
$$= \text{ch } \alpha x \cdot \cos \beta x + j \text{ sh } \alpha x \cdot \sin \beta x,$$

dont le module est, après quelques simplifications :

$$\text{module} = \sqrt{\text{sh}^2 \alpha x + \cos^2 \beta x}.$$

En comparant avec l'équation 7-10 on voit que l'on a un cos βx au lieu d'un sin βx : il en résulte que V sera maximum quand I est minimum, et inversement, et ceci à des intervalles de $\lambda/4$.

En calculant :

$$\frac{d(\text{ch}^2 Kx)}{dx} = 0$$

on trouve, comme plus haut :

$$\frac{\text{sh } 2\alpha x}{\sin 2\beta x} = +\frac{\beta}{\alpha}.$$

On a encore ici des ondes stationnaires, mais où l'amplitude des ventres de I et de V décroît exponentiellement.

On pourrait voir que le premier $V_{min.}$ est à un peu moins de $\lambda/4$ du bout de la ligne, tandis que $I_{max.}$ serait à un peu plus de $\lambda/4$.

7-7. **Ligne en court-circuit.** — Au bout de la ligne, $V_r = 0$, et les équations 7-2 nous donnent :

$$V = Z_c I_r \text{ sh } Kx$$

et

$$I = I_r \text{ ch } Kx. \tag{7-11}$$

Un calcul exactement identique au précédent donnerait :

$$V = V_0 \frac{\text{sh } Kx}{\text{sh } Kl}$$

et

$$I = \frac{V_0}{Z_c} \frac{\text{ch } Kx}{\text{ch } Kl}. \tag{7-12}$$

Si l'on compare ces formules 7-12 avec les formules 7-7 et 7-9, on voit qu'il y a interversion : là où V était maximum, V sera nul, et inversement.

On voit que le courant en un point d'une ligne en court-circuit est égal au quotient de la tension au même point pour une ligne ouverte par Z_c ch Kl, qui est l'impédance d'entrée de la ligne en court-circuit.

Quant à la tension en un point d'une ligne en court-circuit, elle est égale au produit du courant de la ligne ouverte par $Z_c/\text{sh } Kl$, qui est l'impédance d'entrée de la ligne ouverte. Le premier $I_{min.}$ a lieu à une distance inférieure à $\lambda/4$, là où V était minimum pour la ligne ouverte.

On a encore des ondes stationnaires, mais où les amplitudes du potentiel et du courant décroissent exponentiellement.

7-8. **Courant à l'extrémité d'une ligne terminée par un récepteur d'impédance** Z_r. — Partons des équations 7-1, où x est comptée à partir de la source. On a, au récepteur, $V_r = Z_r I_r$, ou d'après l'équation 7-1, en faisant $x = l$:

$$Z_r I_r = V_r = V_0 \text{ ch } Kl - Z_c I_0 \text{ sh } Kl \tag{7-13}$$

d'où :

$$I_r - \frac{V_0}{Z_r} \text{ ch } Kl = -I_0 \frac{Z_c}{Z_r} \text{ sh } Kl. \tag{7-14}$$

D'autre part, la seconde équation 7-1 donne :

$$I_r = I_0 \text{ ch } Kl - \frac{V_0}{Z_c} \text{ sh } Kl$$

d'où :

$$I_r + \frac{V_0}{Z_c} \text{ sh } Kl = I_0 \text{ ch } Kl. \tag{7-15}$$

Divisons l'équation 7-14 par l'équation 7-15 :

$$\frac{I_r - (V_0/Z_r) \text{ ch } Kl}{I_r + (V_0/Z_c) \text{ sh } Kl} = \frac{-I_0(Z_c/Z_r) \text{ sh } Kl}{I_0 \text{ ch } Kl} = -\frac{Z_c}{Z_r} \text{ th } Kl,$$

d'où l'on tire facilement :

$$\boxed{I_r = \frac{V_0}{Z_c \text{ sh } Kl + Z_r \text{ ch } Kl} = \frac{V_0}{Z_{tr}}} \tag{7-16}$$

qui donne I_r en fonction de V_0, Z_c, Z_r et Kl.

Le dénominateur peut ainsi s'appeler l'*impédance de transfert* Z_{tr}.

On pourrait voir que, le long de la ligne, il y a superposition d'ondes progressives et d'ondes stationnaires.

7-9. **Ligne artificielle.** — Pour étudier l'amortissement d'une ligne, il faudrait une ligne très longue, ce qui n'est pas commode en laboratoire ; c'est pourquoi on est amené à utiliser une ligne artificielle équivalente.

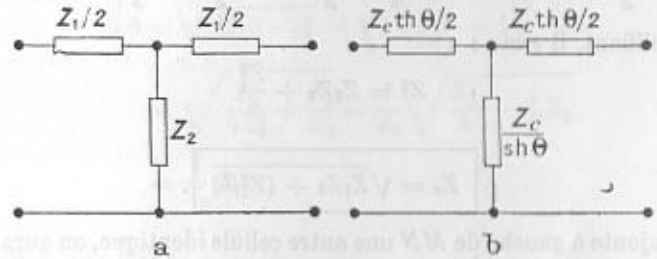


FIG. 7-2.

Une ligne de longueur l est complètement définie par Z_c et par $K = \alpha + j\beta$, ou encore par ses impédances d'entrée, lorsque l'extrémité de la ligne est ouverte ou en court-circuit. On pourra alors remplacer cette ligne par un quadripôle équivalent, à constantes localisées, ayant les mêmes impédances en court-circuit et à vide.

Prenons donc une cellule en T formée par une impédance série :

$$Z_1 = (R + jL\omega)l$$

shuntée en son milieu par une impédance Z_2 (fig. 7-2) telle que :

$$\frac{1}{Z_2} = (G + jC\omega)l.$$

Nous allons démontrer que le schéma *b* est équivalent au schéma *a*, avec :

$$\theta = Kl = (\alpha + j\beta)l,$$

et si θ est réel, on a des résistances pures, mais si θ est imaginaire, comme c'est le cas ici, on aura des réactances.

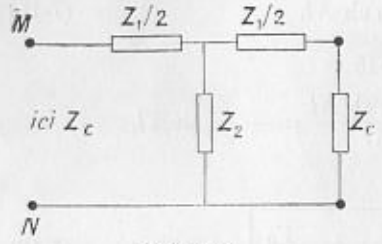


FIG. 7-3.

— Mais auparavant, calculons l'impédance caractéristique, ou *itérative* de la cellule en T, c'est-à-dire l'impédance Z_c qu'il faut brancher à la sortie de la cellule pour que, à l'entrée, *on ait encore* Z_c. Cela est possible puisque Z_1 en série peut augmenter l'impédance, et Z_2 en parallèle peut la diminuer. On devra donc avoir (fig. 7-3) entre les bornes M et N, et à droite, une impédance égale à Z_c :

$$Z_c = \frac{Z_1}{2} + \frac{[(Z_1/2) + Z_c]Z_2}{(Z_1/2) + Z_c + Z_2}.$$

On en tire :

$$Z_c\left(\frac{Z_1}{2} + Z_c + Z_2\right) = \frac{Z_1}{2}\left(\frac{Z_1}{2} + Z_c + Z_2\right) + \left(\frac{Z_1}{2} + Z_c\right)Z_2,$$

ou

$$Z_c\frac{Z_1}{2} + Z_c^2 + Z_cZ_2 = \frac{Z_1^2}{4} + \frac{Z_1}{2}Z_c + \frac{Z_1Z_2}{2} + \frac{Z_1}{2}Z_2 + Z_cZ_2.$$

En simplifiant, il reste :

$$Z_c^2 = Z_1Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}$$

d'où :

$$\boxed{Z_c = \sqrt{Z_1Z_2 + (Z_1^2/4)}}. \qquad (7\text{-}17)$$

Si l'on rajoute à gauche de MN une autre cellule identique, on aura encore Z_c à l'entrée. Ainsi, *quel que soit le nombre de cellules*, on aura toujours Z_c à l'entrée, d'où le nom d'*impédance itérative* ou *d'impédance caractéristique*.

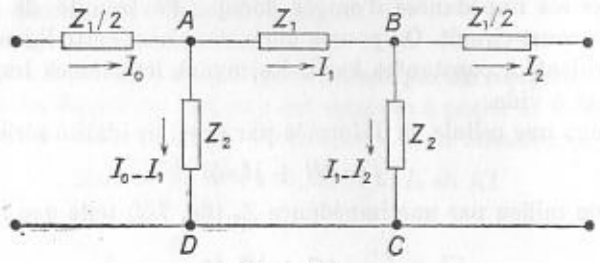


FIG. 7-4.

Démonstration : Prenons la figure 7-4 avec deux cellules, et donnons des noms et des sens aux différents courants, et posons *a priori* :

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{I_1}{I_2} = \exp(\theta)$$

Le circuit ABCD nous donne :

$$Z_1I_1 + Z_2(I_1 - I_2) - Z_2(I_0 - I_1) = 0.$$

Divisons par Z_2I_1 :

$$\frac{Z_1}{Z_2} + 1 - \frac{I_2}{I_1} + 1 - \frac{I_0}{I_1} = 0,$$

ou

$$\frac{Z_1}{Z_2} + 2 = \frac{I_2}{I_1} + \frac{I_0}{I_1}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} + 2 = \exp(-\theta) + \exp(\theta)$$

$$\frac{Z_1}{2Z_2} + 1 = \frac{\exp(\theta) + \exp(-\theta)}{2} = \operatorname{ch}\theta. \qquad (7\text{-}18)$$

Or on sait que $\operatorname{ch}^2\theta - \operatorname{sh}^2\theta = 1$, d'où :

$$\operatorname{sh}\theta = \sqrt{\operatorname{ch}^2\theta - 1} = \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2Z_2} + 1\right)^2 - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{Z_1^2}{4Z_2^2} + \frac{Z_1}{Z_2}} = \frac{1}{Z_2}\sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1Z_2}$$

$$= \frac{1}{Z_2}Z_c,$$

ce qui donne (fig. 7-2) :

$$\boxed{Z_2 = \frac{Z_c}{\operatorname{sh}\theta}}.$$

Portons cette valeur dans ch θ de l'équation 7-18 :

$$\operatorname{ch}\theta = \frac{Z_1}{2Z_2} + 1 = \frac{Z_1\operatorname{sh}\theta}{2Z_c} + 1,$$

Or on verrait facilement que :

$$\frac{\operatorname{ch}\theta - 1}{\operatorname{sh}\theta} = \operatorname{th}\frac{\theta}{2},$$

d'où :

$$\operatorname{ch}\theta - 1 = \left(\frac{Z_1 \operatorname{sh}\theta}{2Z_c} + 1\right) - 1 = \frac{Z_1 \operatorname{sh}\theta}{2Z_c}$$

et

$$\frac{\operatorname{ch}\theta - 1}{\operatorname{sh}\theta} = \frac{Z_1}{2Z_c} = \operatorname{th}\frac{\theta}{2},$$

d'où finalement :

$$\boxed{\frac{Z_1}{2} = Z_c \operatorname{th}\frac{\theta}{2}}.$$

Exemple. (Extrait du livre *Communication networks and lines* de W. Craemer. Éditeur : *Harper Brothers, New-York.*)

$R = 88\ \Omega/\text{km}$, $C = 0{,}06\ \mu\text{F/km}$, $L = 0$, $G = 0$, $f = 1\,000$ *et* $2\,000$ c/s.

— On a, pour $f = 1\,000$:

$$K = \sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)} = \sqrt{(88 + 0j)(0 + j \cdot 6283 \cdot 0{,}06 \cdot 10^{-6})} = 0{,}182 \exp(45j) = 0{,}129 + 0{,}129\,j,$$

et

$$Z_c = \sqrt{\frac{R + jL\omega}{G + jC\omega}} = \sqrt{\frac{88}{j0{,}06 \cdot 10^{-6} \cdot 6283}} = 483 \exp(-45j).$$

Pour $f = 2\,000$, K sera $\sqrt{2}$ fois plus grand et Z_c sera divisé par $\sqrt{2}$:

$$K = 0{,}257 \exp(45j) = 0{,}182 + 0{,}182\,j,$$
$$Z_c = 342 \exp(-45j).$$

Pour une section de 4 km, on aura :

pour $f = 1\,000$, $\quad Kl = 0{,}182 \exp(45j) \cdot 4 = 0{,}728\ \underline{/45°}$;
pour $f = 2\,000$, $\quad Kl = 0{,}257 \exp(45j) \cdot 4 = 1{,}028\ \underline{/45°}$.

On aura donc :

1° *Pour* $f = 1\,000$,

$$\theta = Kl = 0{,}728\ \underline{/45°}, \qquad \operatorname{sh}\theta = 0{,}735\ \underline{/50°}, \qquad \operatorname{th}\frac{\theta}{2} = 0{,}37\ \underline{/42°},$$

$$\frac{Z_1}{2} = Z_c \operatorname{th}\frac{\theta}{2} = 483\ \underline{/-45°} \cdot 0{,}37\ \underline{/42°} = 179\ \underline{/-3°} = 179 - 9j,$$

$$Z_2 = \frac{Z_c}{\operatorname{sh}\theta} = \frac{483\ \underline{/-45°}}{0{,}735\ \underline{/50°}} = 658\ \underline{/-95°} = -6 - j\,655.$$

2° *Pour* $f = 2\,000$,

$$\theta = 1{,}028\ \underline{/45°}, \qquad \operatorname{sh}\theta = 1{,}04\ \underline{/55°}, \qquad \operatorname{th}\frac{\theta}{2} = 0{,}52\ \underline{/39°5},$$

$$\frac{Z_1}{2} = Z_c \operatorname{th}\frac{\theta}{2} = 342\ \underline{/-45°} \cdot 0{,}52\ \underline{/39°5} = 178\ \underline{/-5°5} = 177 - 17j,$$

$$Z_2 = \frac{Z_c}{\operatorname{sh}\theta} = \frac{342\ \underline{/-45°}}{1{,}04\ \underline{/55°}} = 329\ \underline{/-100°} = -57 - j\,324.$$

On voit ainsi que dans les deux cas la partie ohmique de Z_2 est négative, donc irréalisable pratiquement. Faisons alors une approximation : prenons pour $\frac{Z_1}{2}$ la valeur moyenne de 178 Ω (à 1 000 et à 2 000 périodes), et remarquons que la réactance de Z_2, à $f = 2\,000$, est -324 (d'où $C = 0{,}244\ \mu\text{F}$), soit la moitié de celle à $f = 1\,000$. Prenons alors $C = 0{,}244\ \mu\text{F}$ comme valeur moyenne, ce qui donnera pour le quadripôle équivalent la figure 7-5, où :

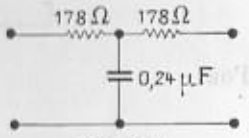


Fig. 7-5.

$$\frac{Z_1}{2} = 178\ \Omega \qquad \text{et} \qquad C = 0{,}244 \text{ en parallèle.}$$

7-10. **Simplification.** — Pour simplifier les calculs, on peut éviter l'emploi des lignes trigonométriques hyperboliques par la méthode suivante, bien que l'on trouve des tables numériques de celles-ci dans les *Tables numériques* de Marcel Boll, dans les *Tables numériques de fonctions élémentaires* de J. Laborde ou dans l'*Agenda Dunod de Mathématiques* par M. Denis-Papin (Éditeur Dunod).

— En effet, en posant :

$$\frac{I_1}{I_2} = \exp(\theta) = p$$

on obtient :

$$Z_2 = \frac{Z_c}{\operatorname{sh}\theta} = \frac{Z_c}{\dfrac{\exp(\theta) - \exp(-\theta)}{2}} = \frac{2Z_c \exp(\theta)}{\exp(2\theta) - 1}$$

et

$$Z_2 = \frac{2Z_c p}{p^2 - 1}.$$

De même on a :

$$\frac{Z_1}{2} = Z_c \operatorname{th}\frac{\theta}{2} = Z_c \frac{\exp(\theta/2) - \exp(-\theta/2)}{\exp(\theta/2) + \exp(-\theta/2)},$$

et, en multipliant haut et bas par exp (θ/2), il vient :

$$\frac{Z_1}{2} = Z_c \frac{\exp(\theta) - 1}{\exp(\theta) + 1} = Z_c \frac{p-1}{p+1}.$$

Exemple. — Si $Z_c = 1\,000\ \Omega$, calculer Z_1 et Z_2 supposées ohmiques pour que l'affaiblissement soit de 6 dB.

— On aura :

$$6\ \text{dB} = 20 \lg \frac{I_1}{I_2} = 20 \lg 2,$$

avec

$$\frac{I_1}{I_2} = 2 = p,$$

d'où

$$Z_2 = \frac{2 \cdot 1\,000 \cdot 2}{4-1} = 1334\ \Omega,$$

et

$$Z_1 = 1\,000 \cdot \frac{2-1}{2+1} = 667\ \Omega.$$

7-11. **Mise en pratique de la ligne artificielle.** — Il faut assurer l'équivalence de la ligne et du quadripôle dans une bande de fréquence assez large.

En pratique, pour pouvoir réaliser facilement les impédances du quadripôle, on constituera cette ligne artificielle par une série de quadripôles, représentant chacun une fonction de la ligne. De la sorte, la longueur de ligne équivalente à chaque tronçon étant *petite*, on pourra confondre les lignes trigonométriques hyperboliques avec leurs arguments ; ceci naturellement jusqu'à une certaine fréquence limite, sinon l'erreur serait trop grande.

On démontre que l'erreur ε est maximum sur la résistance R, en supposant $G = 0$, et égale à :

$$\varepsilon\% = \frac{LC\omega^2}{3}\left(\frac{l}{N}\right)^2$$

où N est le nombre de quadripôles en série.

Exemple : $l = 300$ km, $\varepsilon = 10$ %, $R = 6{,}3\ \Omega$/km, $L = 2{,}4$ mH/km, $C = 0{,}005\ \mu$F/km, $G = 0$, $f = 0$ à 2 000.

— La formule précédente donne l/N :

$$\left(\frac{l}{N}\right)^2 = 0{,}1 \cdot \frac{3}{2{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-9} \cdot 160 \cdot 10^6} = 156$$

d'où

$$N = 24.$$

— Pour mesurer les courants, et afin d'éviter les perturbations produites par le montage d'un milliampèremètre en série, on placera en série dans la ligne, et à l'endroit désiré une résistance de 10 Ω et un voltmètre électronique à ses bornes ; on en placera un autre en parallèle pour mesurer les tensions (fig. 7-6). On fera les mesures de I et de V dans les trois cas suivants : extrémité ouverte, en court-circuit ou fermée sur Z_c.

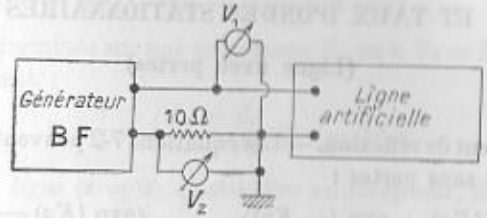


FIG. 7-6.

— La mesure des impédances se fera dans la gamme par exemple 200-2 000, avec un pont d'impédances. On mesurera l'impédance d'entrée de la ligne dans les trois cas précédents.

On aura :

$$Z_c = \sqrt{Z_{ou} \cdot Z_{cc}},$$

le module de l'impédance d'entrée de la ligne étant, dans chaque cas :

$$Z_0 = 10 \frac{V_1}{V_2}.$$

CHAPITRE VIII

COEFFICIENT DE RÉFLEXION ET TAUX D'ONDES STATIONNAIRES

(Ligne avec pertes)

8-1. **Le coefficient de réflexion.** — Les équations 7-2 peuvent s'écrire, de même que pour la ligne sans pertes :

$$V = V_r\left(\frac{\exp(Kx) + \exp(-Kx)}{2}\right) + Z_c I_r\left(\frac{\exp(Kx) - \exp(-Kx)}{2}\right)$$

$$I = I_r\left(\frac{\exp(Kx) + \exp(-Kx)}{2}\right) + \frac{V_r}{Z_c}\left(\frac{\exp(Kx) - \exp(-Kx)}{2}\right),$$

ou encore :

$$\boxed{\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}(V_r + Z_c I_r)\exp(Kx) + \frac{1}{2}(V_r - Z_c I_r)\exp(-Kx) \\ I &= \frac{1}{2}\left(I_r + \frac{V_r}{Z_c}\right)\exp(Kx) + \frac{1}{2}\left(I_r - \frac{V_r}{Z_c}\right)\exp(-Kx) \end{aligned}} \quad (8\text{-}1)$$

Ces équations, tout à fait semblables aux équations de la ligne sans pertes, montrent, ainsi qu'on l'a déjà vu pour la ligne sans pertes, que tout se passe comme si V et I étaient la superposition de deux ondes :

1° *une onde incidente* V^+ et I^+ (la première parenthèse),

2° *une onde réfléchie* V^- et I^- (la seconde parenthèse),

telles que :

$$V = V^+ + V^-$$

et

$$I = I^+ + I^-.$$

D'ailleurs, si l'on fait le quotient V^+/I^+ des deux premières parenthèses de V et de I, on trouve Z_c, et le quotient V^-/I^- des deux secondes parenthèses on trouve $-Z_c$.

Comme on a :

$$\exp(Kx) = \exp[(\alpha + j\beta)x] = \exp(\alpha x)\cdot\exp(j\beta x)$$

on voit que l'onde réfléchie V_2 ou I_2, en $\exp(-Kx)$, s'atténue suivant la loi $\exp(-\alpha x)$, tandis que l'onde incidente de V_1 ou I_1, en $\exp(Kx)$ s'atténue suivant la loi $\exp(+\alpha x)$, mais il faut noter que x étant compté à partir du récepteur, $\exp(+\alpha x)$ augmente quand x diminue.

Les deux ondes, incidente et réfléchie, s'affaiblissent ainsi de la même façon en s'éloignant soit de la source pour l'onde incidente, soit du récepteur pour l'onde réfléchie.

— Faisons maintenant le quotient de l'onde réfléchie de tension V^- par l'onde incidente V^+.

$$\frac{V^-}{V^+} = \frac{(V_r - Z_c I_r)\exp(-Kx)}{(V_r + Z_c I_r)\exp(Kx)}.$$

Si la ligne est terminée sur une impédance Z_r, on a $V_r = Z_r I_r$, et l'expression précédente devient :

$$\frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c}\exp(-2Kx),$$

et, *au bout de la ligne* ($x = 0$), c'est-à-dire au récepteur, il reste, *comme pour la ligne sans pertes* :

$$\frac{V_r^-}{V_r^+} = \frac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c}.$$

Cette quantité très importante, qui serait la même pour le quotient des deux courants, est le *coefficient de réflexion* ou *taux de réflexion* que l'on désigne par ρ, ainsi qu'on l'a déjà vu :

$$\boxed{\rho = \frac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c}}. \quad (8\text{-}2)$$

C'est en général une quantité complexe.

On a ainsi, au récepteur :

$$\frac{V_r^-}{V_r^+} = \rho. \quad (8\text{-}3)$$

Un calcul analogue pour les courants donnerait, au récepteur :

$$\frac{I_{\text{réfléchi}}}{I_{\text{direct}}} = \frac{I_r^-}{I_r^+} = -\rho. \quad (8\text{-}4)$$

8-2. **Conséquences.**

a) On voit ainsi que, si la tension est réfléchie sans changement de signe, le courant sera réfléchi avec changement de signe, et inversement.

b) Si la ligne est terminée sur Z_c, on a $\rho = 0$, et il n'y a pas d'onde réfléchie, pas d'ondes stationnaires, on a des ondes progressives.

c) Si la ligne est court-circuitée à l'extrémité ($Z_r = 0$), on a :

$$\rho = -1,$$

V est totalement réfléchi, mais en opposition de phase, c'est pourquoi $V_r = 0$.

d) Si la ligne est ouverte ($Z_r = \infty$), on a :

$$\rho = +1,$$

V est totalement réfléchi, mais l'onde réfléchie est en phase avec l'onde incidente, donc V_r est doublé. Pour le courant, c'est l'inverse et I_r est nul.

c) Si le récepteur est une réactance pure ($Z_r = \pm jX$), on a $\rho = 1$, la puissance dans le récepteur est nulle : il y a réflexion totale.

8-3. **Calcul de l'onde directe et de l'onde réfléchie.** — On peut calculer la composante de la tension de l'onde qui s'éloigne de la source, puis calculer l'atténuation et le déphasage le long de la ligne, cette onde étant réfléchie au récepteur et revenant en arrière.

En un point quelconque de la ligne la tension V est la somme vectorielle des composantes directes et réfléchies V^+ et V^-.

Cherchons à calculer maintenant l'amplitude de la composante V^+ de l'onde qui s'éloigne de la source, par rapport à l'onde totale V ; on a :

$$\frac{V^+}{V} = \frac{V^+}{V^+ + V^-} = \frac{1}{1 + (V^-/V^+)} = \frac{1}{1+\rho}.$$

Or, on a vu que :

$$\rho = \frac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c} = \frac{(Z_r/Z_c) - 1}{(Z_r/Z_c) + 1} = \frac{Z_1 - 1}{Z_1 + 1},$$

d'où :

$$\frac{V^+}{V} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{Z_1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{Z_c}{Z_r}\right), \qquad (8\text{-}5)$$

cette formule sera facile à utiliser avec l'abaque de Smith à cause de Z_1 qui est lue *directement*.

On trouverait de même :

$$\frac{V^+}{I} = \frac{1}{2}(Z_r + Z_c).$$

Quand V ou I sont connus en un point de la ligne, par exemple à la source, ces deux équations donneront V^+ en chaque point, la tension de l'onde directe étant à multiplier par $\exp(-\alpha x)$, et à tourner de l'angle βx.

— Au récepteur, V^+ est réfléchie, et en la multipliant par ρ, on aura l'onde réfléchie ; la somme $V^+ + V^-$ au récepteur donnera la tension totale.

On pourra de même calculer la tension réfléchie V^- en un point quelconque de la ligne.

Mais tout ceci n'a qu'un faible intérêt pratique, parce que c'est la somme V ou I qui est vraiment utile à connaître.

Faisons cependant un exemple numérique.

Exemple numérique. — *Soit un générateur de* F. E. M. 100 $V_{eff.}$, *et d'impédance interne* $Z_s = 700 + 0j$, *qui alimente une ligne de* 100 km *de longueur dont* $Z_c = 685 - 92j$, *le récepteur ayant* $Z_r = 2\,000 + 0j$, et $K = \alpha + j\beta = 0{,}004\,97 + j\,0{,}035\,2$. *Calculer l'amplitude des ondes de tension, directes et réfléchies, au récepteur et en déduire* V_r, I_r *et la puissance absorbée par le récepteur.*

— On trouverait que l'impédance d'entrée Z_0 de la ligne est :

$$Z_0 = 860 - 330j.$$

On peut donc calculer le courant I_0 à l'entrée de la ligne :

$$\overline{I}_0 = \frac{E}{Z_s + Z_0} = \frac{100}{(700 + 0j) + (860 - 330j)} = \frac{100}{1\,560 - 330j}$$

dont le module est $I_0 = 62{,}6 \cdot 10^{-3}$ $A_{eff.}$.

La D. D. P. V_0 à l'entrée de la ligne est alors :

$$V_0 = Z_0 I_0 = \sqrt{860^2 + 330^2} \cdot 62{,}6 \cdot 10^{-3} = 58 \text{ } V_{eff.}.$$

L'amplitude de l'onde directe de tension, à la source, est :

$$V_0^+ = \frac{V_0}{2}\left(1 + \frac{Z_c}{Z_r}\right) = \frac{58}{2}\left(1 + \frac{685 - 92j}{2\,000 + 0j}\right)$$

dont le module est 39 volts.

Au récepteur cette valeur devient :

$$V_r^+ = V_0^+ \cdot \exp(-\alpha l) = 39 \cdot \exp(-0{,}497) = 39 \cdot 0{,}608 = 23{,}7 \text{ } V.$$

Le coefficient de réflexion ρ au récepteur est :

$$\rho = \frac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c} = \frac{2\,000 - (685 - 92j)}{2\,000 + (685 - 92j)}.$$

On voit que le calcul de ρ serait ici assez long ; il sera obtenu presque instantanément par l'abaque de Smith ; mais il faut connaître Z_1 :

$$Z_1 = \frac{2\,000 + 0j}{685 - 92j} = 2{,}87 + 0{,}385\,j.$$

On trouve :

$$\rho = 0{,}491 \angle 6°.$$

On peut alors calculer l'onde réfléchie :

$$V_r^- = \rho V_r^+ = 0{,}491\,\angle 6^\circ \cdot 23{,}7 = 11{,}6\,\angle 6^\circ \text{ volts.}$$

La D. D. P. au récepteur sera :

$$V_r = V_r^+ + V_r^- = 23{,}7 + 11{,}6\,\angle 6^\circ = 35{,}2 + \mathrm{j}1{,}22$$

dont le module est $V_r = 35{,}22$ V.

Le courant dans le récepteur est alors :

$$I_r = \frac{V_r}{Z_r} = \frac{35{,}22}{2000} = 17{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ A}_{\text{eff.}}$$

en phase avec V_r.

La puissance absorbée dans le récepteur sera :

$$P_r = RI_r^2 = 2000(17{,}6 \cdot 10^{-3})^2 = 0{,}62 \text{ W.}$$

Au départ, à l'entrée de la ligne, on avait I_0 :

$$I_0 = \frac{V_0}{Z_0} \quad \left(\text{ou bien } \frac{E}{Z_s + Z_0}\right) = \frac{58}{860 - 330\mathrm{j}},$$

on a d'ailleurs trouvé $62{,}6 \cdot 10^{-3}$ au début de cet exemple. La puissance fournie à la ligne est donc (puisque $Z_0 = R_0 + \mathrm{j}X_0 = 860 - 330$ j) :

$$P_0 = R_0 I_0^2 = 860 \cdot (62{,}6 \cdot 10^{-3})^2 = 3{,}38 \text{ W.}$$

On a donc perdu en ligne :

$$3{,}38 - 0{,}62 = 2{,}76 \text{ W.}$$

8-4. **Impédance d'entrée d'une ligne en fonction du coefficient de réflexion.** — Partons des formules 8-1 en remplaçant V_r par $Z_r I_r$:

$$V = \frac{1}{2}(Z_r I_r + Z_c I_r) \exp(Kx) + \frac{1}{2}(Z_r I_r - Z_c I_r) \exp(-Kx)$$

$$I = \frac{1}{2}\left(I_r + \frac{Z_r I_r}{Z_c}\right) \exp(Kx) + \frac{1}{2}\left(I_r - \frac{Z_r I_r}{Z_c}\right) \exp(-Kx),$$

ou encore

$$V = \frac{I_r}{2}(Z_r + Z_c) \exp(Kx) + \frac{I_r}{2}(Z_r - Z_c) \exp(-Kx)$$

$$I = \frac{I_r}{2Z_c}(Z_c + Z_r) \exp(Kx) + \frac{I_r}{2Z_c}(Z_c - Z_r) \exp(-Kx),$$

que nous écrivons, ainsi qu'on l'a fait pour la ligne sans pertes :

$$V = \frac{I_r}{2}(Z_r + Z_c)\left[\exp(Kx) + \frac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c} \exp(-Kx)\right]$$

$$I = \frac{I_r}{2Z_c}(Z_r + Z_c)\left[\exp(Kx) - \frac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c} \exp(-Kx)\right]$$

ou enfin

$$\boxed{\begin{aligned} V &= \frac{I_r}{2}(Z_r + Z_c)\left[\exp(Kx) + \rho \exp(-Kx)\right] \\ I &= \frac{I_r}{2Z_c}(Z_r + Z_c)\left[\exp(Kx) - \rho \exp(-Kx)\right] \end{aligned}} \quad (8\text{-}6)$$

L'impédance, à la distance x du récepteur, sera :

$$\boxed{Z_0 = \frac{V}{I} = Z_c\left[\frac{\exp(Kx) + \rho \exp(-Kx)}{\exp(Kx) - \rho \exp(-Kx)}\right]} \quad (8\text{-}7)$$

8-5. **Exemple numérique sur une ligne avec pertes** (extrait du livre *Networks, lines and fields* par RYDER. Editeur *Prentice-Hall, New-York*).

Prenons une ligne dont les caractéristiques sont :

$R = 10{,}4$ Ω/km	$G + \mathrm{j}C\omega = 52{,}6 \cdot 10^{-6}\,\angle 90^\circ$ mho/km
$L = 0{,}003\,67$ H/km	$R + \mathrm{j}L\omega = 25{,}2\,\angle 66^\circ$ par km
$G = 0{,}8 \cdot 10^{-6}$ mho/km	$l = 100$ km
$C = 0{,}008\,35$ μF/km	$Z_c = 692\,\angle -12^\circ$ Ω
$K = 0{,}0363\,\angle 78^\circ$	$Z_r = 200 + 0\,\mathrm{j}$
$\alpha = 0{,}007\,55$ Np/km	$\alpha l = 0{,}755$ Np
$\beta = 0{,}035\,5$ rd/km	$\beta l = 3{,}55$ rd $= 203{,}80$.

— Calculons d'abord le coefficient de réflexion ρ :

$$\rho = \frac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c} = \frac{200 - 692\,\angle -12^\circ}{200 + 692\,\angle -12^\circ} = 0{,}558\,\angle 172{,}8^\circ.$$

Pour calculer maintenant Z_0, effectuons d'abord les calculs sur les exponentielles, au moyen des tables numériques, et faisons $x = l$:

$$\exp(Kl) = \exp(\alpha l) \cdot \exp(\mathrm{j}\beta l) = \exp(0{,}755)\,\angle 203{,}8^\circ = 2{,}12\,\angle 203{,}8^\circ$$

$$\exp(-Kl) = \exp(-\alpha l) \cdot \exp(-\mathrm{j}\beta l) = \exp(-0{,}755)\,\angle -203{,}8^\circ = 0{,}472\,\angle -203{,}8^\circ.$$

On aura ainsi :

$$Z_0 = 692\,\underline{/-12^\circ}\left[\frac{2{,}12\,\underline{/203{,}8^\circ} + 0{,}558\,\underline{/172{,}8^\circ}\cdot 0{,}472\,\underline{/-203{,}8^\circ}}{2{,}12\,\underline{/203{,}8^\circ} - 0{,}558\,\underline{/172{,}8^\circ}\cdot 0{,}472\,\underline{/-203{,}8^\circ}}\right]$$
$$= 692\,\underline{/-12^\circ}\left[\frac{1{,}975\,\underline{/210^\circ}}{2{,}285\,\underline{/198{,}5^\circ}}\right]$$
$$= 692\,\underline{/-12^\circ}\cdot 0{,}864\,\underline{/11{,}5^\circ} = 597\,\underline{/-0{,}5^\circ}.$$

Le courant I_0 à l'entrée de la ligne est :

$$I_0 = \frac{E}{Z_0} = \frac{10}{597\,\underline{/-0{,}5^\circ}} = 0{,}016\,7\,\underline{/0{,}5^\circ},$$

les décalages étant comptés par rapport à E, pris comme origine des phases.

Le courant dans le récepteur est donné par l'équation :

$$I_0 = \frac{I_r}{2Z_c}(Z_r + Z_c)[\exp\,(Kl) - \rho\,\exp\,(-Kl)],$$

c'est-à-dire :

$$0{,}0167\,\underline{/0{,}5^\circ} = \frac{I_r\cdot 888\,\underline{/-9{,}5^\circ}}{2\cdot 692\,\underline{/-12^\circ}}[2{,}12\,\underline{/203{,}8^\circ} - 0{,}558\,\underline{/172{,}8^\circ}\cdot 0{,}472\,\underline{/-203{,}8^\circ}]$$
$$= \frac{I_r\cdot 888\,\underline{/-9{,}5^\circ}}{1\,384\,\underline{/-12^\circ}}(2{,}285\,\underline{/198{,}5^\circ}),$$

d'où l'on tire I_r :

$$I_r = \frac{23{,}1\,\underline{/-11{,}5^\circ}}{2030\,\underline{/189^\circ}}$$
$$= 0{,}011\,3\,\underline{/-200{,}5^\circ}.$$

La D. D. P. aux bornes du récepteur est donc :

$$V_r = Z_r\cdot I_r = 200\cdot 0{,}011\,3\,\underline{/-200{,}5^\circ}$$
$$= 2{,}26\,\underline{/-200{,}5^\circ}. \qquad (E, \text{ origine des phases})$$

La puissance absorbée par le récepteur est :

$$P_r = RI_r^2 = 200\cdot 0{,}011\,3^2$$
$$= 0{,}025\,5\ \text{W},$$

quant à la puissance fournie par la source, elle est égale à :

$$P_0 = E_0 I_0 \cos\varphi = 10\,.\,0{,}016\,7\cdot\cos 0{,}5^\circ$$
$$= 0{,}167\ \text{W}.$$

8-6. **Calcul direct de l'impédance de transfert.** — De même que nous l'avons fait pour la ligne sans pertes, nous pouvons calculer l'impédance de transfert Z_{tr} qui permettra, connaissant la D. D. P. à l'entrée de la ligne, de calculer le courant dans le récepteur. Par définition, on a :

$$Z_{tr} = \frac{V_0}{I_r}.$$

Partons des équations 8-6, en faisant $V = V_0$ pour $x = l$:

$$V_0 = \frac{I_r}{2}(Z_r + Z_c)[\exp\,(Kl) + \rho\,\exp\,(-Kl)],$$

on en tire aussitôt :

$$Z_{tr} = \frac{V_0}{I_r} = \left(\frac{Z_r + Z_c}{2}\right)\left[\exp\,(Kl) + \frac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c}\exp\,(-Kl)\right]$$

ou

$$Z_{tr} = Z_r\left(\frac{\exp\,(Kl) + \exp\,(-Kl)}{2}\right) + Z_c\left(\frac{\exp\,(Kl) - \exp\,(-Kl)}{2}\right)$$

$$\boxed{Z_{tr} = Z_r\,\mathrm{ch}\,Kl + Z_c\,\mathrm{sh}\,Kl}.$$

On retrouve ainsi Z_{tr} de la formule 7-16.

8-7. **Le taux d'ondes stationnaires** (ou T. O. S.). — Quand il y a des ondes stationnaires, on a des nœuds et des ventres de V et de I, et c'est la nature de la charge qui détermine l'amplitude des uns et des autres. L'état électrique de la ligne est alors caractérisé par un nouveau coefficient, c'est le *taux d'ondes stationnaires*, désigné par S.

Définition : On appelle *taux d'ondes stationnaires* (ou T. O. S. en abrégé, ou S. W. R. en anglais), le quotient :

$$\boxed{S = \frac{V_{max.}}{V_{min.}} \quad \text{ou} \quad \frac{I_{max.}}{I_{min.}}}.$$

$V_{max.}$ et $I_{max.}$ sont les valeurs à l'endroit des ventres, $V_{min.}$ et $I_{min.}$ sont les valeurs à l'endroit des nœuds.

Relation entre S et ρ. — On a :

$$V_{max.} = V^+ + V^- = V^+(1 + \rho),$$
$$V_{min.} = V^+ - V^- = V^+(1 - \rho),$$

d'où

$$\boxed{S = \frac{V_{max.}}{V_{min.}} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}}. \qquad (8\text{-}8)$$

On en déduirait aussi :

$$\boxed{\rho = \frac{S - 1}{S + 1}},$$

ρ varie de 0 à 1, tandis que S varie de 1 à ∞.

En pratique, il est plus commode de mesurer les tensions que les courants, et nous avons vu, dans l'étude de la ligne sans pertes, comment le voltmètre « stub » permet la mesure de la D. D. P.

8-8. **Mesure de α par le taux d'ondes stationnaires.** — Si l'on connaît le T. O. S. on peut calculer α. En effet, les valeurs de l'onde incidente et de l'onde réfléchie du potentiel, à l'entrée de la ligne, sont $V_0 \exp(\alpha l)$ et $V_0 \exp(-\alpha l)$, et on aura :

$$V_{max.} = V_0 \exp(\alpha l) + V_0 \exp(-\alpha l)$$
$$V_{min.} = V_0 \exp(\alpha l) - V_0 \exp(-\alpha l),$$

d'où

$$S = \frac{V_{max.}}{V_{min.}} = \frac{\exp(\alpha l) + \exp(-\alpha l)}{\exp(\alpha l) - \exp(-\alpha l)}$$
$$= \frac{1}{\text{th } \alpha l}$$

et

$$\text{th } \alpha l = 1/S.$$

Il faut un détecteur d'ondes stationnaires n'introduisant pas de pertes, et il faut que la valeur de Z_e de ce détecteur soit égale à Z_c de la ligne.

Remarque. — On peut mesurer α directement en mesurant les tensions avec un voltmètre électronique : si $Z_e = Z_r$, on compare V_0 et V_r, et l'on a :

$$\frac{V_0}{V_r} = \exp(\alpha l)$$

d'où l'on tire α (à condition que l'on n'ait pas d'ondes stationnaires).

8-9. **Explorateur de mesure.** — On capte le champ ES par une sonde (sorte d'antenne formée par un fil rectiligne de quelques centimètres de longueur), on détecte, puis on lit le courant détecté sur un microampèremètre. Comme détecteur, on peut prendre du germanium : sa résistance du côté conducteur est de 100 à 300 Ω, et en sens inverse elle varie de 100 kΩ à 300 kΩ. On notera que la valeur maximum qu'un tel détecteur peut supporter est d'environ 20 à 30 μA.

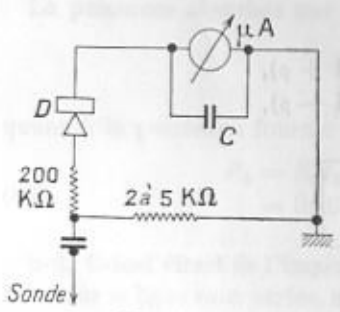


FIG. 8-1.

On place en série avec le détecteur D (fig. 8-1) une résistance de sécurité de 200 kΩ. Le galvanomètre est shunté par un condensateur dont la réactance doit être négligeable par rapport à 200 kΩ, à la fréquence utilisée.

Pour faciliter la mesure, on peut relier l'appareil de mesure avec un coaxial (fig. 8-2) avec des filtres passe-bas avant et après le câble de liaison.

— Pour mesurer λ dans l'air, sur une ligne fermée ou ouverte, il faut s'arranger pour avoir des ondes stationnaires ; si l'on déplace la sonde, on aura une série de maxima de tension : la distance de deux maxima est $\lambda/2$. On notera que dans un guide les longueurs d'onde sont plus grandes que dans l'air.

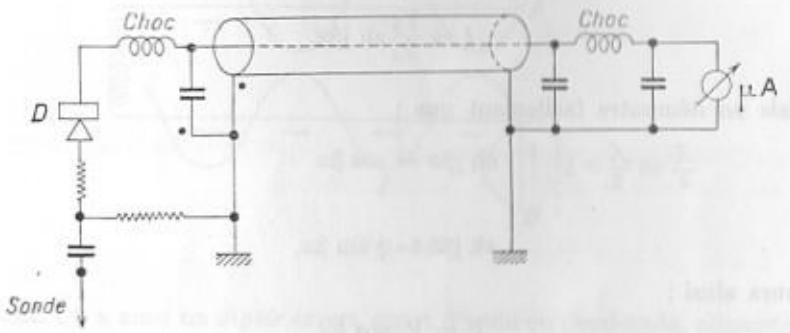


FIG. 8-2.

8-10. **Résumé.** — De toutes ces considérations et calculs, on fait en résumé les conclusions suivantes très importantes, *qui s'appliquent, bien entendu, au cas de la ligne sans pertes* :

a) Si l'impédance Z_r est *une réactance pure*, l'onde réfléchie a la même amplitude que l'onde incidente.

b) Si l'impédance Z_r est *une résistance pure*, l'onde réfléchie a une amplitude inférieure à l'onde incidente, et, à l'extrémité de la ligne, elle est en phase ou en opposition de phase avec l'onde incidente.

c) Si l'impédance Z_r est complexe ($Z_r = R + jX$), l'onde réfléchie peut avoir une amplitude quelconque, mais plus petite que l'onde incidente, et avoir une phase quelconque qui dépend de ρ.

d) Si le récepteur est une résistance pure, variable de 0 à ∞, on notera que le diagramme des ondes stationnaires varie *progressivement* depuis la forme qu'il a dans le cas du court-circuit jusqu'à celle qu'il a pour la ligne ouverte. Et au moment où $R = Z_c$, il n'y a plus d'ondes stationnaires ; mais plus R est différente de Z_c, plus l'ondulation des ondes stationnaires est accentuée.

8-11. **Cas important : ligne ouverte sans pertes.** — Une telle ligne est couramment utilisée en radioélectricité dans les antennes, le radar et l'émission dirigée.

Soit $R = 0$ et $G = 0$, donc $\alpha = 0$ et $Z_c = \sqrt{L/C}$.

Les équations de V et de I deviennent :

$$V = \frac{V_0}{2} \exp(j\beta x) + \frac{V_0}{2} \exp(-j\beta x) = V_1 + V_2$$

$$I = \frac{V_0}{2Z_c} \exp(j\beta x) - \frac{V_0}{2Z_c} \exp(-j\beta x) = I_1 - I_2,$$

ou encore :

$$V = V_0 \operatorname{ch} j\beta x$$

$$I = \frac{V_0}{Z_c} \operatorname{sh} j\beta x.$$

Mais on démontre facilement que :

$$\operatorname{ch} j\beta x = \cos \beta x$$

et

$$\operatorname{sh} j\beta x = j \sin \beta x,$$

on aura ainsi :

$$V = V_0 \cos \beta x,$$

$$I = j \frac{V_0}{Z_c} \sin \beta x.$$

Ces deux équations montrent bien, ce qui confirme ce qu'on a déjà vu, que V et I sont en quadrature dans le temps à cause de j, et en quadrature dans l'espace : on a bien des ondes stationnaires.

Les valeurs instantées sont :

$$v = V_0 \cos \beta x \cdot \sin \omega t$$

$$i = \frac{V_0}{Z_c} \sin \beta x \cdot \cos \omega t,$$

d'où l'on tire l'impédance en un point quelconque :

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_0 \cos \beta x}{(V_0/Z_c) \sin \beta x}$$

$$\boxed{Z = \frac{Z_c}{\operatorname{tg} \beta x}}$$

valeur déjà trouvée directement au chapitre I.

Naturellement, en HF, l'ensemble de ces deux fils parallèles *ne rayonne pas*, car le champ d'un tronçon de ligne est annulé par le champ du tronçon vis-à-vis de l'autre ligne, où le courant a le sens opposé au même instant.

Mais il suffit (fig. 8-3) de redresser perpendiculairement une longueur AB convenable ($\lambda/2$ ou $\lambda/4$) de l'extrémité de chaque fil pour que le rayonnement de ces deux tronçons s'ajoutent : on voit en effet que dans les deux brins devenus perpendiculaires à la ligne les deux courants ont le même sens au même

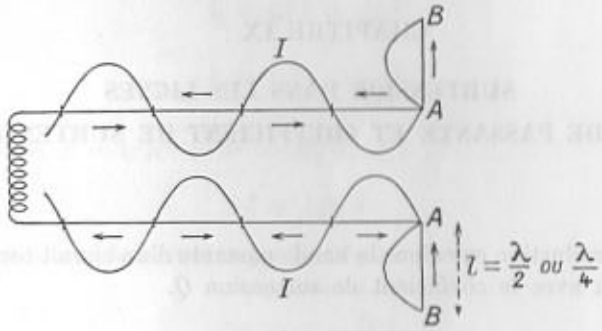


FIG. 8-3.

instant. On a ainsi un *dipôle ouvert*, quart d'onde ou demi-onde, alimenté loin de la source par deux fils appelés *feeders* et dont on peut régler la longueur pour qu'elle soit le siège d'ondes stationnaires ou que l'on peut supprimer par un stub.

Si les deux fils de ligne sont horizontaux, et les deux brins verticaux en bout de ligne, un tel dipôle rayonne magnifiquement bien, parallèlement à la surface du sol.

CHAPITRE IX

SURTENSION DANS LES LIGNES
BANDE PASSANTE ET COEFFICIENT DE SURTENSION

Comme introduction calculons la bande passante d'un circuit oscillant fermé et sa relation avec le coefficient de surtension Q.

9-1. Bande passante d'un circuit oscillant.

Premier cas : circuit oscillant série.

On sait (voir Tome I) que l'on appelle bande passante d'un circuit oscillant série la largeur $f_1 - f_2$ de la courbe de résonance $I = f(F)$ au moment où la puissance absorbée est la moitié de la puissance à la résonance (fig. 9-1) :

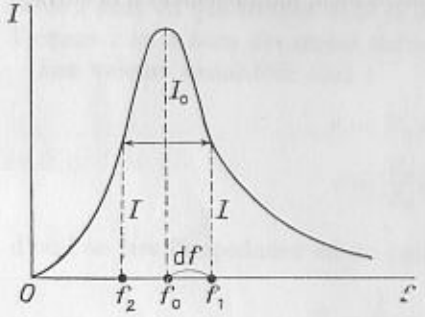


FIG. 9-1.

$$P = RI^2 = \frac{1}{2}RI_0^2, \quad \text{d'où} \quad I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

La formule de la sélectivité :

$$s = \frac{I_0}{I} = \sqrt{1 + 4Q^2\left(\frac{df}{f_0}\right)^2}$$

exprimée en imaginaires, nous donne :

$$\frac{\overline{I}_0}{\overline{I}} = 1 + j\cdot 2Q\frac{df}{f} = \frac{\overline{Z}}{R},$$

d'où la valeur de l'impédance :

$$\overline{Z} = R + jX = R\left(1 + j\cdot 2Q\frac{df}{f_0}\right)$$

où $df = f_1 - f_2$.

Il est possible que la réactance X devienne égale à R : il suffit que :

$$\frac{df}{f_0} = \pm\frac{1}{2Q},$$

d'où, en désignant par f_1 et f_2 les deux fréquences pour lesquelles $X = R$:

$$f_1 - f_0 = +\frac{f_0}{2Q}$$

et

$$f_2 - f_0 = -\frac{f_0}{2Q},$$

ce qui donne :

$$f_1 = f_0\left(1 + \frac{1}{2Q}\right)$$

$$f_2 = f_0\left(1 - \frac{1}{2Q}\right).$$

A ce moment $Z = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$, et :

$$I = I_0/\sqrt{2}.$$

La largeur totale de la bande passante est :

$$\boxed{f_1 - f_2 = \frac{f_0}{Q}}, \qquad (9\text{-}1)$$

elle est d'autant plus petite, pour une valeur donnée de f_0, que Q est plus grand.

Deuxième cas : circuit oscillant parallèle. — Nous avons vu au Tome I que l'on a :

$$Z_0 = \frac{L}{CR} \quad \text{et} \quad Z = \frac{L}{CZ_{\text{série}}},$$

d'où :

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{R}{Z_{\text{série}}} = \frac{R}{R + j[L\omega - (1/C\omega)]} = \frac{1}{1 + j\cdot 2Q\dfrac{df}{f_0}}.$$

Donc, si

$$\frac{df}{f_0} = \frac{1}{2Q},$$

il reste :

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{1}{1 + j},$$

dont le module est $1/\sqrt{2}$, et à ce moment $X = R$ comme dans le premier cas.
On aura encore ici :

$$f_1 - f_2 = \frac{f_0}{Q}.$$

Inversement, pour un circuit quelconque, par exemple une ligne ou encore

9-3. **Impédance de la ligne en court-circuit à la résonance,** — D'après l'équation 9-3, on a à la résonance :

$$Z_{cc} = \frac{Z_c}{\alpha l} = 2Q\frac{Z_c}{\beta l}.$$

Pour les différentes résonances, on a :

$$\beta l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots$$

et

$$Z_{cc} = \frac{4Q}{\pi n} Z_c \qquad (9\text{-}7)$$

où n est le nombre impair de $\lambda/4$.

D'où la conclusion :

le maximum possible de Z_{cc} à la résonance a lieu pour $n = 1$, c'est-à-dire pour la ligne en quart d'onde.

— *Cas d'une ligne ouverte en* $\lambda/4$. On a exactement les mêmes calculs à condition de prendre les admittances Y ($Y = 1/Z$) puisque la courbe de résonance est applicable à l'admittance de la ligne ; on en déduit aussitôt le rapport des admittances.

Pour une ligne ouverte, on a :

$$\frac{Z_0}{Z_c} = \frac{-\mathrm{j}}{\operatorname{tg} \beta x} = \alpha x - \mathrm{j} \cos \beta x,$$

d'où le rapport des admittances :

$$\frac{Y_0}{Y_c} = \frac{1}{\alpha x - \mathrm{j} \cos \beta x}; \qquad \left(\text{où } Y_c = \sqrt{\frac{C}{L}}\right)$$

on en tire :

$$Y_{\text{résonance}} = \frac{Y_0}{\alpha x} = \frac{2Q}{\beta x} Y_c.$$

L'admittance correspondante à un multiple impair de $\lambda/4$ est :

$$Y_{\text{résonance}} = Y_c \frac{4Q}{n\pi}. \qquad (9\text{-}8)$$

Ainsi, si l'on veut une ligne très sélective à haute admittance, on a deux moyens :

1° ligne ouverte en $\lambda/2$,

2° ligne en court-circuit en $\lambda/4$ (de même valeur de Q).

Remarque. — La ligne en court-circuit et en $\lambda/4$ laisse passer le continu et la B. F., la ligne en $\lambda/2$ les arrête.

Une ligne en court-circuit est beaucoup plus facile à ajuster qu'une ligne ouverte.

Enfin, plus une ligne est courte, moins elle a de pertes.

Valeur maximum de $Z_{rés.}$ dans le cas d'un cable coaxial. — On a vu qu'il y a une valeur optimum de b/a qui rend minimum l'atténuation, et ce n'est pas elle qui rend maximum $Z_{rés.}$ parce que $Z_{rés.} = Z_c/\alpha x$ dépend de Z_c et de α et que ces deux quantités dépendent de b/a.

Pour du cuivre et un isolant sans pertes, SKILLING donne la formule suivante pour $Z_{rés.}$:

$$Z_{\text{résonance}} = \frac{122\sqrt{f}}{n} \cdot \frac{b\,(\lg b/a)^2}{1 + b/a} \qquad (9\text{-}9)$$

où a et b en cm, f en cycles/s, n est le nombre impair de $\lambda/4$, et cette valeur de $Z_{rés.}$ est maximum pour $b/a = 9{,}2$. Si b/a varie de 5 à 20 %, $Z_{rés.}$ ne varie que de 10 %.

Pour deux fils parallèles, en court-circuit et en $\lambda/4$, même formule avec $b/a = 8$.

Mêmes formules pour une ligne ouverte en $\lambda/2$ ou un multiple où n est pair.

9-4. **Calcul de la surtension à l'extrémité d'une ligne ouverte.** — Partons des équations de propagation de la ligne ouverte sans pertes, mais en remplaçant β par D, et en faisant $Z_r = \infty$:

$$\overline{V_0} = \overline{V_r}\,(\cos Dl + \mathrm{j}\frac{Z_c}{Z_r}\sin Dl)$$

$$= \overline{V_r} \cos Dl = \overline{V_r} \cos (\beta - \mathrm{j}\alpha)l.$$

A la résonance, βl est un multiple impair de $\pi/2$ et $l = n\pi/2\beta$ avec n impair, ce qui donne :

$$\frac{\overline{V_0}}{\overline{V_r}} = \cos\left(n\frac{\pi}{2} - \mathrm{j}\frac{n\pi\alpha}{2\beta}\right) = \sin\left(\mathrm{j}\frac{n\pi}{4Q}\right),$$

or, R étant très grande, il reste :

$$\frac{\overline{V_0}}{\overline{V_r}} \approx \mathrm{j}\frac{n\pi}{4Q}$$

et comme la ligne fait n fois $\lambda/4$, il reste (en module) :

$$\boxed{\frac{V_r}{V_0} = \frac{4Q}{n\pi}}. \qquad (9\text{-}10)$$

Si $n = 1$, $V_r/V_0 > Q$ et si n croît, V_r/V_0 diminue.

Exemple. — $f = 20$ Mc/s, $\alpha = 6{,}8 \cdot 10^{-4}$ Np/m.

— On aura :

$$\beta = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{2\pi \cdot 20 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} = 0{,}42 \text{ rd/m},$$

d'où :

$$Q = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{0{,}42}{2 \cdot 6{,}8 \cdot 10^{-4}} = 310.$$

La bande passante est alors :

$$f_1 - f_2 = \frac{f_0}{Q} = \frac{20 \cdot 10^6}{310} = 64\,700,$$

la résonance est donc extrêmement pointue.

Remarque. — Étant donné que :

$$\beta l = \frac{\omega_0}{\gamma} l$$

l'équation qui donne Z_0 de résonance peut encore s'écrire pour $x = l$:

$$Z_{0\ \text{de résonance}} = \frac{Z_c}{\alpha l + \mathrm{j}\beta \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\omega_0} \cdot l} = \frac{Z_c}{\alpha l + \mathrm{j} \dfrac{l}{\gamma} \mathrm{d}\omega}$$

en supposant f variable et l constant.

Si f est constante et l variable, on aurait :

$$\theta = \beta l = \frac{\omega}{\gamma} l,$$

d'où :

$$\mathrm{d}\theta = \frac{\omega}{\gamma} \mathrm{d}l = 2\pi \frac{\mathrm{d}l}{\lambda}$$

et

$$Z_0 = \frac{Z_c}{\alpha l + \mathrm{j}2\pi \dfrac{\mathrm{d}l}{\lambda}}. \qquad (9\text{-}11)$$

— *En résumé.* A la résonance, on a :

$$Z_{0\ \max.} = \frac{Z_c}{\alpha l}\ \text{ohmique},$$

et

$$Z_{0\ \min.} = Z_c \cdot \alpha l\ \text{ohmique}.$$

Au-dessus de la résonance, Z_0 est inductive et au-dessous de la résonance elle est capacitive.

9-5. **Autre façon de calculer la surtension en bout de ligne.** — Nous avons donné dans l'étude de la ligne sans pertes (bien que cela paraisse contradictoire),

au chapitre des constantes des lignes, les deux formules donnant la résistance de deux fils parallèles ou bien d'un câble coaxial.

En H. F. on a vu que :

$$\alpha = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \approx \frac{R}{2Z_c}.$$

Or, pour de courtes lignes, α est faible et :

$$Z_0 = \frac{Z_c}{\alpha l}, \qquad \left(\text{avec } l = n\frac{\lambda}{4}\right)$$

d'où :

$$Z_0 = \frac{2Z_c^2}{Rl} = \frac{8Z_c^2}{n\lambda R},$$

où n est impair.

Prenons maintenant les équations de propagation d'une ligne ouverte en quart d'onde, où $I_r = 0$, il reste :

$$V_x = V_r \cdot \mathrm{ch}\ Kx$$

d'où, pour $x = l$, $V_x = V_0$ et :

$$V_r = \frac{V_0}{\mathrm{ch}\ Kl}. \qquad (K = \alpha + \mathrm{j}\beta)$$

Calculons séparément ch Kl, où K est imaginaire (ce qui est un excellent exercice de calcul sur les lignes hyperboliques !)

On sait que :

$$\mathrm{ch}\ (a + \mathrm{j}b) = \mathrm{ch}\ a \cdot \mathrm{ch}\ \mathrm{j}b + \mathrm{sh}\ a \cdot \mathrm{sh}\ \mathrm{j}b,$$

mais, comme on a :

$$\mathrm{ch}\ \mathrm{j}b = \cos b \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}\ \mathrm{j}b = \mathrm{j} \sin b,$$

il reste :

$$\mathrm{ch}\ (a + \mathrm{j}b) = \mathrm{ch}\ a \cdot \cos b + \mathrm{j}\ \mathrm{sh}\ a \cdot \sin b,$$

dont le module est :

$$\sqrt{\mathrm{ch}^2 a \cdot \cos^2 b + \mathrm{sh}^2 a \cdot \sin^2 b} = \sqrt{(1 + \mathrm{sh}^2 a)\cos^2 b + \mathrm{sh}^2 a(1 - \cos^2 b)} = \sqrt{\mathrm{sh}^2 a + \cos^2 b}.$$

On aura donc :

$$\mathrm{ch}\ (\alpha + \mathrm{j}\beta)l = \mathrm{ch}\ Kl = \sqrt{\mathrm{sh}^2 \alpha l + \cos^2 \beta l},$$

mais, pour $l = \lambda/4$, on a $\cos \beta l = 0$, d'où :

$$\frac{V_r}{V_0} = \frac{1}{\mathrm{ch}\ Kl} = \frac{1}{\mathrm{sh}\ \alpha l} \approx \frac{1}{\alpha l} = \frac{2Z_c}{lR} = \frac{8Z_c f}{R\gamma}.$$

En remplaçant R par sa valeur (voir chapitre VI) pour deux fils parallèles en cuivre, on obtient finalement :

$$\boxed{\frac{V_r}{V_0} = \frac{9{,}5 Z_c r\sqrt{f}\cdot 10^5}{3\cdot 10^8}} \qquad (9\text{-}12)$$

où r est le rayon d'un fil en cm.

On voit ainsi que ce quotient, qui exprime la surtension, est *proportionnel* à $\sqrt{f}$, ce qui explique les très hautes tensions obtenues par TESLA dans ses célèbres expériences en HF (plusieurs millions de volts). On voit que ce quotient varie en raison inverse de α, donc si $\alpha = 0$, ce quotient tend vers l'infini !

Exemple : Rayon du fil 1,3 mm, $f = 10^6$ et $Z_c = 700\ \Omega$.
— On a :

$$\frac{V_r}{V_0} = \frac{9{,}5\cdot 700\cdot 0{,}13\sqrt{10^6}\cdot 10^5}{3\cdot 10^8} = 294$$

ou, en décibels :

$$20 \lg 294 = 49 \text{ dB}.$$

9-6. **Généralisation du coefficient de surtension Q.** — On peut généraliser la définition connue de Q d'un circuit oscillant fermé :

$$Q = L\omega/R$$

pour pouvoir l'appliquer à n'importe quel circuit (fermé, ouvert, ligne ou cavité résonnante).

On a :

$$Q = \frac{L\omega}{R} = \frac{L\omega I^2}{RI^2} = \omega\frac{1}{2}\frac{L2I^2}{RI^2} = \frac{L\omega\left(I\sqrt{2}\right)^2}{2RI^2} = \frac{\omega}{2}\cdot\frac{LI^2_{\max.}}{RI^2_{\text{eff.}}}$$
$$= \omega\cdot\frac{\text{Énergie emmagasinée}}{\text{Énergie dissipée}} = 2\pi f\cdot\frac{W_{\text{emm.}}}{W_{\text{diss.}}}$$
$$= 2\pi\frac{W_{\text{emm.}}}{W_{\text{diss.}}/f},$$

ou enfin :

$$\boxed{Q = 2\pi\frac{W_{\text{emmagasinée}}}{W_{\text{dissipée par période}}}}. \qquad (9\text{-}13)$$

Application à une ligne en quart d'onde. — Supposons une ligne à faibles pertes et en court-circuit. Nous avions posé :

$$Q = \pi/2l.$$

Au moment où la tension est partout nulle le long de la ligne, le courant I est partout égal à la valeur de crête, et si nous appelons I_r le courant efficace dans le récepteur, on a :

$$i = I_r\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2l}.$$

Un élément de longueur dx emmagasine une énergie :

$$dW = \frac{1}{2}(L\,dx)i^2$$

et l'énergie totale emmagasinée dans toute la ligne, sous forme électromagnétique, est :

$$W_{EM} = \int_0^l \frac{1}{2}LI_r^2\cdot 2\sin^2\frac{\pi x}{2l}\cdot dx = \frac{1}{2}(Ll)I_r^2 \text{ joules.}$$

Au moment où i est partout nul, l'énergie contenue dans le champ électrostatique de C serait :

$$W_{ES} = \frac{1}{2}(Cl)V^2 \text{ joules.}$$

— Calculons maintenant la puissance perdue en chaleur dans la ligne.
Un élément de longueur dx absorbe une énergie (en joules) :

$$dW = (R\,dx)i^2;$$

et pour toute la ligne :

$$P_1 = \text{pertes joule totales} = \int_0^l Ri^2\,dx = \int_0^l RI_r^2\sin^2\frac{\pi x}{2l}\,dx = \frac{1}{2}(Rl)I_r^2 \text{ watts.}$$

D'autre part, en un point quelconque, on a :

$$V_x = I_r Z_c\cos\frac{\pi x}{2l},$$

les pertes dues aux fuites seront donc :

$$P_2 = \text{pertes dues aux fuites} = \int_0^l GV^2\,dx = \frac{1}{2}(Gl)Z_c^2I_r^2 = \frac{1}{2}\frac{(Gl)}{C}LI_r^2.$$

— On peut alors calculer Q.

$$Q = \omega \cdot \frac{W_{\text{emmagasinée}}}{P_1 + P_2} = \frac{\omega LC}{RC + LG}, \qquad (9\text{-}14)$$

qui d'ailleurs, si $G = 0$, donne $Q = L\omega/R$.

Mais il faut remarquer que la première définition de Q par la bande passante donne le même résultat :

$$Q = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\omega\sqrt{LC}}{2\left(\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)} = \frac{\omega LC}{RC + LG}.$$

Ces formules et définitions sont donc équivalentes.

Rappelons enfin que Q atteint plusieurs milliers pour les lignes.

9-7. **Quelques considérations pratiques.** — En pratique, Q est plus petit que les valeurs calculées parce que, en général, les pertes sont sous-estimées : la rugosité des conducteurs intervient dans l'effet de peau, l'oxydation, un peu de rayonnement par le bout de la ligne, la résistance du court-circuit qui n'est pas nulle, etc.

Il faut compter aussi avec la longueur du court-circuit (fig. 9-2) qui augmente la valeur de l, et qui amène des perturbations dans les champs EM et ES.

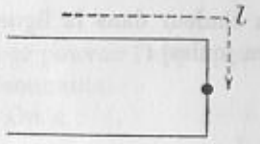


FIG. 9-2.

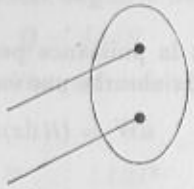


FIG. 9-3.

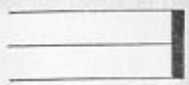


FIG. 9-4.

Si le court-circuit est un disque bon conducteur (fig. 9-3), la réflexion est meilleure et la longueur de la ligne est vraiment la longueur des fils.

Dans les câbles coaxiaux le court-circuit est facile à faire au moyen d'un disque métallique, à condition que les soudures soient bonnes, puisque c'est là justement où I est maximum (fig. 9-4).

En U. H. F. les lignes en $\lambda/4$ et $\lambda/2$ sont courtes et très utiles.

CHAPITRE X

APPLICATION AUX ANTENNES DE LA THÉORIE DES LIGNES

Tout ce qui est exposé dans ce chapitre s'applique aux antennes de réception comme aux antennes d'émission.

10-1. **Circuit oscillant ouvert.** — Une antenne est un circuit oscillant ouvert. Un circuit oscillant formé d'une inductance et d'une capacité est un circuit

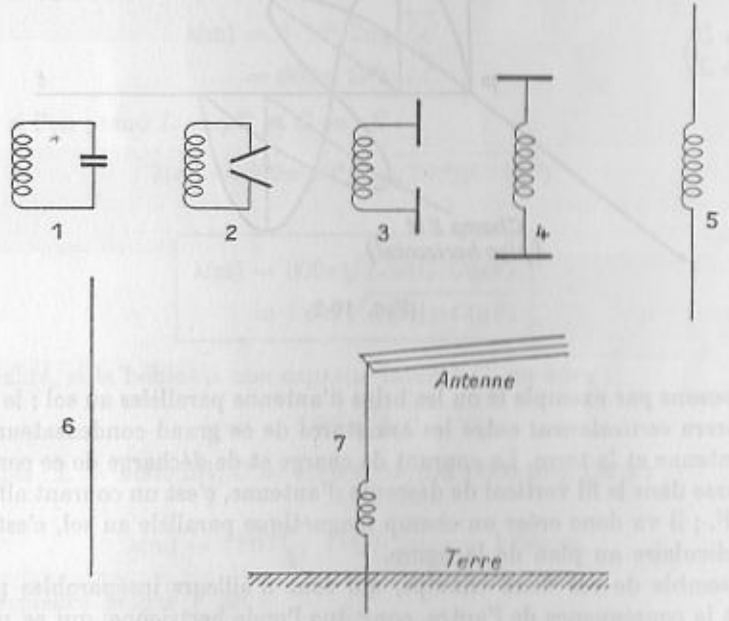


FIG. 10-1.

oscillant fermé, et un tel circuit ne rayonne pratiquement pas à grande distance parce que le champ ES dans le condensateur et le champ EM dans l'inductance sont trop concentrés.

Pour agir à distance, il faut « ouvrir » le circuit oscillant, et la figure 10-1 montre comment on « ouvre » un tel circuit : de la figure 1 à la figure 5, on a diminué peu à peu la capacité (sans qu'elle devienne nulle), puis en étirant la bobine de la figure 5 jusqu'à obtenir un fil rectiligne on diminue l'inductance (sans qu'elle devienne nulle).

Enfin, pour faciliter le rayonnement à grande distance, on remplacera l'une des armatures du condensateur par la terre (avec une prise de terre), et l'autre armature par des fils isolés très élevés, isolés du sol, et qui constitueront l'antenne proprement dite.

Pour coupler cette antenne à un autre circuit, on placera en série une *petite* inductance de couplage.

Ainsi, un fil rectiligne isolé est un circuit oscillant : à nous de trouver sa fréquence propre de résonance. On a un dipôle.

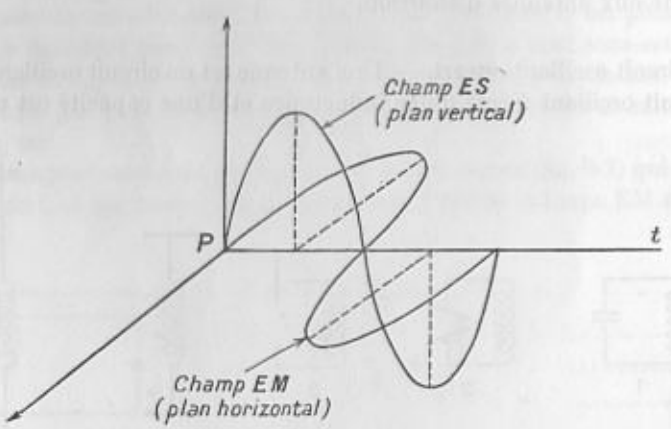


FIG. 10-2.

Supposons par exemple le ou les brins d'antenne parallèles au sol : le champ ES vibrera *verticalement* entre les armatures de ce grand condensateur formé par l'antenne et la terre. Le courant de charge et de décharge de ce condensateur passe dans le fil vertical de descente d'antenne, c'est un courant alternatif de H. F. ; il va donc créer un champ magnétique parallèle au sol, c'est-à-dire perpendiculaire au plan de la figure.

L'ensemble de ces deux champs, qui sont d'ailleurs inséparables puisque l'un est la conséquence de l'autre, constitue l'onde hertzienne, qui se propage à grande distance dans l'espace à une vitesse égale à celle de la lumière : $c = 300\,000$ km/s.

La figure 10-2 vue en perspective montre comment varient, en un point P quelconque de l'espace et en fonction du temps, ces deux champs E et H.

Nous verrons au chapitre de la Théorie de MAXWELL, Chapitre XII, que *ces deux champs qui sont en quadrature dans l'espace, sont en phase dans le temps*, et que leurs valeurs sont :

$$E = E_0 \sin \omega t$$

et

$$H = H_0 \sin \omega t.$$

Au récepteur, on utilisera soit le champ ES, soit le champ EM, soit les deux à la fois.

10-2. **Longueur d'onde.** — Par définition la longueur d'onde λ est la distance parcourue par l'onde, dans l'espace, pendant la durée d'une période.

En une seconde, l'onde parcourt c mètres, et en T secondes elle parcourt T fois plus, soit λ :

$$\boxed{\lambda = cT} \qquad \left.\begin{array}{l} T \text{ en secondes} \\ c \text{ en m/s} = 3 \cdot 10^8 \\ \lambda \text{ en mètres} \end{array}\right\} \quad (10\text{-}1)$$

ou

$$\lambda = c/F.$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \lambda(\text{m}) &= 3 \cdot 10^8 \cdot 2\pi\sqrt{LC} \\ &= 600\pi \cdot 10^6 \sqrt{LC} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \text{C en F} \\ \text{L en H} \end{pmatrix}$$

ou bien, si l'on prend L en μH et C en μF :

$$\lambda(\text{m}) = 600\pi \cdot 10^6 \sqrt{(L \cdot 10^{-6})(C \cdot 10^{-6})}$$

ou

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda(\text{m}) &= 600\pi\sqrt{L(\mu\text{H}) \cdot C(\mu\text{F})} \\ &= 1\,885\sqrt{L(\mu\text{H}) \cdot C(\mu\text{F})} \end{aligned}}. \qquad (10\text{-}2$$

En réalité, si la bobine a une capacité interne C_0 on aura :

$$\lambda(\text{m}) = 1\,885\sqrt{L(C + C_0)}.$$

Exemple : $L = 1\,000$ μH, $C = 1/1\,000$ μF (ou 1 000 pF). On a :

$$\lambda(\text{m}) = 1\,885\sqrt{1\,000 \cdot \frac{1}{1\,000}} = 1\,885 \text{ m}.$$

La fréquence propre F est :

$$\text{F} = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1\,000 \cdot 10^{-6}) \cdot \left(\frac{1}{1\,000} \cdot 10^{-6}\right)}}$$

$$= \frac{10^6}{2\pi} = 169\,000 \quad \text{ou} \quad 169 \text{ kc/s}.$$

10-3. **Modes de vibration d'une antenne.** — *Une antenne vibre comme une ligne ouverte, et tout dépend de sa longueur par rapport à* λ.

Une antenne (une vraie!) peut vibrer de différentes façons, soit sur sa fondamentale, soit sur harmoniques.

L'antenne classique est l'antenne en quart d'onde ($l = \lambda/4$) avec un ventre de potentiel et un nœud de courant à son extrémité, et à sa base (la terre) un nœud de potentiel et un ventre de courant (ce qui nécessitera une bonne prise de terre) ; c'est le cas des antennes d'émission.

La figure 10-3 donne la répartition de V et de I pour l'antenne quart d'onde.

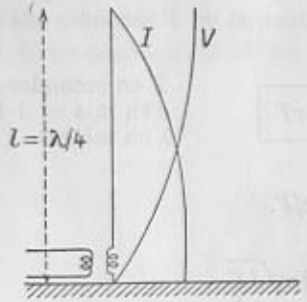


FIG. 10-3.

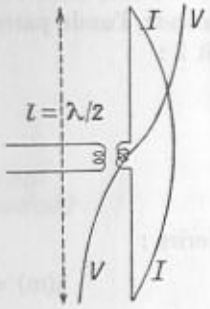


FIG. 10-4.

L'antenne, qui peut être verticale ou horizontale, peut vibrer sur harmoniques, mais le rayonnement est beaucoup moins bon. Elle peut vibrer en demi-onde et la figure 10-4 montre la répartition de I et de V.

Premier cas. — *Fil isolé de longueur* l (fig. 10-5).

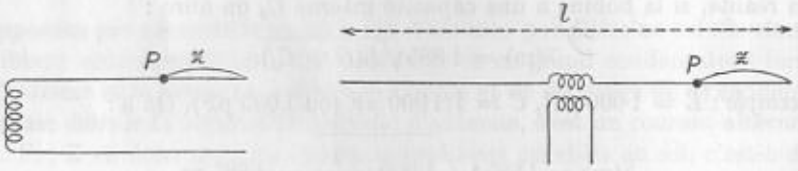


FIG. 10-5.

On a vu dans l'étude des lignes sans pertes que, pour une ligne ouverte on a, en un point P quelconque, à la distance z du bout libre :

$$i = I_0 \sin \beta z \cdot \cos \omega t$$

$$v = V_0 \cos \beta z \cdot \sin \omega t. \qquad (\beta = 2\pi/\lambda)$$

Plaçons-nous au moment où i et v passent par leurs amplitudes maximales, ce qui donne :

$$I = I_0 \sin \beta z = I_0 \sin \frac{2\pi z}{\lambda}$$

$$V = V_0 \cos \beta z = V_0 \cos \frac{2\pi z}{\lambda}.$$

1° I *sera nul* pour :

$$\sin \frac{2\pi z}{\lambda} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{2\pi z}{\lambda} = K\pi$$

et

$$z = K\frac{\lambda}{2} \qquad \text{ou} \qquad 2K\frac{\lambda}{4},$$

on aura des nœuds de courant.

2° I *sera maximum* pour :

$$\sin \frac{2\pi z}{\lambda} = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{2\pi z}{\lambda} = (2K+1)\frac{\pi}{2}$$

et

$$z = \frac{\lambda}{4} \qquad \text{ou} \qquad (2K+1)\frac{\lambda}{4},$$

on aura des ventres de courant.

Pour le potentiel v, c'est l'inverse : quand i est maximum, v est nul et inversement.

On a vu, dans l'étude de la ligne ouverte, que :

$$\frac{V_{\text{max. au ventre de potentiel}}}{I_{\text{max. au ventre de courant}}} = Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (10\text{-}3)$$

D'après l'équation $z = K\lambda/2$, on aura, pour un fil de longueur totale l :

$$l = K\frac{\lambda}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = \frac{2l}{K},$$

et pour $K = 1$ (sur la fondamentale) :

$\lambda = 2l$ (antenne demi-onde)

Pour $K = 2$, $\lambda = l$

pour $K = 3$, $\lambda = 2l/3$

pour $K = 5$, $\lambda = 2l/5$, etc.,

on voit qu'une telle antenne peut vibrer sur tous les harmoniques, pairs ou impairs.

Pour la fondamentale (cas général) $K = 1$, et on a :

$$I = I_0 \sin \frac{2\pi z}{\lambda} = I_0 \sin \frac{\pi z}{l}$$

$$V = V_0 \cos \frac{2\pi z}{\lambda} = V_0 \cos \frac{\pi z}{l}.$$

Calcul de l'énergie électro-statique contenue dans une antenne de longueur l. — Si C est la capacité par unité de longueur, un élément de longueur dz contient une énergie ES :

$$dW = \frac{1}{2}(C\,dz)V^2$$

d'où, l'énergie totale :

$$W = \frac{1}{2}\int_0^l CV_0^2 \cos^2 \frac{\pi z}{l}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}CV_0^2 \int_0^l \left(\frac{1 + \cos 2\pi z/l}{2}\right) dz = \frac{1}{2}CV_0^2 \frac{l}{2},$$

et, si l'on pose :

$$Cl/2 = C_0$$

en appelant C_0 la capacité propre de l'antenne, on obtient :

$$\boxed{W = \frac{1}{2}C_0V_0^2} \qquad (10\text{-}4)$$

comme pour les circuits fermés.

Calcul de l'énergie électromagnétique contenue dans une antenne de longueur l. — Si L est l'inductance par unité de longueur, un élément de longueur dz contient une énergie électromagnétique :

$$dW = \frac{1}{2}(L \cdot dz)I^2$$

d'où, l'énergie totale :

$$W_{\text{totale}} = \frac{1}{2}L\int_0^l I_0^2 \sin^2 \frac{\pi z}{l} \cdot dz$$

$$= \frac{1}{2}LI_0^2 \int_0^l \left(\frac{1 - \cos \frac{2\pi z}{l}}{2}\right) dz = \frac{1}{2}LI_0^2 \frac{l}{2},$$

et, si l'on pose :

$$L \cdot \frac{l}{2} = L_0 \text{ (inductance propre de l'antenne)}$$

on obtient :

$$\boxed{W = \frac{1}{2}L_0I_0^2} \qquad (10\text{-}5)$$

comme pour les circuits fermés.

Résistance propre de l'antenne. — On la définit par l'énergie perdue en chaleur.

Un élément de longueur dz absorbe une énergie :

$$dW = (R \cdot dz)I_{\text{eff.}}^2$$

où R est la résistance en HF par unité de longueur, ou encore :

$$dW = R\,dz\left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 \sin^2 \omega t.$$

L'énergie totale sera :

$$W = \frac{RI_0^2}{2}\int_0^l \sin^2 \frac{\pi z}{l}\,dz = RI_0^2 \frac{l}{2},$$

et si l'on pose :

$$R\frac{l}{2} = R_0 \quad \text{(résistance propre de l'antenne)}$$

on obtient :

$$W = R_0 \frac{I_0^2}{2} = R_0I_{\text{eff.}}^2 \qquad (10\text{-}6)$$

comme pour les circuits fermés.

— La résistance *totale* d'un circuit antenne-terre comprend :

a) la résistance R_0 en HF des fils de l'antenne,

b) la résistance de la prise de terre,

c) la résistance due aux pertes par courants induits dans tous les conducteurs voisins,

d) la résistance due au mauvais isolement et aux effluves,

e) la résistance de rayonnement, qui est la résistance utile, et dont nous reparlerons plus loin.

Nous ajouterons que c'est la résistance de la prise de terre qui est, malheureusement, de beaucoup, la plus importante de toutes ces résistances, d'où l'intérêt de la diminuer le plus possible au moyen de grandes plaques métalliques ou de grillages en cuivre enfouis dans le sol, dans le cas des antennes d'émission.

10-4. **Deuxième cas.** — *Fil de longueur l réuni au sol* (fig. 10-6).

Le point A est toujours un nœud de potentiel, et B un nœud de courant (puisque le fil est coupé), on aura donc :

$$l = (2K+1)\frac{\lambda}{4} \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \frac{4l}{2K+1},$$

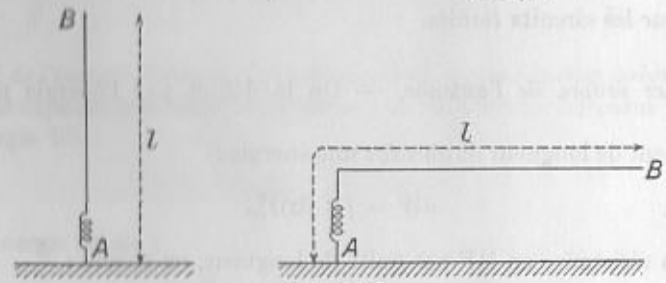


FIG. 10-6.

et la plus grande λ possible sera (pour $K = 0$) :

$$\boxed{\lambda = 4l} \qquad (10\text{-}7)$$

C'est la fondamentale de l'antenne quart-d'onde. On aura donc :

$$I = I_0 \sin 2\pi \frac{z}{4l/(2K+1)} = I_0 \sin 2\pi \frac{(2K+1)z}{4l},$$

et, sur la fondamentale, où $K = 0$:

$$I = I_0 \sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right)$$

et

$$V = V_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right).$$

Les harmoniques sont tous impairs :

$$\lambda = \frac{4l}{3}, \quad \frac{4l}{5}, \quad \frac{4l}{7}, \text{ etc.}$$

On se ramène au cas précédent en considérant *l'image* de l'antenne dans le sol (fig. 10-7).

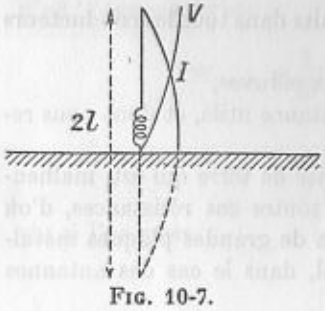


FIG. 10-7.

En réalité, le rapport $\lambda/4l$ est un peu plus grand que 1, et tend vers 1 quand l augmente. Le rapport $\lambda/4l$ augmente avec le nombre de brins de l'antenne.

On se rappellera que l'on augmente beaucoup la capacité propre C_0 de l'antenne en utilisant plusieurs fils d'antenne et en augmentant leur longueur. Ces différents brins peuvent être parallèles ou non parallèles, ou bien être situés dans des plans différents.

10-5. **Capacité et inductance effectives d'une antenne.** — Par analogie avec un circuit oscillant fermé, appelons C_e et L_e la capacité effective et l'inductance effective de l'antenne, correspondant à la formule :

$$T = 2\pi\sqrt{L_e C_e}.$$

Dans le cas d'un fil relié au sol, on a vu que :

$$\lambda = 4l = cT,$$

où c est la vitesse de propagation.

Or nous verrons dans le chapitre consacré aux équations de MAXWELL que ce dernier a démontré que :

$$c = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}},$$

d'où :

$$T = \frac{\lambda}{c} = 4l\sqrt{L_1 C_1} = 4\sqrt{(L_1 l)(C_1 l)}$$

$$= 2\pi\sqrt{\left(\frac{2L_1 l}{\pi}\right)\left(\frac{2C_1 l}{\pi}\right)}.$$

Or, si l'on pose :

$$L_{\text{effective}} = \frac{2L}{\pi} = \frac{2L_1 l}{\pi}$$

et

$$C_{\text{effective}} = \frac{2C}{\pi} = \frac{2C_1 l}{\pi},$$

on obtient en effet :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{L_e C_e}} \qquad (10\text{-}8)$$

comme pour un circuit oscillant fermé.

Remarque. — On peut voir que :

$$W_{ES} = W_{EM}.$$

En effet, on sait que :

$$I_0 = V_0\sqrt{\frac{C_1}{L_1}},$$

d'où :

$$W_{EM} = \frac{1}{2} L_0 I_0^2 = \frac{1}{2} L_1 \frac{l}{2} \cdot V_0^2 \frac{C_1}{L_1}$$

$$W_{EM} = \frac{1}{2} C_1 \frac{l}{2} V_0^2 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$$

$$= W_{ES}.$$

10-6. **Antennes complexes.**

Premier cas : capacité au sommet de l'antenne (fig. 10-8). — Le courant à l'extrémité A n'est plus nul : c'est le courant de charge de la capacité C', et tout se passe comme si on avait ajouté une longueur AA', et la longueur d'onde obtenue est celle d'une antenne de longueur l'.

On démontre que l'on a :

$$\frac{2}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda_0}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) = -\frac{C'}{C},$$

où :

$$\lambda = 4l', \qquad \lambda_0 = 4l \qquad \text{et} \qquad C = lC_1.$$

On améliore ainsi énormément le rayonnement de l'antenne.

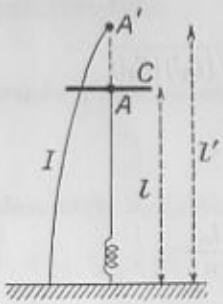


Fig. 10-8.

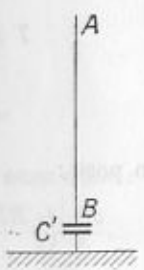


Fig. 10-9.

Deuxième cas : capacité à la base (fig. 10-9). — On se ramène à un fil de longueur AB avec une capacité C' non infinie. On démontre, dans ce cas, que l'on a :

$$\frac{C'}{C} = \frac{\lambda}{2\pi l}\operatorname{tg}\pi\left(1 - \frac{2l}{\lambda}\right),$$

et λ varie de deux à quatre fois AB, donc λ est plus petite que sa valeur primitive sans C'.

Si $C' = 0$, antenne coupée, on a $\lambda = 2l$.

Si $C' = \infty$, antenne reliée au sol, on a $\lambda = 4l$.

On peut donc remplacer la terre par une grande capacité C' dont une armature est reliée au sol : c'est *un contrepoids*, formé par exemple de grillages métalliques posés sur un sol rocheux ou sableux, ou bien formé par un autre brin d'antenne *isolé* du sol, et placé très près du sol.

A bord d'avion, ce sont le fuselage et les ailes qui forment contrepoids, remplaçant la terre.

Un contrepoids supprime la résistance de terre (qui vaut environ 80 % de la résistance totale du circuit antenne-terre) : on obtient ainsi une très grande

sélectivité, mais on réduit énormément la portée. C'est pourquoi un émetteur d'avion porte beaucoup moins loin qu'à terre.

Remarque. — Placer une capacité *au sommet de l'antenne* est bien préférable que de la placer à la base.

Troisième cas : inductance à la base de l'antenne (fig. 10-10). — Tout se passe comme si l'on avait un fil de longueur $AA' > 2l$, donc $\lambda > 4l$. On a un nœud de tension et un ventre de courant virtuels en O dans le sol. On diminue le rayonnement de l'antenne, mais on augmente l'inductance totale ce qui permet d'accorder l'antenne sur une fréquence plus petite.

— *En résumé*, quel que soit le cas, il est préférable d'augmenter la hauteur de l'antenne, ou d'allonger la longueur des brins, à la réception comme à l'émission.

Mais la meilleure antenne est l'antenne verticale la plus haute possible.

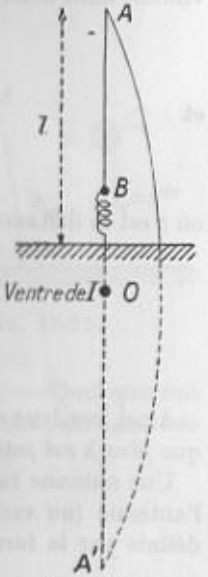


Fig. 10-10.

LE RAYONNEMENT

10-7. **Champs créés à distance par un dipôle ou doublet** (fig. 10-11). — Si à chaque instant la charge ES de chaque armature du dipôle est :

$$q = Q \sin \omega t,$$

le fil sera parcouru par un courant :

$$i = \frac{dq}{dt} = Q\omega \cos \omega t.$$

Le courant maximum $Q\omega$ (*proportionnel à* ω) produira en un point quelconque de l'espace un champ magnétique donné par la loi de Laplace ; et le champ créé par un élément dl sera :

$$dH = \frac{I_0\, dl \sin \alpha}{r^2}.$$

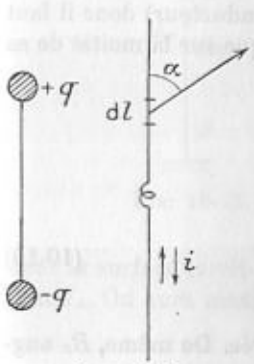


Fig. 10-11.

Mais on a supposé que l'action à distance était instantanée, alors qu'en réalité l'ensemble des deux champs ES et EM (voir chapitre XII) se propage à la vitesse c de la lumière.

Maxwell et Hertz ont donné les équations générales donnant les champs à distance.

En voici les résultats :

A grande distance les deux champs EM et ES, qui sont inséparables et qui vibrent dans deux plans perpendiculaires, sont donnés par :

$$E = E_0 \sin \omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

et

$$H = H_0 \sin \omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

où r est la distance et où :

$$\left.\begin{aligned} E_0 &= \frac{lI_0\omega \sin\alpha}{r} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{lI_0 \sin\alpha}{r} \\ H_0 &= \frac{lI_0\omega \sin\alpha}{r} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{lI_0 \sin\alpha}{r} \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}9)$$

Ainsi, ces deux champs, qui sont donc égaux, sont de la forme $K/\lambda r$: et l'on voit que *plus λ est petite (à I_0 constant) et plus ces champs seront intenses.*

Une antenne rayonne ainsi de l'énergie, et si I_0 est le courant à la base de l'antenne (au ventre), on appellera *Résistance de rayonnement* R_r la quantité définie par la formule :

$$\text{Puissance rayonnée} = R_r I_0^2.$$

Par un calcul long et compliqué, le physicien anglais POYNTING a calculé la valeur de R_r :

$$R_r = 800\frac{h_e^2}{\lambda^2}\,\Omega,$$

formule dans laquelle h_e est la *hauteur effective* de l'antenne que nous allons maintenant définir et calculer.

— Mais auparavant examinons le cas de l'antenne reliée au sol (fig. 10-5). Le champ à distance est le même que si l'image de l'antenne dans le sol rayonnait aussi (en supposant un sol parfaitement conducteur) donc il faut doubler h_e ; mais, comme d'autre part, elle ne rayonne que sur la moitié de sa hauteur, R_r sera la moitié. On obtient ainsi :

$$R_r = \frac{800}{2}\frac{4h_e^2}{\lambda^2}$$

ou :

$$\boxed{R_r = 1\,600\frac{h_e^2}{\lambda^2}\,\Omega}. \qquad (10\text{-}10)$$

On remarque que plus λ est petite et plus R_r est élevée. De même, R_r augmente très vite avec h_e d'où *l'intérêt de diminuer λ et d'augmenter h_e.*

10-8. **Hauteur effective d'une antenne.** — Le rayonnement dans le plan horizontal est caractérisé par une grandeur fondamentale, c'est *la hauteur effective h_e* d'une antenne et qui est la hauteur du doublet équivalent.

Mais on peut préciser davantage (fig. 10-12).

Définition : on appelle hauteur effective h_e d'une antenne quelconque la hauteur à laquelle il faudrait concentrer en un point toute la capacité C_0 de l'antenne, et où le courant I_0 serait constant dans le fil, le rayonnement à distance étant le même.

Calculons cette hauteur effective.

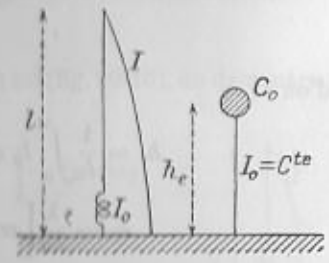


FIG. 10-12.

— *Premier cas : antenne verticale de longueur l* (fig. 10-13). — Quel que soit le mode de vibration de l'antenne, le champ créé par un élément dx dans une direction perpendiculaire est :

$$dE = dH = \frac{2\pi I_x}{\lambda r}\,dx,$$

d'où :

$$E = H = \int_0^l \frac{2\pi I_x\,dx}{\lambda r} = \frac{2\pi}{\lambda r}\int_0^l I_x\,dx.$$

Posons donc :

$$h_e I_0 = \int_0^l I_x\,dx,$$

ce qui veut dire (fig. 10-14) que h_e serait la hauteur d'un rectangle de largeur I_0

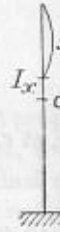


FIG. 10-13.

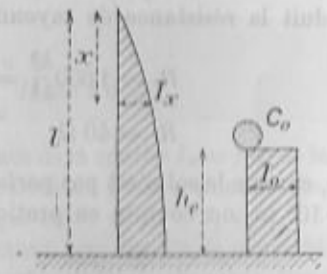


FIG. 10-14.

dont la surface serait égale à celle de la courbe sinusoïdale hachurée du courant I_x. On aura ainsi :

$$h_e = \frac{1}{I_0}\int_0^l I_x \cdot dx$$

On voit ainsi que, mathématiquement, h_e serait la hauteur moyenne de la courbe de I_x.

Or, sur la λ fondamentale, on a :

$$I_x = I_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda},$$

d'où :

$$h_e = \frac{1}{I_0}\int_0^l I_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda}\,dx = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^l \sin \frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\frac{2\pi\,dx}{\lambda}$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi}\left[\cos \frac{2\pi x}{\lambda}\right]_0^l$$

$$\boxed{h_e = \frac{\lambda}{2\pi}\left[1 - \cos \frac{2\pi l}{\lambda}\right]}. \qquad (10\text{-}11)$$

10-9. **Calcul de la hauteur effective d'une antenne.**

Premier cas : antenne verticale quart d'onde, $l = \lambda/4$.

On aura :

$$h_e = \frac{\lambda}{2\pi}\left(1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{\lambda}{2\pi}\left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{4l}{2\pi}$$

$$\boxed{h_e = \frac{2l}{\pi}} \qquad (10\text{-}12)$$

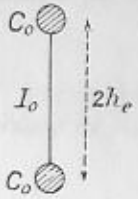


FIG. 10-15.

le doublet équivalent serait $2h_e$ (fig. 10-15).

On en déduit la résistance de rayonnement :

$$R_r = 1\,600\frac{h_e^2}{\lambda^2} = \frac{1\,600}{\lambda^2}\cdot\frac{\lambda^2}{4\pi^2},$$

$$R_r = 40\ \Omega.$$

En réalité, comme le sol n'est pas parfaitement conducteur, et c un peu différent de $3\cdot10^8$ m, on compte en pratique $R_r = 36\ \Omega$.

Deuxième cas : antenne unifilaire demi-onde $l = \lambda/2$ (fig. 10-4). — On a :

$$h_e = \frac{\lambda}{2\pi}\left[1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{2}\right] = \frac{\lambda}{2\pi}\left[1 - \cos \pi\right]$$

$$\boxed{h_e = \frac{\lambda}{\pi} = \frac{2l}{\pi}}. \qquad (10\text{-}13)$$

Si on a un fil vertical assez loin du sol, on aurait :

$$R_r = 1\,600\frac{h_e^2}{\lambda^2} = \frac{1\,600}{\lambda^2}\cdot\frac{\lambda^2}{\pi^2}$$

$$= 160\ \Omega.$$

Mais, si le bas de l'antenne est à une distance e du sol (fig. 10-16), on démontre que l'on a :

$$R_r = \frac{80\pi^2 h_e^2}{\lambda^2}\left[1 + \frac{3\sin 4\pi l/\lambda - (4\pi l/\lambda)\cos 4\pi l/\lambda}{(4\pi l/\lambda)^2}\right]. \qquad (10\text{-}14)$$

Mais, en pratique, si $e < 0{,}4\ \lambda$, il reste :

$$R = 80\ \Omega.$$

Pour les mêmes raisons que plus haut, on aurait en réalité $R = 72$ à $73\ \Omega$.

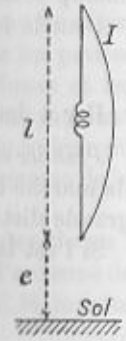


FIG. 10-16.

— En résumé, l'antenne demi-onde produit un champ double (ce qui est normal) de celui produit par une antenne quart d'onde, car pour la première on a $h_e = \lambda/\pi$ et pour la seconde $h_e = \lambda/2\pi$.

10-10. **Antenne de forme quelconque.** — Soit un élément de longueur dx où le courant est I_x. Cet élément et son symétrique dans le sol produisent un champ :

$$dH = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{I_x \sin\alpha}{r}\,dx,$$

d'où

$$h_e \cdot I_0 = \int_{-l}^{+l} I_x \cdot \sin\alpha\,dx$$

et

$$h_e = \frac{2}{I_0}\int_0^l I_x \sin\alpha\,dx. \qquad (10\text{-}15)$$

Ainsi, h_e est proportionnelle à la surface de la courbe $I_x = f(x)$ de la répartition du courant, et, si cette fonction est connue on pourra calculer l'intégrale.

On peut ainsi comparer les antennes entre elles, à I_0 égal.

On voit ici nettement qu'en augmentant, par des fils, la capacité au sommet de l'antenne, on augmente h_e, donc on augmente le champ à distance.

Remarque importante. — La valeur de la hauteur effective dépend de la répartition des courants et des tensions le long de l'antenne, elle n'est donc une caractéristique de l'antenne que pour une longueur d'onde donnée.

Les valeurs de h_e que nous avons données ont été calculées pour la longueur d'onde fondamentale, elles changeraient si l'antenne vibrait sur harmoniques.

10-11. Calcul plus détaillé du champ produit à grande distance. Formule pratique. — On a vu plus haut qu'un élément de longueur dx de l'antenne, où le courant est I_x, produisait à distance un champ :

$$dE = dH = \frac{2\pi I x}{\lambda r} \sin \alpha \, dx,$$

et si l'on connaît le mode de vibration de l'antenne, on aura, en intégrant, le champ total à la distance r.

Pour la fondamentale, on a :

$$I_x = I_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Il y a deux cas :

Premier cas : champ à grande distance dans le plan horizontal. — La différence de marche des ondes émises par tous les éléments dx est pratiquement nulle à grande distance et toutes ces ondes arrivent en phase.

Si l est la hauteur de l'antenne, on aura :

$$E = H = \frac{2\pi}{\lambda r} \int_0^l I_x \, dx = \frac{2\pi}{\lambda r} I_0 \int_0^l \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) dx,$$

or on a

$$\int_0^l \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \, dx = -\frac{\lambda}{2\pi}\left[\cos \frac{2\pi x}{\lambda}\right]_0^l = \frac{\lambda}{2\pi}\left[1 - \cos \frac{2\pi l}{\lambda}\right],$$

d'où

$$E = H = \frac{2\pi I_0}{\lambda r} \cdot \frac{\lambda}{2\pi}\left[1 - \cos \frac{2\pi l}{\lambda}\right] = \frac{I_0}{r}\left[1 - \cos \frac{2\pi l}{\lambda}\right]. \qquad (10\text{-}16)$$

— *Cas de l'antenne quart d'onde, $l = \lambda/4$.*

On a :

$$\cos \frac{2\pi l}{\lambda} = \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

d'où

$$E = H = \frac{I_0}{r}.$$

Mais, en réalité, il faut doubler cette valeur car le champ est le même que si l'antenne et son image rayonnaient, le doublet équivalent ayant une longueur double ; ce qui donne finalement :

$$E = H = \frac{2I_0}{r}.$$

On remarque, chose curieuse, que cette formule est la même que la formule de BIOT et SAVART en courant continu et qui donne l'intensité H du champ magnétique à la distance r d'un fil très long et parcouru par un courant I_0.

On a cherché à mettre la formule précédente sous une forme pratique, et le physicien américain AUSTIN a donné, après transformation des unités, la formule pratique suivante, où h_e est la hauteur effective de l'antenne d'émission :

$$\boxed{E = 120 \frac{\pi h_e I_0}{\lambda r}} \qquad \begin{array}{l} E \text{ en } \mu V/m \\ \lambda \text{ et } r \text{ en km} \\ h_e \text{ en m} \\ I_0 \text{ en A.} \end{array} \qquad (10\text{-}17)$$

Cette formule a d'ailleurs subi des modifications avec des exponentielles. Elle ne s'applique telle que qu'aux ondes longues parce que, pour les petites ondes, et surtout pour ondes courtes, les phénomènes ionosphériques et les réflexions de ces ondes sur les couches ionisées de la haute atmosphère faussent complètement les valeurs calculées. Cependant, *dans tous les cas*, la valeur du champ à distance est proportionnelle à h_e, à I_0 et il varie en raison inverse de la longueur d'onde et de la distance, du moins en principe.

On remarquera que λ est au dénominateur, ce qui explique bien des choses !

La valeur de E par mètre veut dire « par mètre de hauteur » de l'antenne de réception. Ainsi, si l'antenne de réception a 10 m de hauteur la F.E.M. induite dans l'antenne de réception sera dix fois plus grande.

Remarque. — Une antenne d'émission verticale donne un champ ES vertical, on dit qu'il est *polarisé*. Ce champ vertical n'induira de F.E.M. que dans une antenne verticale de réception (et non pas dans une antenne horizontale : les deux antennes doivent ainsi être parallèles entre elles.

Deuxième cas : champ à grande distance dans une direction oblique. — On a dans ce cas :

$$E = H = 2\frac{I_0}{r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \alpha\right)}{\sin \alpha}$$

ce qui donne le diagramme de la figure 10-17, vu en coupe ; dans l'espace on aurait un volume ressemblant à un tore, de diamètre central nul.

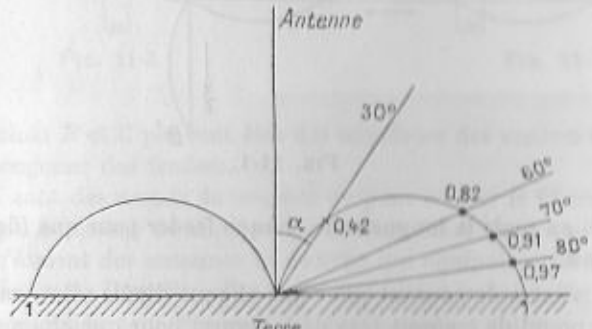


FIG. 10-17.

CHAPITRE XI

APPLICATIONS DES ONDES STATIONNAIRES AUX ANTENNES POUR ONDES COURTES ET EN U.H.F.

Émission et réception dirigées

11-1. **Principes de base.** — Dans la gamme des ondes de quelques mètres à 100 mètres environ on utilise des antennes spéciales. Comme la fréquence est très grande, il faut les placer dans un endroit *bien dégagé*, élevé si possible, et, en tous cas, loin de l'oscillateur ou du récepteur. La liaison se fait alors par une ligne où il y a des ondes stationnaires ou progressives afin de ne pas rayonner, soit au moyen de deux fils parallèles, soit par un câble coaxial.

Les antennes elles-mêmes vont utiliser les nœuds et les ventres de courant, dus aux ondes stationnaires, et nous verrons que tous ces dispositifs vont donner une solution élégante et très efficace à ce fameux problème : l'émission et la réception dirigées.

— *Le principe de base consiste à utiliser un dipôle en* $\lambda/2$, *placé perpendiculairement à l'extrémité d'une ligne où existent des ondes stationnaires*, ainsi que nous l'avons fait entrevoir à la fin de l'étude de la ligne sans pertes.

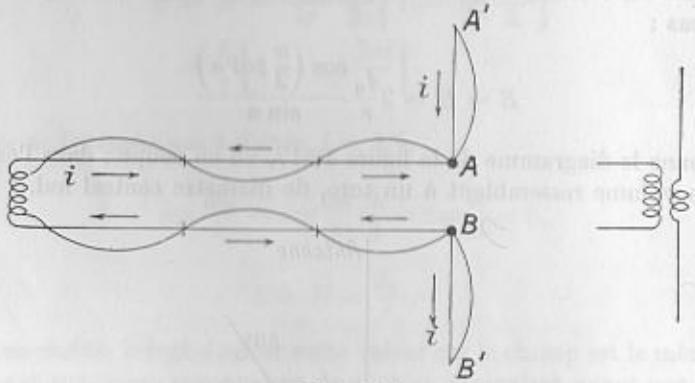


Fig. 11-1.

En effet, si on règle la longueur de chaque feeder pour que (fig. 11-1), en A et en B, on ait :

a) soit un ventre de courant pour que chaque dipôle vibre en $\lambda/4$,

b) soit un nœud de courant (cas de la figure) pour que chaque morceau du dipôle vibre en $\lambda/2$,

on s'aperçoit que le courant i, dans les deux tronçons perpendiculaires AA' et BB' du dipôle, *a le même sens dans ces deux tronçons* ; leurs rayonnements s'ajoutent donc en phase, et, si ces deux brins du dipôle sont verticaux, on

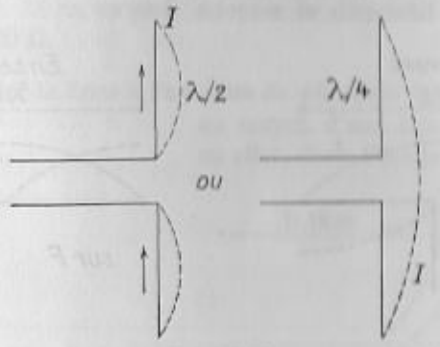


Fig. 11-2.

aura une propagation des deux champs ES et EM parallèlement à la surface du sol, et tout autour du dipôle.

Si ce dipôle est vertical on a l'antenne classique de Hertz (fig. 11-2), et s'il est horizontal on a l'antenne Lévy qui rayonne vers le ciel ; le rayonnement est alors transmis à grande distance après réflexions sur les couches conductrices de la haute atmosphère, ce qui atténue en partie le fading (fig. 11-3).

L'antenne Lévy est très facile à installer, avec des isolateurs en A, B et C,

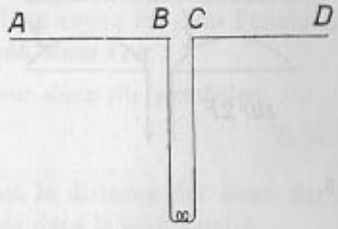


Fig. 11-3.

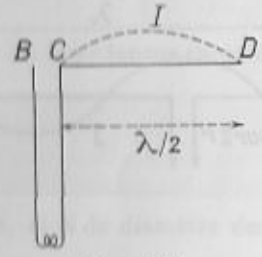


Fig. 11-4.

et D ; les points B et C peuvent être des nœuds ou des ventres de courant, en réglant la longueur des feeders.

Si B et C sont des nœuds de courant on peut couper le fil en B *ou* en C et ne laisser que la moitié du dipôle : on obtient ainsi l'antenne Zeppelin (ou Zepp), car c'étaient des antennes de ce type qui équipaient les anciens ballons dirigeables du comte Zeppelin ; elles sont très faciles à installer (fig. 11-4). Le brin de ce dipôle simplifié peut être vertical, horizontal ou oblique, et de longueur égale à $\lambda/2$.

— Toutes ces antennes peuvent vibrer sur harmoniques et l'alimentation peut se faire en courant ou en tension soit sur la fondamentale, soit sur harmoniques (fig. 11-5).

Mais le problème fondamental est *l'adaptation*.

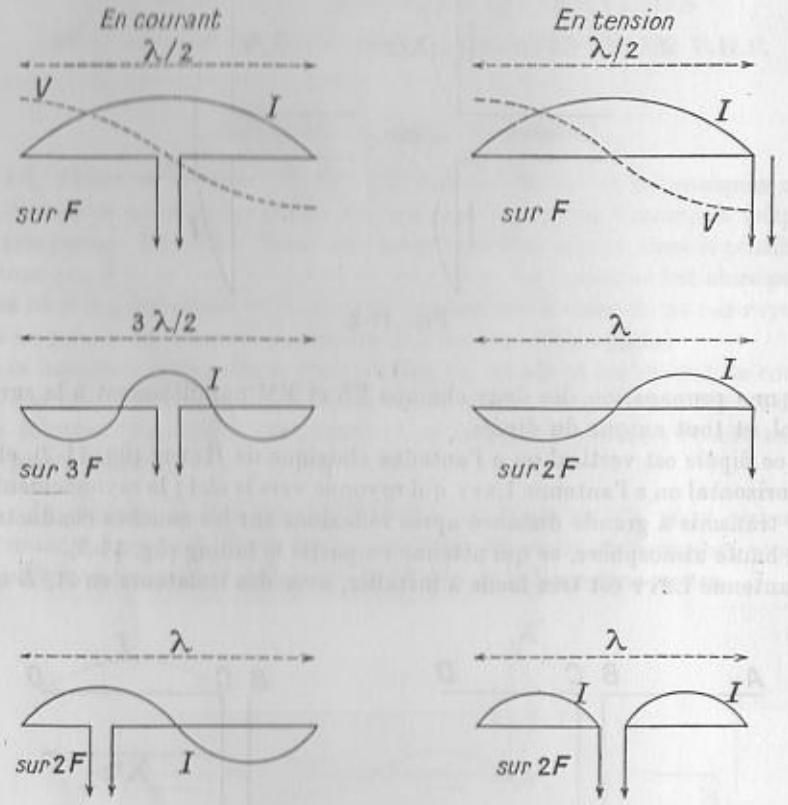


FIG. 11-5.

11-2. **Adaptation des feeders à l'antenne.** — Il faut en effet adapter l'impédance de la ligne, constituée par les deux feeders, à l'impédance de l'antenne.

On peut faire une adaptation électrostatique ou électromagnétique.

L'impédance d'entrée d'une antenne dépendant du point où on l'attaque, on devra choisir ce point pour avoir le maximum de tension ou de courant dans l'antenne.

Si on alimente les antennes en tension, on peut les faire fonctionner sur plusieurs bandes, sur harmoniques. On peut aussi les alimenter par feeders à ondes progressives, à un ventre de courant.

Dans l'antenne HERTZ-WINDOM (fig. 11-6) on attaque l'antenne au tiers de sa longueur, la longueur totale étant $l = \lambda/2$. Le feeder unique doit être perpendiculaire à l'antenne, *et doit fonctionner en ondes progressives* ; en P l'impédance caractéristique du feeder doit être égale à celle de l'antenne en ce point.

Sur $\lambda = 40$ m et 20 m, on peut adopter le dispositif de la figure 11-7 avec une ligne de 300 Ω.

— On peut adapter la ligne à l'antenne de plusieurs façons : par exemple, au moyen d'une ligne en λ/4. On a vu en effet, dans l'étude des lignes, que, si

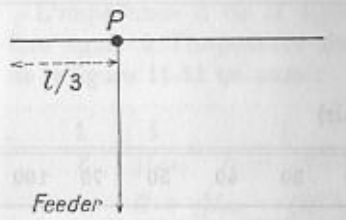


FIG. 11-6.

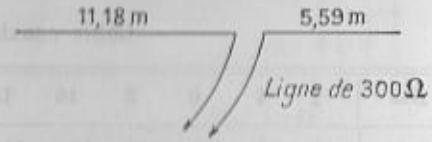


FIG. 11-7.

Z_c est l'impédance caractéristique de la ligne en λ/4, Z_r celle du récepteur (ici ohmique) et Z_s celle de la source, on doit avoir :

$$Z_c = \sqrt{Z_s Z_r}.$$

Connaissant Z_r et Z_s (qui est celle de la ligne d'alimentation) on en déduit Z_c, ce qui donne les dimensions de cette ligne en λ/4.

Ainsi, si Z_s est une ligne de 600 Ω, $Z_r = 70$ Ω, on aura $Z_c \approx 200$ Ω formée, par exemple, de deux tubes de 12 mm de diamètre, espacés d'axe en axe de 33 mm.

— Nous avons vu, dans l'étude des lignes, que les impédances caractéristiques sont, dans l'air :

a) *pour deux fils parallèles*,

$$Z_c = 276 \lg \frac{2D}{d},$$

où D est la distance des deux fils d'axe en axe, et d le diamètre des fils, exprimés dans la même unité.

b) *pour un câble coaxial*,

$$Z_c = 138 \lg \frac{D}{d},$$

où D est le diamètre intérieur du tube extérieur et d le diamètre du fil intérieur.

Si on a un isolant dans ce câble, dont la constante diélectrique est ε, on obtient :

$$Z = 138 \lg \frac{D}{d\sqrt{\varepsilon}}.$$

Pour le polystyrène, $\varepsilon = 2$ à 3.

— Pour éviter des calculs nous donnons deux tableaux :

Deux fils parallèles dans l'air

D/d	2	4	10	20	30	50	100	200	300	500	1 000
$Z(\Omega)$	165	250	360	445	490	560	635	720	770	830	920

Pour la ligne de 600 Ω on aurait $D/d = 75$.

Câble coaxial (à air)

D/d	2	4	6	8	10	15	20	30	40	50	70	100
$Z(\Omega)$	42	83	108	127	138	163	180	204	223	235	253	276

— On peut aussi faire une adaptation en DELTA (fig. 11-8) avec :

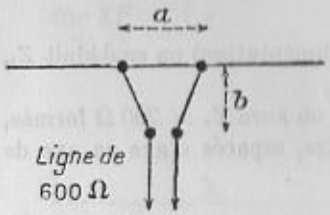


Fig. 11-8.

$$a = \frac{3600}{F\ (\text{Mc/s})}\ \text{cm} \quad (\text{si } f \leqslant 28\ \text{Mc/s})$$

ou

$$a = \frac{3444}{F\ (\text{Mc/s})}\ \text{cm} \quad (\text{si } f > 28\ \text{Mc/s})$$

et

$$b = \frac{4500}{F\ (\text{Mc/s})}\ \text{cm} \quad \text{dans les deux cas,}$$

ceci si l'impédance au centre de l'antenne est de 72 ohms environ.

On peut aussi utiliser des « stubs » ouverts ou fermés, en ajustant convenablement les longueurs x et y (fig. 11-9).

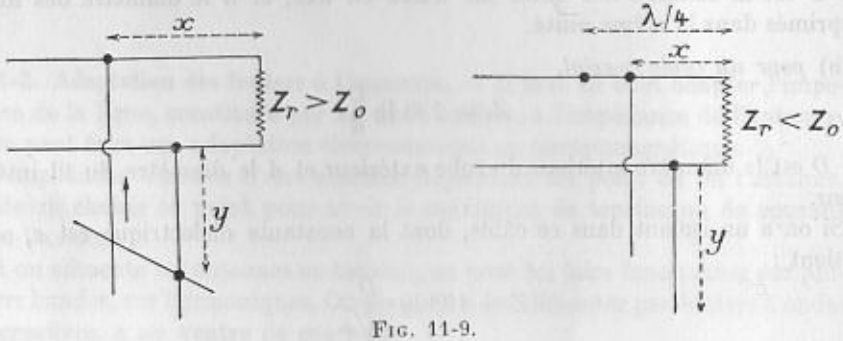


Fig. 11-9.

11-3. **Calcul d'une adaptation.** — On a vu dans l'étude des lignes que, si l'impédance terminale Z_r d'une ligne est une résistance égale à l'impédance caractéristique Z_c de la ligne, il n'y a pas d'ondes stationnaires.

Or, si une antenne est excitée en un ventre d'intensité, Z_r est ohmique. Mais comme en général $Z_c \neq R$, il faut une adaptation représentée par exemple par A dans la figure 11-10.

L'impédance Z de la ligne devant être égale à l'impédance du schéma de la figure 11-11 on aura :

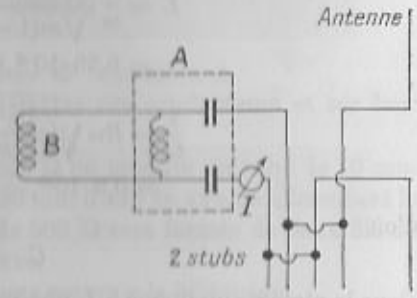


Fig. 11-10.

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{j L\omega} + \frac{1}{R - (j/C\omega)}$$

$$= \frac{R + j[L\omega - (1/C\omega)]}{jRL\omega + (L/C)},$$

d'où

$$Z = \frac{[(jRL\omega + (L/C)]\,[R - j(L\omega - 1/C\omega)]}{R^2 + [L\omega - (1/C\omega)]^2}.$$

Comme Z est ohmique pure, on aura en identifiant :

$$\left| \begin{array}{l} L\omega R^2 - \dfrac{L}{C}\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right) = 0 \\ \dfrac{Z}{R} = \dfrac{1}{m} = \dfrac{(L/C) + L\omega[L\omega - (1/C\omega)]}{R^2 + [L\omega - (1/C\omega)]^2}. \end{array} \right.$$

La première équation donne :

$$L = \frac{1 + C^2R^2\omega^2}{C\omega^2},$$

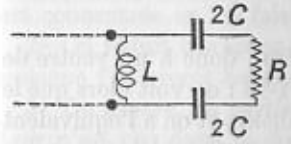


Fig. 11-11.

et en portant dans la deuxième, on obtient :

$$\frac{1}{C\omega} = R\sqrt{\frac{1-m}{m}}, \qquad (11\text{-}1)$$

$C\omega$ étant connu, la première équation donne

$$L\omega = \frac{R}{\sqrt{m(1-m)}}. \qquad (11\text{-}2)$$

Exemple. — *Soit* $R = 100\ \Omega$ (*impédance de l'antenne*), $Z_c = 490\ \Omega$, $\lambda = 42$ m ($\omega = 4{,}5 \cdot 10^7$). *Calculer* L *et* C.

— On a

$$\frac{R}{Z_e} = \frac{100}{490} = 0{,}204,$$

$$L = \frac{R}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{m(1-m)}} = \frac{100}{4{,}5 \cdot 10^7} \cdot 2{,}5$$

$$= 5{,}55 \cdot 10^{-6} \text{ H}.$$

$$\frac{1}{C} = R\omega \sqrt{\frac{1-m}{m}} = 100 \cdot 4{,}5 \cdot 10^7 \cdot 2$$

$$= 0{,}9 \cdot 10^{10},$$

d'où

$$C = 111 \text{ pF}.$$

Pour le réglage, on donne à L une valeur égale à celle qui a été calculée, et on fait varier C jusqu'à ce que l'ampèremètre indique un courant maximum. On vérifie alors si la ligne AB est le siège d'ondes progressives, en déplaçant soit un tube à néon tout le long des fils, soit un circuit oscillant accordé sur F : l'indication du thermique ou du tube à néon doit rester constante, sinon il faut changer L et recommencer.

11-4. **Dipôle replié ou « folded » dipôle.** — Prenons un dipôle attaqué en son milieu comme dans la figure 11-12, les points E et F étant un ventre de courant.

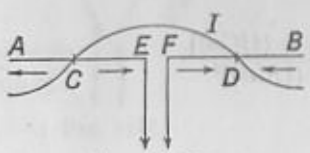


FIG. 11-12.

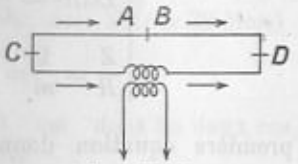


FIG. 11-13.

Les points A et B étant au même potentiel (zéro), donc à un ventre de courant, relions-les ensemble comme dans la figure 11-13 : on voit alors que le courant a *partout* le même sens dans les deux fils parallèles, et on a l'équivalent de deux dipôles en parallèle. C'est le « *folded* » dipôle, ou *dipôle replié*, ou *antenne « trombone »*. Sa résistance de rayonnement est élevée.

On peut alimenter ce « *folded* » dipôle par induction ou en direct.

— Précisons tout ceci par un exemple numérique.

Considérons une antenne simple en $\lambda/2$ alimentée avec une puissance de 70 watts. Comme l'impédance au centre de l'antenne en $\lambda/2$ est justement d'environ 70 Ω, le courant en ce point sera

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{70}{70}} = 1 \text{ A}.$$

Mais avec un dipôle replié, un courant de 1/2 A donnera le même champ à distance ; l'impédance au centre de l'antenne est donc :

$$Z = \frac{70}{(0{,}5)^2} = 280 \ \Omega.$$

On a ainsi multiplié par quatre la résistance de rayonnement.

On peut d'ailleurs, en jouant sur le diamètre des conducteurs et sur leur espacement, réaliser l'impédance que l'on veut.

Ainsi pour une impédance centrale de 500 Ω on prendra un tube de 10 mm et un fil de 3 mm de diamètre, espacés de 30 mm d'axe en axe, en alimentant le fil de 3 mm et non celui de 10. La ligne de 500 Ω sera formée de deux fils de 15/10 à 4,5 cm l'un de l'autre, d'axe en axe.

Cette antenne s'emploie couramment pour recevoir la télévision.

11-5. **Application des ondes stationnaires à l'émission et à la réception dirigées** (*en ondes courtes et métriques*). — Nous ne faisons pas ici un cours général de Radio, et il n'est pas question d'étudier ici les différents systèmes qui permettent de faire de l'émission et de la *réception dirigées*, en ondes courtes et en ondes métriques.

Mais, *comme l'utilisation des ondes stationnaires le long des lignes a permis de réaliser de merveilleux et... très astucieux systèmes d'émission et de réception dirigées*, très efficaces, nous allons les étudier comme applications des propriétés des lignes.

— Il y a cinq avantages principaux à faire de l'émission et de la réception dirigées :

1° On augmente beaucoup le rendement en énergie, puisque toute l'énergie est concentrée en un faisceau étroit, qui peut porter beaucoup plus loin.

2° On réduit beaucoup les brouillages et l'action des parasites au récepteur, puisque l'on reçoit beaucoup plus d'énergie.

3° On assure, en partie, le secret des communications, puisque, si le récepteur n'est pas dans la direction du faisceau émis, on ne reçoit rien.

4° On peut faire le radio-guidage des avions.

5° On peut faire du radar, c'est-à-dire détecter des objectifs lointains, en site et en azimut, comme des avions jusqu'à 300 et 400 km.

Avant d'aborder l'étude des antennes multiples modernes il faut commencer par... le commencement (puisque tout s'enchaîne) c'est-à-dire commencer par étudier le rayonnement de deux antennes verticales.

11-6. **Rayonnement de deux antennes verticales.** — Soient deux antennes verticales identiques A_1 et A_2 distantes de $\lambda/2$.

Si elles sont alimentées en phase par le même oscillateur, les champs

s'ajoutent dans une direction xx' perpendiculaire au plan des deux antennes (fig. 11-14).

En effet, un point tel que P ou P' reçoit deux champs partis en phase et qui parcourent la même distance, ces champs arrivent donc en phase et le champ est doublé dans la direction xx' perpendiculaire au plan des deux antennes. Tandis que des points tels que M ou M', situés dans le plan des antennes, reçoivent deux champs partis en phase, mais dont l'un parcourt $\lambda/2$ en plus, ce dernier arrivera avec *un retard* égal à une demi-période ; ces deux champs s'annuleront et il n'y aura aucun champ rayonné dans le plan des deux antennes.

Nous verrons au paragraphe suivant ce qui arrive dans des directions obliques.

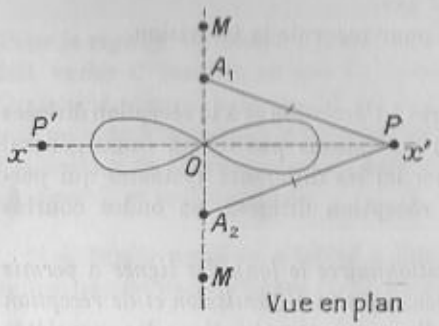


FIG. 11-14.

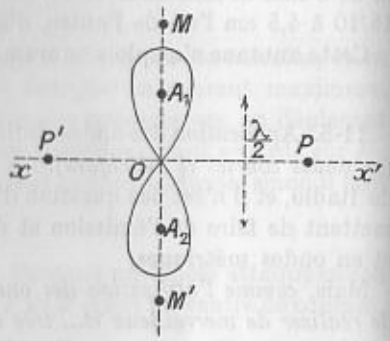


FIG. 11-15.

— Si maintenant les deux antennes sont alimentées en opposition de phase, les points P et P' ne recevront rien tandis que les points M et M', situés dans le plan des antennes, reçoivent deux champs, partis en opposition de phase, mais comme l'un d'eux a parcouru une distance $\lambda/2$ en plus (correspondant à un retard $T/2$ dans le temps), ces deux champs arrivent en phase en M et M' et s'ajoutent (fig. 11-15).

Malgré tout, la directivité n'est pas très accentuée.

Entrons dans quelques détails mathématiques indispensables, car ce dispositif (inventé autrefois par le grand savant français BLONDEL) est à la base de plusieurs systèmes perfectionnés.

11-7. Théorie mathématique du rayonnement de deux antennes verticales. — Il y a trois cas :

Premier cas : les deux antennes A_1 et A_2 sont alimentées en phase.

Calculons le champ total créé à distance dans une direction quelconque α (fig. 11-16).

Soit

$$H_1 = H \sin \omega t$$

le champ magnétique créé à distance par l'antenne A_1 dans une direction α.

Le champ produit *au même instant* par l'antenne A_2 aura subi une différence de marche AC :

$$A_2C = 2l \sin \alpha,$$

et ce champ, à distance, aura pour valeur, ainsi qu'on le sait :

$$H_2 = H \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{A_2C}{\lambda}\right)$$
$$= H \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2l \sin \alpha}{\lambda}\right).$$

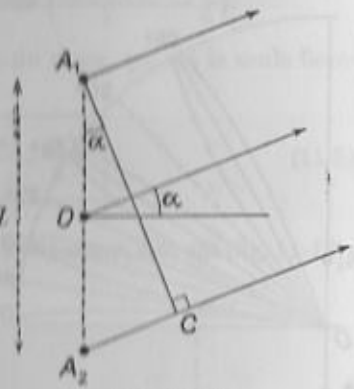


FIG. 11-16.

Le champ total sera donc la somme :

$$H_t = H_1 + H_2$$
$$= H\left[\sin 2\pi \frac{t}{T} + \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2l \sin \alpha}{\lambda}\right)\right].$$

On sait qu'une telle somme peut se transformer en produit et se mettre sous la forme :

$$H_t = H_0 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi\right) = f(t),$$

avec

$$H_0^2 = 2H^2\left(1 + \cos \frac{4\pi l \sin \alpha}{\lambda}\right)$$
$$= 4H^2 \cos^2\left(\frac{2\pi l \sin \alpha}{\lambda}\right)$$

d'où

$$\boxed{H_0 = 2H \cos\left(\frac{2\pi l \sin \alpha}{\lambda}\right)} = f(\alpha) \qquad (11\text{-}3)$$

et qui est l'amplitude maximale des deux champs reçus.

Discussion. — H_0 sera maximal dans les directions α telles que :

$$\left|\cos\left(\frac{2\pi l \sin \alpha}{\lambda}\right)\right| = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi l \sin \alpha}{\lambda} = K\pi$$

et

$$\sin \alpha = \frac{K\lambda}{2l}.$$

Le champ total serait nul si :

$$\sin \alpha = (2K + 1)\frac{\lambda}{4l}.$$

Il y a donc une succession de directions privilégiées où le champ total est nul ou maximal.

Ainsi, par exemple, si $2l/\lambda = 3{,}25$ ou $2l = 13\lambda/4$, en faisant $K = 0, 1, 2, 3$, etc. on constaterait (fig. 11-17) qu'il y a, dans le premier quadrant, quatre directions où H_0 est maximal ; il en sera donc de même dans les trois autres quadrants.

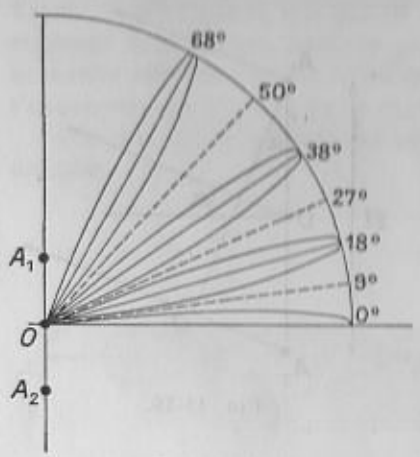


FIG. 11-17.

Conclusion : l'émission n'est pas du tout dirigée !

Il y a cependant un gros progrès par rapport au champ rayonné par une seule antenne.

Deuxième cas : les deux antennes A_1 et A_2 sont alimentées en opposition de phase.

Le courant dans l'antenne A_2 étant décalé de π on aura :

$$H_1 = H \sin 2\pi \frac{t}{T} = H \sin \omega t,$$

$$H_2 = H \sin \left(\omega t + \pi - \frac{2\pi l \sin \alpha}{\lambda}\right),$$

d'où

$$H_t = H_1 + H_2 = H_0 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi\right)$$

avec

$$H_0 = 2H \sin \left(\frac{2\pi l \sin \alpha}{\lambda}\right). \qquad (11\text{-}4)$$

Ce serait l'inverse du cas précédent, et il y aurait encore des directions privilégiées tout à fait analogues pour différentes directions α.

Troisième cas : les deux antennes A_1 et A_2 sont alimentées par deux courants décalés de $\pi/2$ (soit $T/4$).

Soit $H_1 = H \sin \omega t$ le champ créé par l'antenne A_1. Celui créé par l'antenne A_2 sera :

$$H_2 = H \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi l \sin \alpha}{\lambda}\right),$$

d'où :

$$H_t = H_1 + H_2 = H\left[\sin \omega t + \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi l \sin \alpha}{\lambda}\right)\right].$$

Transformons cette somme de sinus en produit :

$$H_t = 2H \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi l \sin \alpha}{\lambda}\right) \cos \left(\frac{2\pi l \sin \alpha}{\lambda} - \frac{\pi}{4}\right),$$

son amplitude maximum est donc le coefficient du sinus, qui est la seule fonction du temps t :

$$\boxed{H_0 = 2H \cos \left(\frac{2\pi l \sin \alpha}{\lambda} - \frac{\pi}{4}\right).} \qquad (11\text{-}5)$$

Discussion. — Supposons le cas particulier, *très important*, suivant (fig. 11-18) :

$$2l = \lambda/4.$$

On aura

$$H_0 = 2H \cos \left(\frac{\pi}{4} \sin \alpha - \frac{\pi}{4}\right),$$

pour $\alpha = 0$, $H_0 = 2H \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2H\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= H\sqrt{2} = OA$,

pour $\alpha = \pi$, $H_0 = H\sqrt{2} = OB$,

pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $H_0 = 2H \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= 2H = OC$,

pour $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, $H_0 = 2H \cos \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= 0$.

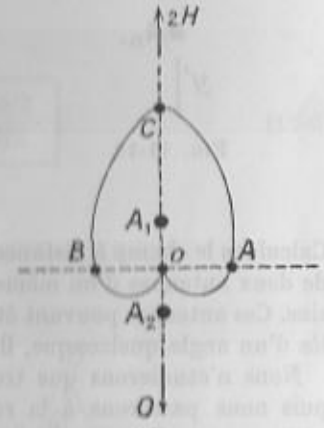


FIG. 11-18.

Ainsi, *on obtient ce résultat sensationnel que l'antenne A_2 joue le rôle de réflectrice : elle annule le champ dans sa direction, vers l'arrière, et elle double le champ vers l'avant.*

On aurait aussi des directions obliques privilégiées.

Ce dispositif est à la base d'un grand nombre de systèmes directifs perfectionnés que nous allons maintenant étudier.

RIDEAUX D'ANTENNES ET ALIGNEMENTS

11-8. **Étude mathématique du rayonnement d'antennes multiples.** — Puisque avec deux antennes on arrive à doubler le rayonnement dans une direction déterminée, on a eu l'idée d'augmenter le nombre d'antennes équidistantes, en formant un rideau d'antennes ou alignement.

Supposons n antennes verticales identiques et équidistantes A_1, A_2, A_3,..., A_n alimentées en phase (fig. 11-19) avec des courants égaux : le rayonnement dans la direction Ox ou Ox' sera n fois plus intense que pour une seule antenne.

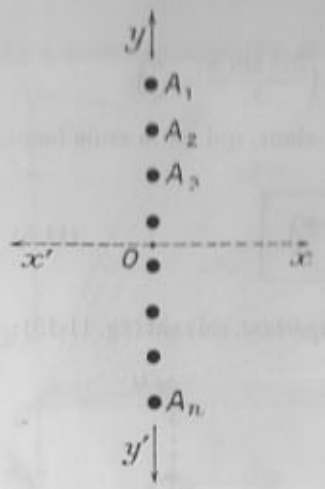


FIG. 11-19.

Dans le sens longitudinal Oy ou Oy', il y aura des décalages dus à l'espacement des antennes, mais si les courants dans chaque antenne sont déphasés entre eux d'une valeur convenable, on conçoit que les champs pourront s'ajouter dans un sens et s'annuler dans l'autre sens, les avances de phase étant compensées par la distance entre les antennes : on aura *un rayonnement unidirectionnel.*

Étudions ceci mathématiquement d'un peu plus près.

— Considérons les rideaux d'antennes (fig. 11-20) :

$$\begin{array}{llll} A_1 & A_2 & A_3, \ldots, & A_n, \\ B_1 & B_2 & B_3, \ldots, & B_n, \\ C_1 & C_2 & C_3, \ldots, & C_n, \text{ etc.} \end{array}$$

Calculons le champ à distance dans une direction α, en appelant $2l$ l'écartement de deux antennes d'un même rideau, et $2l'$ l'écartement de deux rideaux voisins. Ces antennes pouvant être alimentées par des courants en phase ou décalés d'un angle quelconque, il y aurait une infinité de cas à étudier.

Nous n'étudierons que trois cas importants, puis nous passerons à la réalisation pratique en montrant l'artifice sensationnel qui a été utilisé.

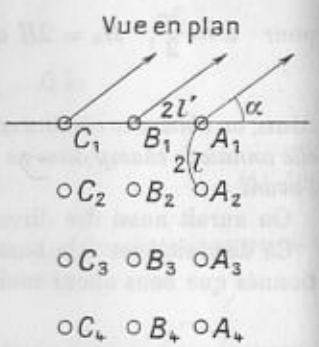


FIG. 11-20.

Premier cas. — *Champ créé par le rideau $A_1A_2\ldots A_n$, toutes ces antennes étant alimentées en phase.*

Soit ab le champ créé à distance par l'antenne A_1 (fig. 11-21), le champ créé par l'antenne A_2 sera décalé d'un angle θ qui, ainsi qu'on l'a vu plus haut, est :

$$\theta = 2\pi \cdot \frac{2l \sin \alpha}{\lambda} = \frac{4\pi l \sin \alpha}{\lambda}.$$

Il faut donc faire la somme vectorielle de tous ces champs décalés entre eux de cet angle θ, la résultante étant an, décalée de $n\theta$.

Les extrémités de ces vecteurs sont tous sur une circonférence de rayon R et on a

$$\widehat{aOb} = \theta,$$

donc l'angle

$$\widehat{aOn} = n\theta.$$

Le triangle aOb donne :

$$ab = 2R \sin \frac{\theta}{2},$$

donc

$$an = 2R \sin \frac{n\theta}{2},$$

d'où

$$\frac{an}{ab} = \frac{\sin n\theta/2}{\sin \theta/2}$$

et, en faisant $ab = H$:

$$\boxed{an = H_{\text{total}} = H \cdot \frac{\sin n\theta/2}{\sin \theta/2}.} \qquad (11\text{-}6)$$

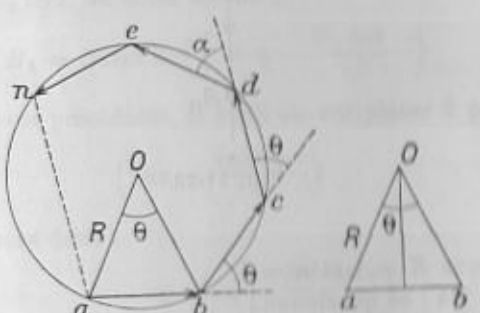


FIG. 11-21.

Discussion :

Pour $\theta = 0$, on a $0/0$, faisons alors le quotient des dérivées :

$$H_t = H_0 \frac{\frac{1}{2}n \cos n\theta/2}{\frac{1}{2}\cos \theta/2}$$

qui, pour $\theta = 0$, donne n : le champ est donc égal à nH dans un plan perpendiculaire au rideau, ce qui était évident *a priori.*

H_t serait nul si :

$$\sin n\frac{\theta}{2} = 0, \qquad \text{avec} \qquad \sin \frac{\theta}{2} \neq 0.$$

Pour cela il faut que :

$$n \cdot \frac{2\pi l \sin \alpha}{\lambda} = K\pi, \qquad \text{avec} \qquad \frac{2\pi l \sin \alpha}{\lambda} \neq K'\pi,$$

où K et K' sont des nombres entiers.

Cherchons à rendre ce champ nul pour $\alpha = 90°$ et $\alpha = 270°$. On aura :

$$n\frac{2l}{\lambda} = K \qquad \text{et} \qquad \frac{2l}{\lambda} \neq K'.$$

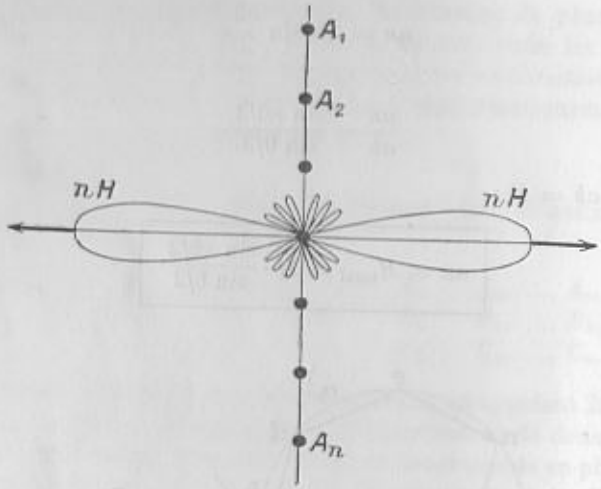


FIG. 11-22.

Par exemple, faisons $K = 1$ et $n = 4$.

On aura : $2l/\lambda = 1/4$; ce qui donne :

$$an = H_t = H \frac{\sin(\pi \sin \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} \sin \alpha\right)}.$$

Pour $\alpha = 0$, on a 0/0, ou bien en faisant le quotient des dérivées :

$$H_t = H \frac{\pi \cos \alpha \cdot \cos(\pi \sin \alpha)}{\frac{\pi}{4} \cos \alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \sin \alpha\right)} = 4H.$$

Pour $\alpha = 90°$, on aura :

$$H_t = H \frac{\sin \pi}{\sin \pi/4} = 0.$$

Et si l'on prend, par exemple, $2l = \lambda/2$, on aura dans une direction α quelconque :

$$H_t = H \frac{\sin n\theta/2}{\sin \theta/2} = H \frac{\sin n\left(\frac{2\pi l \sin \alpha}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi l \sin \alpha}{\lambda}\right)}$$

$$= H \frac{\sin n\left(\frac{\pi}{2} \sin \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \alpha\right)} \qquad (11\text{-}7)$$

dont le diagramme est donné par la figure 11-22 : on y voit deux lobes principaux assez pointus, accompagnés de petits lobes latéraux ; *et on verrait que ceux-ci sont d'autant plus petits qu'il y a davantage d'antennes !*

Deuxième cas : *champ produit par le rideau A_1, A_2,..., A_n, le courant dans chaque antenne étant décalé de $2\pi\varphi$ sur celui de l'antenne précédente.*

Le champ créé par l'antenne A_1 étant :

$$H_1 = H \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

celui de l'antenne A_2 sera, *au même instant* :

$$H_2 = H \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \varphi - \frac{2l \sin \alpha}{\lambda}\right).$$

Donc, dans les calculs précédents, il suffit de remplacer θ par

$$\left(2\pi\varphi - \frac{4\pi l \sin \alpha}{\lambda}\right).$$

Le champ total sera donc :

$$H_t = H \frac{\sin n\left(\pi\varphi - \frac{2\pi l \sin \alpha}{\lambda}\right)}{\sin\left(\pi\varphi - \frac{2\pi l \sin \alpha}{\lambda}\right)}. \qquad (11\text{-}8)$$

Cas particulier important : faisons $\varphi = 2l/\lambda$.

On aura

$$H_t = H \frac{\sin\left[n\frac{2\pi l}{\lambda}(1 - \sin \alpha)\right]}{\sin\left[\frac{2\pi l}{\lambda}(1 - \sin \alpha)\right]}$$

qui sera maximum pour $\alpha = 90°$.

Si de plus on a :

$$2l = \lambda/4,$$

il reste :

$$H_t = H \frac{\sin\left[n\frac{\pi}{4}(1-\sin\alpha)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{4}(1-\sin\alpha)\right]}.$$

Dans la direction y' du rideau ($\alpha = 270°$), il reste :

$$H_t = H \frac{\sin n\pi/2}{\sin \pi/2} = H \sin n\frac{\pi}{2},$$

il faut donc que n soit pair pour que $H_t = 0$.

Ainsi, dans ce cas remarquable, H_t est maximum pour $\alpha = 90°$, et nul dans la direction opposée : *on a un rayonnement unidirectionnel.*

On remarquera ici que les antennes sont distantes entre elles de $\lambda/4$, ce qui confirme bien ce que nous avions dit plus haut dans le cas de deux antennes : l'une d'elles est réflectrice et elle double le rayonnement dans le sens opposé.

Troisième cas : *cas général de n' rideaux identiques et parallèles, distants de 2l'.*

Nous n'en ferons pas l'étude mathématique détaillée, mais on verrait que pour $\varphi = 2l/\lambda$, $2l = \lambda/4$, $n = 2$, $2l' = \lambda/2$ et n' = un nombre impair, un tel système rayonne un champ maximum pour $\alpha = 90°$, et nul pour $\alpha = 270°$. On a un ensemble directionnel accentué, et l'on verrait que, plus il y a d'antennes dans chaque rideau, et plus les lobes latéraux diminuent.

11-9. **Application à un rideau réflecteur.** — Si on utilise deux alignements parallèles, espacés de $\lambda/4$, l'un d'eux (fig. 11-23) ayant toutes ses antennes alimentées en phase, et le second formé d'antennes identiques *entièrement isolées et non alimentées*, ce dernier rideau, étant excité par le champ issu du premier rideau, jouera le rôle de *réflecteur* : le champ sera doublé du côté du premier rideau et nul du côté du rideau réflecteur.

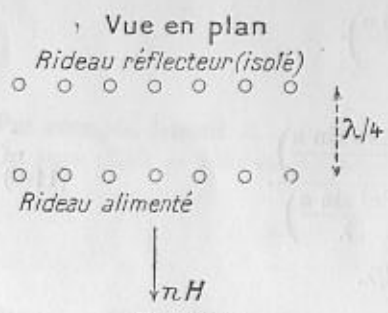


Fig. 11-23.

Le faisceau dirigé sera d'autant plus pointu qu'il y a davantage d'antennes.

Cette intéressante propriété est utilisée universellement dans un grand nombre de systèmes dont nous allons étudier les principaux.

Pistolkor a démontré que la puissance rayonnée par un rideau est

$$P = 30\pi^2 \frac{h_e^2}{2\lambda l} n^2 I_{eff.}^2 \qquad \left(\begin{matrix} h_e = \text{hauteur effective} \\ \text{d'un brin} \end{matrix}\right)$$
$$= R_r I_{eff.}^2$$

et pour un rideau double, à rayonnement unilatéral, on aurait le double.

La résistance de rayonnement d'un seul brin est donc :

$$R_r = 30\pi^2 \frac{h^2}{2\lambda l} n \qquad (11\text{-}9)$$

elle est ainsi proportionnelle au nombre de brins.

11-10. **Réalisation pratique des rideaux d'antennes.** — On a vu plus haut ce que donne un alignement d'antennes alimentées en phase, mais ceci est théorique car *la réalisation pratique en est impossible !*

Fig. 11-24.

En effet, l'oscillateur est installé loin des antennes, placées dans un endroit dégagé, et ces antennes distantes de $\lambda/2$ forment un ensemble de grande longueur. Or, il faut alimenter en phase toutes ces antennes au moyen de lignes de longueurs différentes qui vont introduire des déphasages variables, c'est pourquoi *la réalisation pratique est absolument impossible.*

Nous allons voir comment la difficulté a été magnifiquement tournée grâce à une des plus belles... astuces de toute la Radio.

Le Pr Mesny, ancien ingénieur hydrographe de la Marine et ex-Directeur du Laboratoire National de Radio-électricité, a eu l'idée d'utiliser les ondes stationnaires au moyen d'une antenne en « grecque ». Le mot « grecque » est un terme employé dans l'art de la reliure, et désigne un mode de couture du fil sur le dos d'un cahier, ou d'un livre (fig. 11-24).

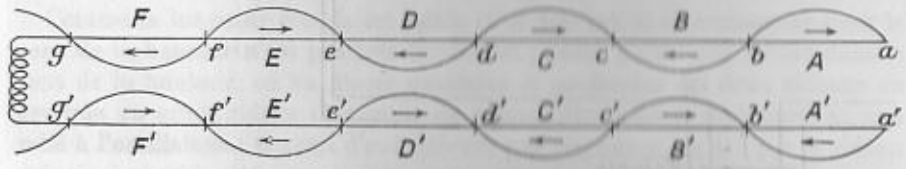


Fig. 11-25.

Prenons donc deux fils métalliques parallèles (fig. 11-25), où il y a des ondes stationnaires, et indiquons en $ABCDEFGHIJ\ldots$ l'emplacement des ventres de courants, distants de $\lambda/2$, en marquant dans chaque tronçon le sens du courant à un instant quelconque. On sait qu'un tel ensemble ne rayonne pas de champs magnétique ni électrique, parce que le champ rayonné par chacun des tronçons de ligne s'annule par suite du champ rayonné par le tronçon voisin où, au même instant, le courant a le sens inverse.

il reste :

$$H_t = H \frac{\sin\left[n\frac{\pi}{4}(1-\sin\alpha)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{4}(1-\sin\alpha)\right]}.$$

Dans la direction y' du rideau ($\alpha = 270°$), il reste :

$$H_t = H \frac{\sin n\pi/2}{\sin \pi/2} = H \sin n\frac{\pi}{2},$$

il faut donc que n soit pair pour que $H_t = 0$.

Ainsi, dans ce cas remarquable, H_t est maximum pour $\alpha = 90°$, et nul dans la direction opposée : *on a un rayonnement unidirectionnel.*

On remarquera ici que les antennes sont distantes entre elles de $\lambda/4$, ce qui confirme bien ce que nous avions dit plus haut dans le cas de deux antennes : l'une d'elles est réflectrice et elle double le rayonnement dans le sens opposé.

Troisième cas : *cas général de n' rideaux identiques et parallèles, distants de $2l'$.*

Nous n'en ferons pas l'étude mathématique détaillée, mais on verrait que pour $\varphi = 2l/\lambda$, $2l = \lambda/4$, $n = 2$, $2l' = \lambda/2$ et n' = un nombre impair, un tel système rayonne un champ maximum pour $\alpha = 90°$, et nul pour $\alpha = 270°$. On a un ensemble directionnel accentué, et l'on verrait que, plus il y a d'antennes dans chaque rideau, et plus les lobes latéraux diminuent.

11-9. **Application à un rideau réflecteur.** — Si on utilise deux alignements parallèles, espacés de $\lambda/4$, l'un d'eux (fig. 11-23) ayant toutes ses antennes alimentées en phase, et le second formé d'antennes identiques *entièrement isolées et non alimentées*, ce dernier rideau, étant excité par le champ issu du premier rideau, jouera le rôle de *réflecteur* : le champ sera doublé du côté du premier rideau et nul du côté du rideau réflecteur.

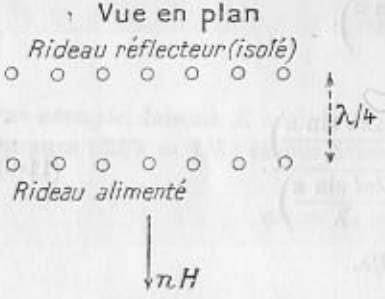


Fig. 11-23.

Le faisceau dirigé sera d'autant plus pointu qu'il y a davantage d'antennes.

Cette intéressante propriété est utilisée universellement dans un grand nombre de systèmes dont nous allons étudier les principaux.

Pistolkor a démontré que la puissance rayonnée par un rideau est

$$P = 30\pi^2 \frac{h_e^2}{2\lambda l} n^2 I_{\text{eff.}}^2 \qquad \left(h_e = \text{hauteur effective d'un brin}\right)$$
$$= R_r I_{\text{eff.}}^2$$

et pour un rideau double, à rayonnement unilatéral, on aurait le double.

La résistance de rayonnement d'un seul brin est donc :

$$R_r = 30\pi^2 \frac{h_e^2}{2\lambda l} n \qquad (11\text{-}9)$$

elle est ainsi proportionnelle au nombre de brins.

11-10. **Réalisation pratique des rideaux d'antennes.** — On a vu plus haut ce que donne un alignement d'antennes alimentées en phase, mais ceci est théorique car *la réalisation pratique en est impossible !*

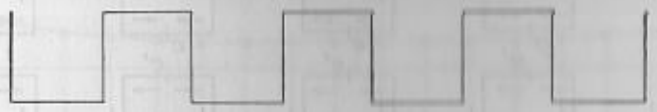


Fig. 11-24.

En effet, l'oscillateur est installé loin des antennes, placées dans un endroit dégagé, et ces antennes distantes de $\lambda/2$ forment un ensemble de grande longueur. Or, il faut alimenter en phase toutes ces antennes au moyen de lignes de longueurs différentes qui vont introduire des déphasages variables, c'est pourquoi *la réalisation pratique est absolument impossible.*

Nous allons voir comment la difficulté a été magnifiquement tournée grâce à une des plus belles... astuces de toute la Radio.

Le Pr Mesny, ancien ingénieur hydrographe de la Marine et ex-Directeur du Laboratoire National de Radio-électricité, a eu l'idée d'utiliser les ondes stationnaires au moyen d'une antenne en « grecque ». Le mot « grecque » est un terme employé dans l'art de la reliure, et désigne un mode de couture du fil sur le dos d'un cahier, ou d'un livre (fig. 11-24).

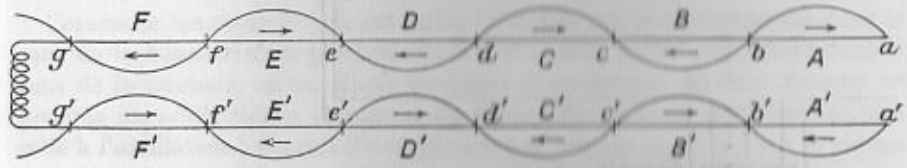


Fig. 11-25.

Prenons donc deux fils métalliques parallèles (fig. 11-25), où il y a des ondes stationnaires, et indiquons en $ABCDEFGHIJ\ldots$ l'emplacement des ventres de courants, distants de $\lambda/2$, en marquant dans chaque tronçon le sens du courant à un instant quelconque. On sait qu'un tel ensemble ne rayonne pas de champs magnétique ni électrique, parce que le champ rayonné par chacun des tronçons de ligne s'annule par suite du champ rayonné par le tronçon voisin où, au même instant, le courant a le sens inverse.

— Mais il suffit de replier chacun de ces deux fils en forme de grecque, *dans un plan vertical*, de façon que les ventres de courants soient au milieu de chaque brin vertical (ce qui n'empêche pas la production des ondes stationnaires) pour voir que :

1° Tous les brins horizontaux sont parcourus au même instant par des courants de sens inverses, donc leurs champs à distance s'annulent.

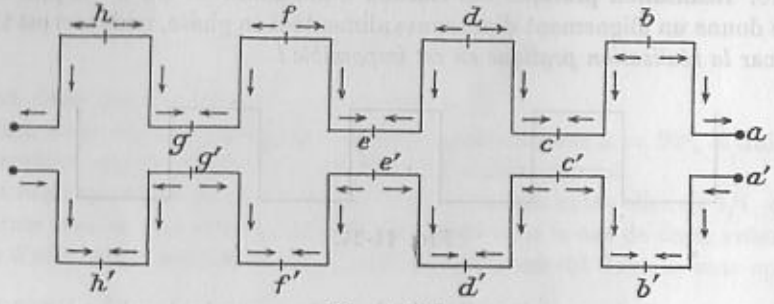


FIG. 11-26.

2° Tous les brins verticaux sont parcourus au même instant *par des courants qui ont tous le même sens : on a ainsi l'équivalent d'un rideau de n antennes verticales, toutes alimentées en phase*, parce que, si le courant change de sens dans l'un des brins, il change en même temps de sens dans tous les autres brins (fig. 11-26).

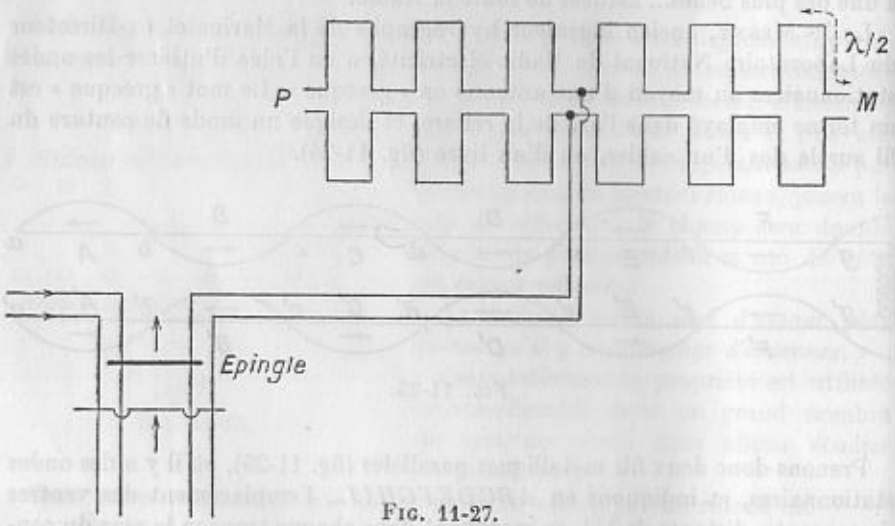


FIG. 11-27.

Ces deux antennes en grecque, formant en réalité antenne et contrepoids, sont alimentées en leur milieu par deux « feeders » dont on réglera la longueur (par un système dit *épingle à cheveu*, ou *stub*) pour qu'ils soient le siège d'ondes stationnaires, de façon à ne pas rayonner (fig. 11-27), ou même en ondes

progressives. Un tel ensemble, placé dans un plan vertical, rayonne perpendiculairement au plan de la figure, vers l'avant ou vers l'arrière.

— Tout cet ensemble devant résister aux vents et aux intempéries, est maintenu par des filins d'acier, bien tendus et tous bien isolés des brins des deux rideaux : il est suspendu à un câble horizontal, accroché au sommet de deux pylônes, placés de chaque côté en *M* et en *P*. On se rend compte du coût élevé de l'installation.

Les distances *ab*, *bc*, *cd*, etc., *comptées le long du fil*, sont toutes égales à λ/2.

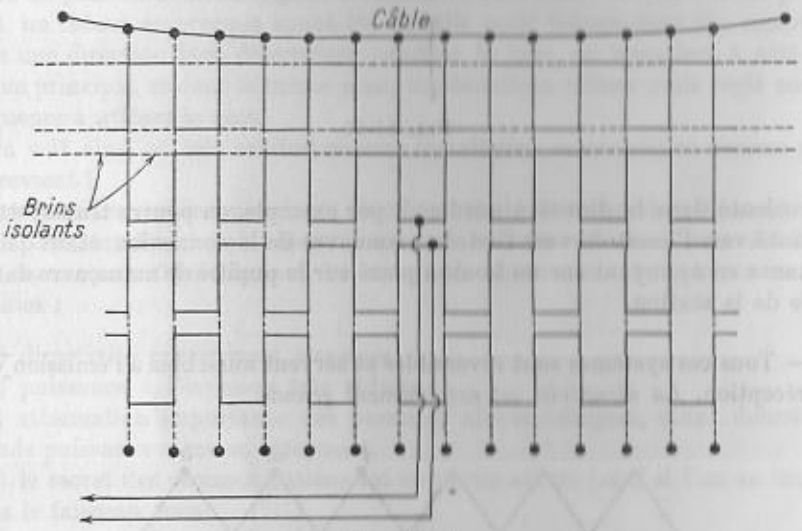


FIG. 11-28.

Comme la longueur d'onde est faible (λ < 100 m), le rayonnement dans le sens de la hauteur n'est pas très important ; aussi, pour l'augmenter dans le sens de la hauteur, on va placer *au-dessus et au-dessous* des deux rideaux en grecque un autre rideau identique, de mêmes dimensions, mais isolé et non relié à l'oscillateur : chacun d'eux vibrera par résonance, excité par le rideau principal placé à côté, et se mettra à rayonner à son tour (fig. 11-28).

11-11. Perfectionnement important. — Si l'on dispose, à une distance λ/4 vers l'arrière, et toujours dans le plan vertical, un ensemble identique de quatre rideaux superposés, de mêmes dimensions, *mais isolés et non reliés à l'oscillateur* H.F., ces quatre rideaux auxiliaires vont jouer le rôle de réflecteur, *en annulant le champ vers l'arrière, et en le doublant vers l'avant* (fig. 11-29).

On se rend ainsi compte de l'importance de l'installation et de son coût élevé.

L'effet directif est d'autant plus accentué qu'il y a davantage de brins verticaux dans ces huit rideaux.

Mais il y a mieux, et ceci est d'une ingéniosité admirable tout en étant d'une grande simplicité : si l'on s'arrange, par un contacteur posé sur le sol, pour pouvoir brancher les deux feeders d'alimentation soit sur le rideau E, soit sur le rideau R, on fera ainsi tourner le rayonnement de 180° ! Si le plan des rideaux

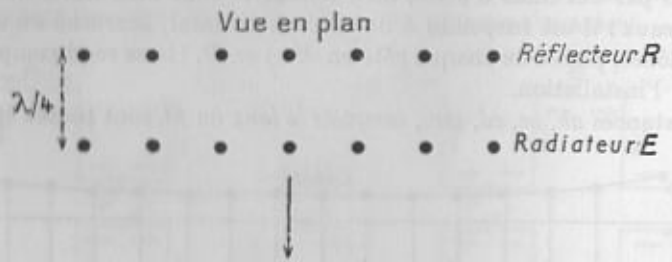


FIG. 11-29.

est orienté dans la direction nord-sud, par exemple, on pourra transmettre à volonté vers l'ouest *ou* vers l'est, la manœuvre de la connexion étant faite à distance en appuyant sur un bouton placé sur le pupitre de manœuvre dans la salle de la station.

— Tous ces systèmes sont réversibles et servent aussi bien à l'émission qu'à la réception. *La directivité est extrêmement grande.*

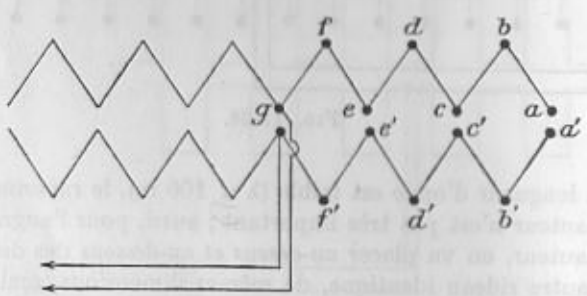


FIG. 11-30.

— Une variante de l'antenne en grecque consiste à replier le fil en grecque triangulaire au lieu d'une grecque rectangulaire (fig. 11-30) : il suffit que les sommets a, b, c, d, etc., et a', b', c', d', etc. soient des nœuds de courant. La résistance en H.F. à longueur de fil égale, est plus petite.

11-12. Inconvénients et avantages des antennes en grecque. — Les inconvénients sont graves :

a) difficulté matérielle de l'installation,

b) coût très élevé,

c) impossibilité de faire tourner la direction du rayonnement,

d) impossibilité absolue de changer la fréquence d'émission.

Or, ce dernier est extrêmement grave puisque l'on a constaté depuis longtemps que pour communiquer avec tel ou tel pays *il faut une fréquence bien déterminée*, et ce n'est pas la même le jour ou la nuit. Ce n'est pas non plus la même pour transmettre vers l'est ou vers l'ouest à une heure quelconque, ni la même pour transmettre vers le nord ou vers le sud !

Actuellement on connaît très bien la fréquence à employer, à telle ou telle heure du jour ou de la nuit, pour transmettre vers tel ou tel pays. C'est pourquoi, un rideau en grecque ayant été installé pour transmettre (ou recevoir) dans une direction bien déterminée pendant le jour, on installera à côté du rideau principal, et dans le même plan, un deuxième rideau mais réglé sur la fréquence à utiliser la nuit.

On voit ainsi où cela conduit comme installation matérielle et comme prix de revient !

Ces deux derniers inconvénients n'ont pas rebuté les techniciens de nombreux pays pour installer de tels rideaux, *munis de rideaux réflecteurs pour l'onde de nuit comme pour l'onde de jour*, les avantages obtenus étant vraiment remarquables :

a) directivité *extrêmement accentuée*,

b) puissance à l'émission très réduite,

c) atténuation importante des parasites atmosphériques, étant donnée la grande puissance reçue au récepteur.

d) le secret des communications est en partie assuré (sauf si l'on se trouve dans le faisceau émis).

11-13. Réseau directeur d'ondes. — C'est un alignement d'antennes verticales toutes identiques : la première A_1 est seule alimentée par l'oscillateur, les autres,

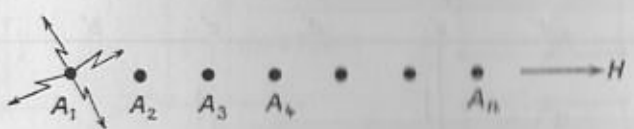


FIG. 11-31.

placées dans le champ de la première, vibrent par induction et rayonnent à leur tour (fig. 11-31).

On comprend que, en réglant convenablement l'écartement des antennes entre elles, la question de phase soit remplie et que le rayonnement soit maximum dans un seul sens. Si A_1 est alimentée, si la hauteur des autres antennes est un peu inférieure à $\lambda/2$ (leurs impédances sont capacitives), et si l'écarte-

ment de ces antennes est un peu plus grand que $3\lambda/8$, le rayonnement est nul vers la gauche de la figure 11-31 et maximum dans le sens opposé ; le diagramme de l'énergie rayonnée serait celui de la figure 11-32.

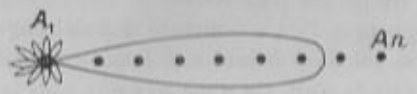


Fig. 11-32.

11-14. **Alignement de plusieurs dipôles.** — On peut encore, et c'est ce que l'on fait en ondes métriques, et dans les antennes dirigées pour Radar, se servir d'une ligne avec ondes stationnaires et brancher une série de dipôles connectés ainsi que nous allons l'indiquer.

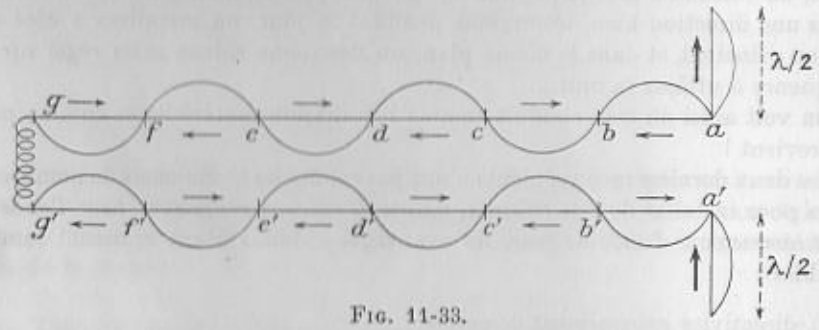


Fig. 11-33.

Dans la figure 11-33 on voit que, en c, en e, en g, etc., on a, au point de vue du sens des courants, la même disposition qu'en a : on pourra donc placer en chacun de ces points un fil perpendiculaire à la ligne et long de $\lambda/2$, il vibrera

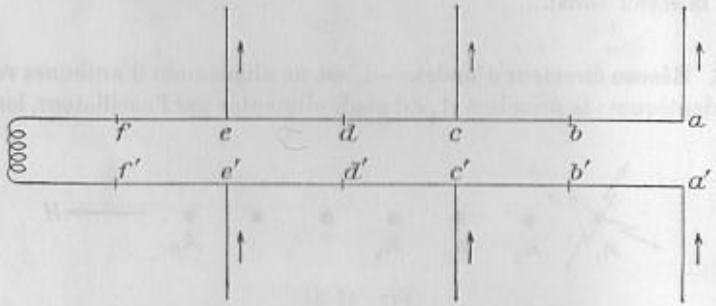


Fig. 11-34.

à son tour comme le brin placé en a. De même, en c', e', g', etc., on a des courants ayant la même disposition qu'en a' : on y placera donc un fil perpendiculaire à la ligne et long de $\lambda/2$ (fig. 11-34).

De plus, en b, d, f, etc., on a pour les courants la même orientation qu'en a', c', e', etc., on pourra donc y placer un fil identique, *mais orienté en sens inverse*, pour que son action se conjugue et s'ajoute à celle des fils placés en a', c', e', etc.

Enfin, en b', d', f', etc., on a pour les courants la même orientation qu'en a, c, e, etc., on y placera aussi un fil dirigé en sens inverse, pour que son action se conjugue et s'ajoute à celle des fils placés en a, c, e etc.

On remarque alors que *tous les brins perpendiculaires à la ligne sont parcourus au même instant par des courants ayant tous le même sens.*

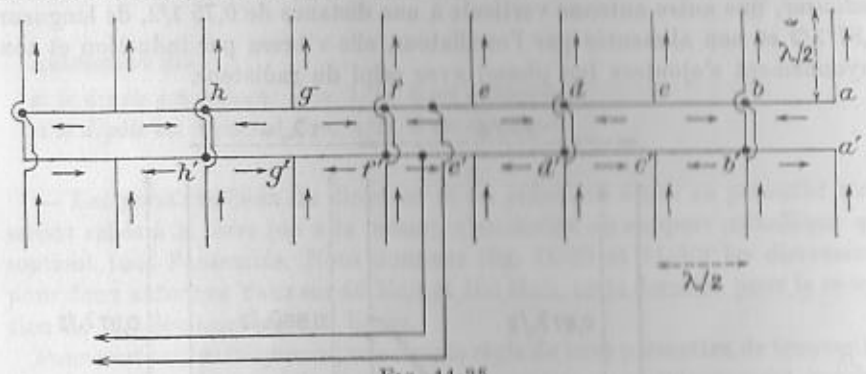


Fig. 11-35.

On obtient ainsi l'équivalent d'un rideau d'antennes verticales alimentées toutes en phase, et qu'on appelle, par analogie, *antenne en arête de poisson* (fig. 11-35). On l'alimente en son milieu par deux feeders, par raison de symétrie.

Mais, en réalité, comme toutes ces antennes sont couplées, et s'influencent mutuellement, chaque brin vertical doit avoir une longueur égale à 0,975 $\lambda/2$.

Comme il est évidemment obligatoire que tous les brins verticaux aient exactement la même longueur, comptée à partir de la ligne, il est préférable de croiser plutôt les fils de la ligne d'alimentation, comme l'indique la figure 11-36.

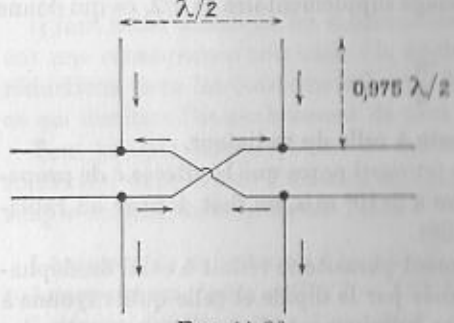


Fig. 11-36.

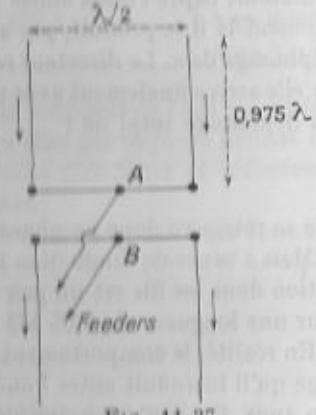


Fig. 11-37.

On peut encore, dans une variante utilisée dans une antenne simple, faire le montage de la figure 11-37, les feeders aboutissant, en A et B, perpendiculairement au plan de la figure.

11-15. **Antennes avec directeurs et réflecteurs. Antennes Yagi.** — Une antenne réflectrice doit être placée en arrière de l'antenne principale, avec une longueur de 0,975 $\lambda/2$, pour des questions de déphasage et à cause de l'induction mutuelle entre elles (fig. 11-38).

Mais, si l'on *place en avant* de l'antenne principale vibrant en $\lambda/2$ et appelée *radiateur*, une autre antenne verticale à une distance de 0,75 $\lambda/2$, de longueur 0,87 $\lambda/2$ et non alimentée par l'oscillateur, elle vibrera par induction et son rayonnement s'ajoutera (en phase) avec celui du radiateur.

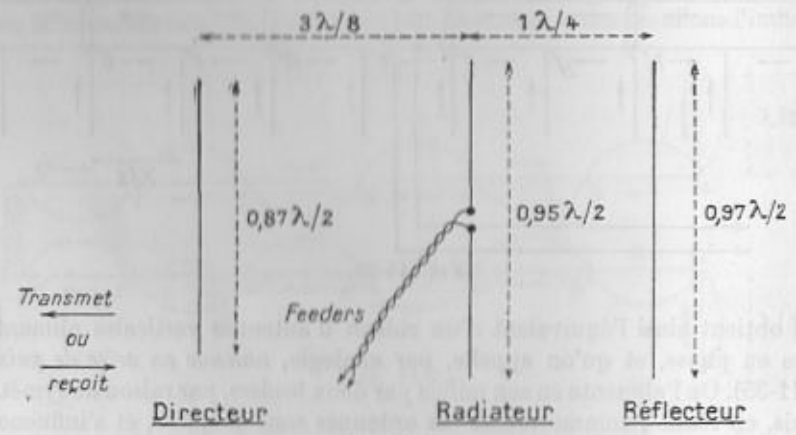


FIG. 11-38.

En effet, cette antenne appelée *le directeur*, théoriquement distant de $\lambda/4$ du radiateur, capte l'onde émise par ce dernier après un parcours de $\lambda/4$; à ce moment-là il se produit, par suite de la F.E.M. induite dans ce directeur, un déphasage de π. Le directeur rayonne à son tour et l'onde retourne au radiateur où elle arrive finalement avec un déphasage supplémentaire de $\pi/2$, ce qui donne un déphasage total de :

$$\frac{\pi}{2} + \pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi,$$

elle se retrouve donc en phase et s'ajoute à celle du radiateur.

Mais à cause de l'induction mutuelle (et aussi parce que la vitesse c de propagation dans les fils est un peu inférieure à $3 \cdot 10^8$ m/s, on doit donner au radiateur une longueur de 0,95 $\lambda/2$ (fig. 11-38).

En réalité, le comportement de l'élément parasite se réduit à celui du déphasage qu'il introduit entre l'onde rayonnée par le dipôle et celle qu'il rayonne à son tour. Ce déphasage ne dépend pas uniquement de la distance entre les éléments, mais il se trouve modifié par un léger allongement ou raccourcissement du dipôle auxiliaire afin que celui-ci garde sa fonction de réflecteur, ou bien qu'il devienne au besoin un « directeur ».

Tout cela est vrai à la réception comme à l'émission.

En précisant, on constaterait, à cause de ces déphasages, que :

1° Un dipôle accordé sur une fréquence un peu inférieure à celle du radiateur, et distant de $\lambda/4$, est *réflecteur*.

2° Un dipôle accordé sur une fréquence un peu supérieure à celle du radiateur est *directeur*.

Autrement dit :

si le dipôle est inductif ($l > \lambda/2$), *il est réflecteur*,
si le dipôle est capacitif ($l < \lambda/2$), *il est directeur*.

— Les points milieux du directeur et du réflecteur étant au potentiel zéro, seront reliés à la terre (ou à la masse), c'est-à-dire au support métallique qui soutient tout l'ensemble. Nous donnons (fig. 11-39 et 11-40) les dimensions pour deux antennes YAGI sur 46 Mc/s et 183 Mc/s, cette dernière pour la réception de la télévision sur 819 lignes.

Pour toute autre fréquence, une simple règle de trois permettra de trouver les dimensions correctes, sachant que ces dimensions sont inversement proportionnelles aux fréquences.

Le radiateur est en général un « folded » dipôle.

Cette figure est fondamentale : elle fait comprendre, en particulier, le fonctionnement des antennes de télévision, *ce qui n'est, pour ainsi dire, jamais expliqué.*

— Une formule pratique pour calculer la longueur d'un dipôle *simple* devant vibrer en $\lambda/2$ est la suivante :

$$l = \frac{143}{F} \quad \text{ou} \quad l = 0{,}475\ \lambda.$$

l en mètres
λ en mètres
F en Mc/s

Il faut noter aussi que les modifications dans la longueur de tous ces dipôles ont une conséquence très utile : le déphasage qu'elles provoquent permet des réductions dans les écartements entre les différents directeurs et réflecteurs, ce qui diminue l'encombrement de tout l'ensemble.

Tout compte fait, les bases du calcul sont données par les trois formules suivantes, dans le cas d'un seul réflecteur, d'un seul directeur et d'un dipôle simple comme dans la figure 11-38 :

Longueur du réflecteur : $l = 149/F$.
Longueur du dipôle actif : $l = 143/F$.
Longeur du directeur : $l = 138/F$ (F en Mc/s, l en mètres).

Le câble coaxial relié au dipôle actif étant, par exemple, du type 75 Ω, l'adaptation se fera en « Delta » pour l'émission ou la réception d'amateurs sur 14, 21 ou 28 Mc/s.

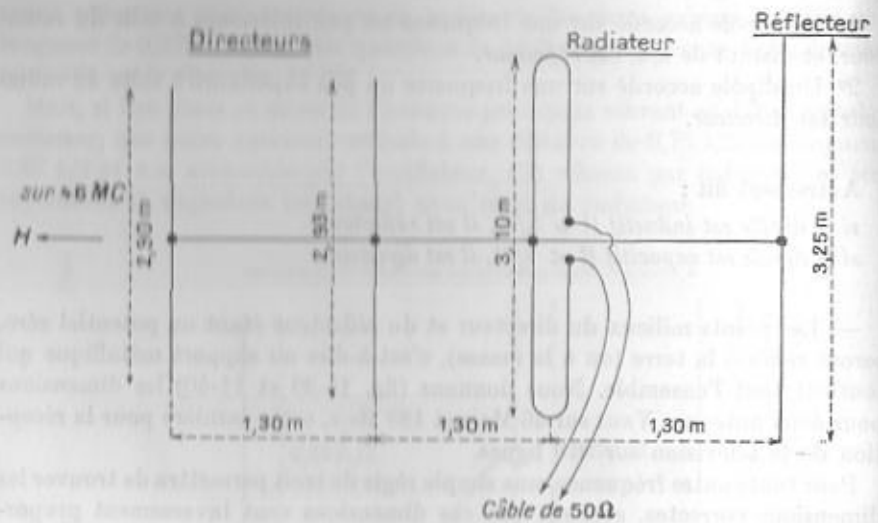


FIG. 11-39.

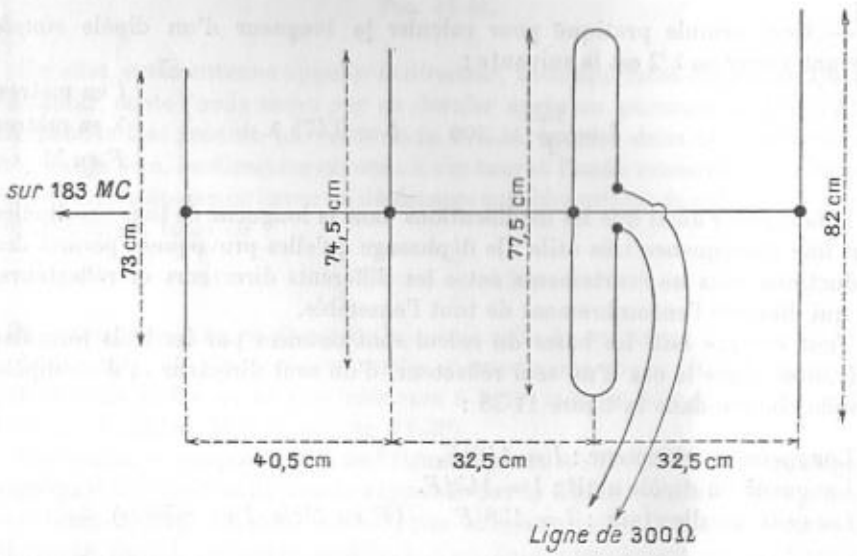


FIG. 11-40.

— Dans les antennes YAGI utilisées en Télévision il est recommandé, pour les raisons exposées plus haut, d'utiliser un « folded » dipôle (ou antenne « trombone »), en augmentant jusqu'à huit et dix le nombre des directeurs,

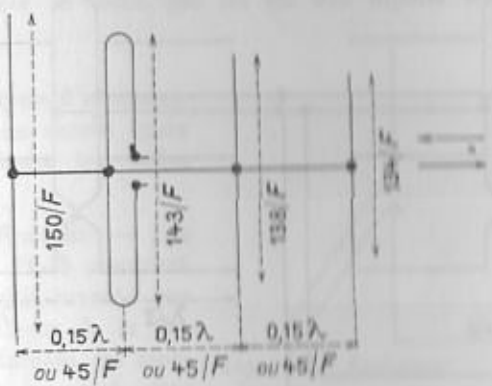


FIG. 11-41.

équidistants, mais de longueurs légèrement décroissantes ; le gain total est très augmenté et la directivité également.

Les figures 11-41 et 11-42 donnent deux exemples de réalisation pour une antenne YAGI de Télévision à 4 et à 6 éléments, les valeurs indiquées ayant

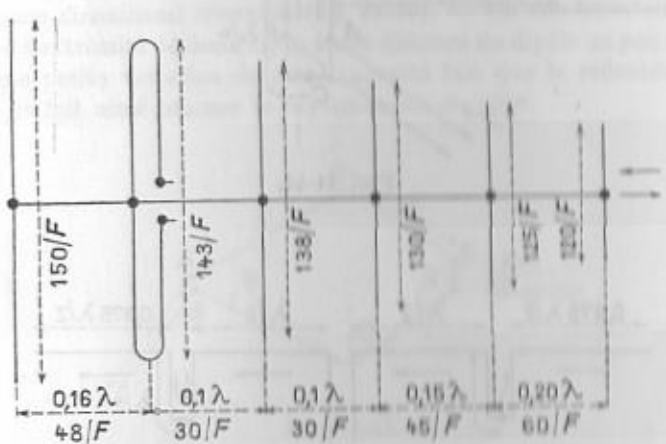


FIG. 11-42.

été obtenues expérimentalement et données par Ch. GUILBERT. Le « folded » dipôle est alimenté par un coaxial de 75 Ω, le trombone est du tube ou une tige métallique de 15 mm de diamètre environ, les deux tringles étant distantes d'environ 55 mm d'axe en axe.

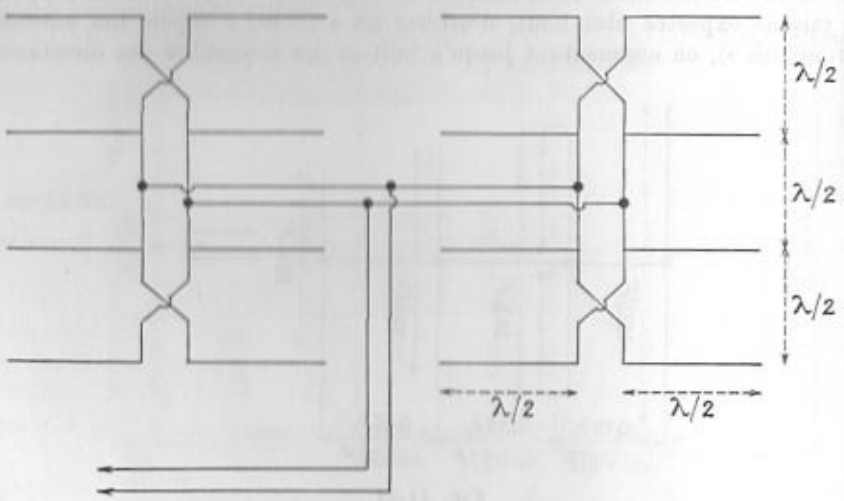


FIG. 11-43.

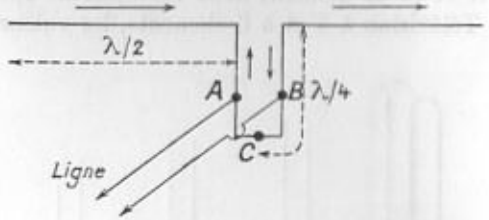


FIG. 11-44.

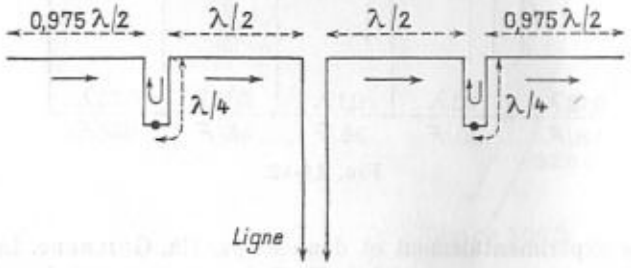


FIG. 11-45.

Sur les ondes métriques et décimétriques on utilise aussi un ensemble de dipôles comme sur la figure 11-43.

D'une façon générale, tous ces systèmes de rideaux d'antenne peuvent se placer de façon que les fils des dipôles soient verticaux *ou* horizontaux.

1-16. Autres types d'antennes. — Voici quelques autres types d'antennes utilisant les ondes stationnaires.

1° *Antenne Franklin.* — Les figures 11-44 et 11-45 montrent un autre dispositif inventé par FRANKLIN, ingénieur de la Société anglaise Marconi, les dipôles rayonnants peuvent être placés horizontalement ou verticalement.

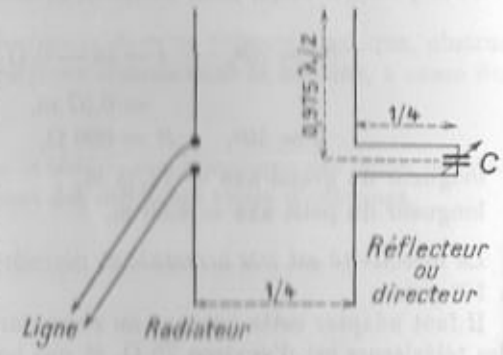


FIG. 11-46.

On adapte la ligne à l'antenne en la connectant à deux points A et B convenables. On voit que, dans ces types d'antennes, les tronçons repliés en $\lambda/4$ ne rayonnent pas ; on pourrait d'ailleurs remplacer chaque tronçon replié par une petite inductance bobinée, de valeur convenable et absorbant $\lambda/4$.

2° *Système directionnel réversible* (fig. 11-46). — *Un condensateur* variable est placé à l'extrémité de deux tiges, à une distance du dipôle un peu supérieure à $\lambda/4$: une petite variation de cette capacité fait que le réflecteur devient directeur et fait ainsi tourner le rayonnement de 180°.

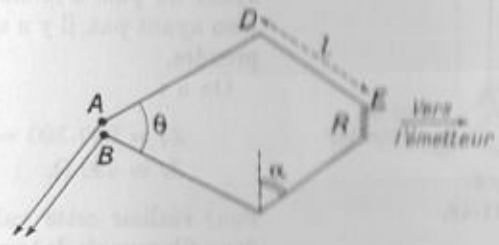


FIG. 11-47.

3° *Antenne losange.* — C'est une antenne très directive utilisée à la réception, ayant la forme d'un losange placé dans un plan horizontal. R est une résistance égale à l'impédance caractéristique de la ligne ADE, on aura donc des ondes progressives (fig. 11-47).

La longueur l de chacun des quatre côtés est un multiple quelconque de λ,

et le gain croît avec la longueur. Il est cependant recommandé que l soit un multiple impair de $\lambda/4$.

L'angle α varie de 60° à 80° en pratique, la hauteur au-dessus du sol étant, par exemple, de 5 à 15 mètres.

Pour $f = 193$ Mc/s, nous donnons ci-dessous un exemple de réalisation :

$$\alpha = 70°, \qquad l = (n - 0{,}1)\frac{\lambda}{4} = (17 - 0{,}1)\frac{\lambda}{4}$$

$$= 6{,}57 \text{ m},$$

$$\theta = 40°, \qquad R = 800\ \Omega,$$

longueur du grand axe = 12,34 m,

longueur du petit axe = 4,50 m.

La directivité est *très accentuée* et nécessite une orientation vers l'émetteur à 10° près.

Il faut adapter cette antenne au récepteur, et comme l'impédance d'entrée des téléviseurs est d'environ 75 Ω, et que cette antenne fait $Z_c = 800\ \Omega$, on l'adaptera par une ligne en $\lambda/4$, avec une valeur de Z_c égale à :

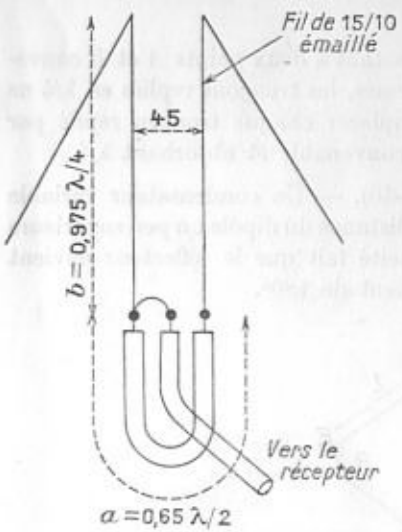


FIG. 11-48.

$$Z_c = \sqrt{Z_s Z_r} = \sqrt{800 \cdot 75} = 240\ \Omega.$$

On prendra deux fils parallèles, espacés de quatre fois leur diamètre, plus faciles à réaliser. On fera l'adaptation en deux temps :

1° On abaissera d'abord à 300 Ω, puis de 300 à 75 Ω, mais le coaxial ayant un pôle à la masse et l'antenne n'en ayant pas, il y a une précaution à prendre.

On a :

$$Z_c^2 = 800 \cdot 300 = 240\,000,$$

$$Z_c = 490\ \Omega.$$

Pour réaliser cette valeur on prendra deux fils espacés de trente fois leur diamètre, avec des barrettes isolantes de polystyrène : ainsi, si $d = 1{,}5$ mm, l'écartement des fils sera de 45 mm.

Pour abaisser ensuite de 300 à 75 Ω, on prendra du câble coaxial connecté comme sur la figure 11-48, relié d'une part à la ligne quart d'onde, d'autre part, au coaxial de liaison faisant 75 Ω.

Les longueurs sont :

$$a = 0{,}65\ \lambda/2 \qquad \text{et} \qquad b = 0{,}975\ \lambda/4,$$

et, pour $f = 193$ Mc/s, ceci donne :

$$a = 0{,}65\,\frac{150}{193} = 0{,}50 \text{ m},$$

$$b = 0{,}975\,\frac{75}{193} = 0{,}38 \text{ m}.$$

La résistance R de 800 Ω sera enfermée dans un tube en plastique, obstrué aux deux extrémités par du polystyrène dissous dans la benzine, à cause des intempéries.

— En résumé, on voit combien la théorie mathématique des lignes est utile pour comprendre le fonctionnement des différents types d'antennes.

CHAPITRE XII

LES ÉQUATIONS DE MAXWELL
QUELQUES APPLICATIONS

12-1. **Généralités.** — Il y a environ une centaine d'années que le grand savant anglais James Clerk MAXWELL a établi les six équations qui portent son nom, et l'on avait bien cru, à la suite de sa théorie électromagnétique de la lumière et de toutes les conséquences immenses qui en étaient découlées, que ces fameuses équations seraient reléguées dans le domaine du passé et n'auraient « donc » plus d'applications, ni d'intérêt.

Or, voilà que justement c'est tout le contraire qui arrive.

Avec l'avènement et l'extension inouïe des hyper-fréquences, avec les radars, les lignes en H.F., les guides d'onde, la propagation, l'étude des nouveaux isolants, etc., la théorie de MAXWELL a un regain d'actualité et les six équations de MAXWELL voient s'élargir leurs domaines d'utilisation et d'applications.

Or, la plupart du temps (sinon dans tous les cas) les six équations de MAXWELL sont entourées,... d'une nébulosité inquiétante, décourageante et repoussante..., soit pour les établir soit pour les appliquer !

Étant donné l'intérêt immense qu'elles présentent (indépendamment du fait qu'elles constituent une merveilleuse application mathématique des équations différentielles) nous avons pensé que leur place était toute désignée à la fin de ce Tome III.

— Quel est le niveau mathématique nécessaire ?

Il faut évidemment connaître les dérivées et les différentielles, un peu le calcul intégral, et surtout les équations différentielles du premier et du second ordre, à coefficients constants.

Ceux qui ne les connaissent pas en trouveront l'étude détaillée, *soigneusement expliquée, avec de nombreux exemples numériques où tous les détails des calculs sont donnés*, dans les Tomes II, III, IV et surtout le Tome V de notre *Cours élémentaire de Mathématiques générales* (Éditeur Dunod).

Dans ce qui suit nous utiliserons uniquement les équations différentielles, permettant ainsi de faire un exposé clair et compréhensible, *dénué de tout charabia et de tout langage hermétique.*

12-2. **Rappel et généralisation de quelques lois de l'électricité.**

Loi d'Ohm (fig. 12-1). — Soit un conducteur, parcouru par un courant i constant. Entre deux sections A et B où les potentiels sont V_A et V_B, distants d'une longueur l, on a :

$$V_A - V_B = Ri.$$

Or, il existe sur la surface et à l'intérieur de ce conducteur un champ électrique E, qui d'ailleurs est la cause du déplacement des charges électriques, et l'on sait que l'on a :

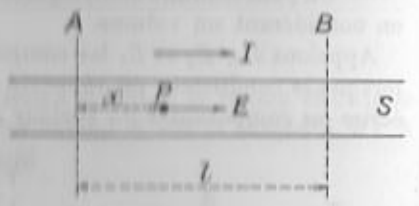


FIG. 12-1.

$$E = -\frac{dV}{dx} = \frac{V_A - V_B}{l},$$

d'où

$$V_A - V_B = El.$$

Introduisons la densité de courant J :

$$J = i/S,$$

où S est la section du fil.

Comme d'autre part :

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

on obtient :

$$El = JS\rho\frac{l}{S},$$

d'où

$$E = J\rho.$$

Si on appelle g la conductibilité : $g = 1/\rho$, on obtient :

$$E = J/g \quad \text{ou} \quad gE = J.$$

c'est-à-dire que la densité de courant J est proportionnelle au champ électrique en un point d'un conducteur.

— On peut généraliser en admettant que cette expression est vraie à l'intérieur d'un conducteur quelconque, ce qui est d'ailleurs exact.

— Si le courant i est variable, la loi d'OHM n'est plus vraie, et l'on doit écrire :

$$El = Ri + \frac{d\Phi}{dt}$$

ou

$$El - \frac{d\Phi}{dt} = El - Ri,$$

où Φ est le flux magnétique traversant le circuit.

C'est justement l'un des points de la théorie de MAXWELL de considérer cet effet d'induction comme une véritable force électrique.

— On peut traduire analytiquement la loi d'OHM en coordonnées cartésiennes en considérant un volume.

Appelons E_x, E_y et E_z les composantes du champ électrique E en un point, lorsque le conducteur est rapporté à trois axes de coordonnées. On peut alors écrire les composantes du vecteur J sur les trois axes :

$$\begin{cases} J_x = gE_x \\ J_y = gE_y \\ J_z = gE_z. \end{cases} \qquad (12\text{-}1)$$

12-3. **Loi de Joule dans un conducteur à trois dimensions.** — Considérons un petit volume élémentaire pris dans le conducteur et formé par un cylindre de base s, de hauteur h dirigée parallèlement à la densité de courant J.

L'énergie dégagée en chaleur pendant un temps dt est :

$$dW = Ri^2\,dt,$$

or

$$R = \frac{1}{g}\frac{l}{s} \qquad \text{et} \qquad i = Js,$$

on aura ainsi :

$$dW = \frac{1}{g}\frac{l}{s}\cdot J^2s^2\,dt = \frac{1}{g}J^2sl\,dt,$$

et dans l'unité de volume on aurait (puisque $sl = 1$) :

$$dW_1 = \frac{1}{g}J^2\,dt.$$

Mais, comme d'autre part $J = gE$, on aura pour un volume dv :

$$dW = gE^2(sl)\,dt = gE^2\,dv\,dt.$$

En particulier, à l'intérieur d'un petit parallélépipède dont les côtés dx, dy et dz sont parallèles aux axes, on obtient :

$$dW = gE^2\cdot dx\,dy\,dz\cdot dt$$

ou

$$dW = g(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

12-4. **Loi des F.E.M. d'induction ou loi de Maxwell-Faraday.** — On sait que *la* F.E.M. *totale induite dans un circuit fermé est égale à la dérivée par rapport au temps (changée de signe) du flux d'induction magnétique à travers ce circuit :*

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

où Φ est le flux du vecteur induction B à travers la surface S limitée par le circuit fermé, et qui a pour valeur

$$\Phi = \int_S B_n\cdot dS$$

où B_n est la composante normale à dS.

— Considérons en effet un conducteur fermé et soit E le champ électrique en chaque point M (fig. 12-2). Projetons ce champ E sur la tangente MT à la courbe formée par le conducteur, ce qui donne E_t.

Si l'on fait la somme de toutes les quantités telles que $E_t\,dl$ le long du conducteur, on aura la F.E.M. totale, en valeur absolue :

$$e = \int E_t\,dl.$$

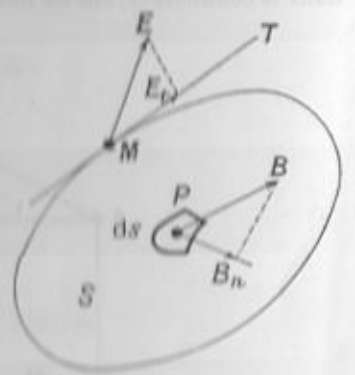


FIG. 12-2.

Considérons, d'autre part, une surface S s'appuyant sur le contour, et pour chaque point P de cette surface projetons le vecteur induction B sur la normale à la surface, soit B_n cette projection de B. Le flux d'induction traversant une petite surface dS est :

$$d\Phi = B_n\cdot dS$$

et le flux total traversant la surface sera la somme de tous les $d\Phi$, étendue à toute la surface S :

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S B_n\,dS.$$

La loi de la F.E.M. d'induction s'écrit alors, en valeur absolue :

$$|e| = \frac{d\Phi}{dt}$$

soit

$$\boxed{\int E_t\,dl = \frac{d}{dt}\int_S B_n\cdot dS}, \qquad (12\text{-}2)$$

Le sens convenable de parcours sur le contour sera donné par la règle d'AMPÈRE.

— *Généralisation.* — On admettra que, dans un conducteur quelconque, qui serait pris dans la masse d'un corps à trois dimensions, la loi précédente est encore vraie, même pour des courants variables.

C'est là une généralisation de la loi de l'induction.

Remarque. — La loi de l'induction ainsi énoncée ne fait pas apparaître la conductibilité g du milieu. On peut admettre que cette forme d'équation est encore valable quand g a une valeur très petite, ou même nulle.

Ainsi, l'équation sera encore valable même dans un isolant, et en particulier dans le vide.

C'est là une propriété fondamentale du champ électromagnétique.

12-5. **Traduction analytique en coordonnées cartésiennes. Premier groupe des équations de Maxwell.** — L'équation précédente est une équation locale dans le conducteur, elle ne fait pas apparaître les coordonnées.

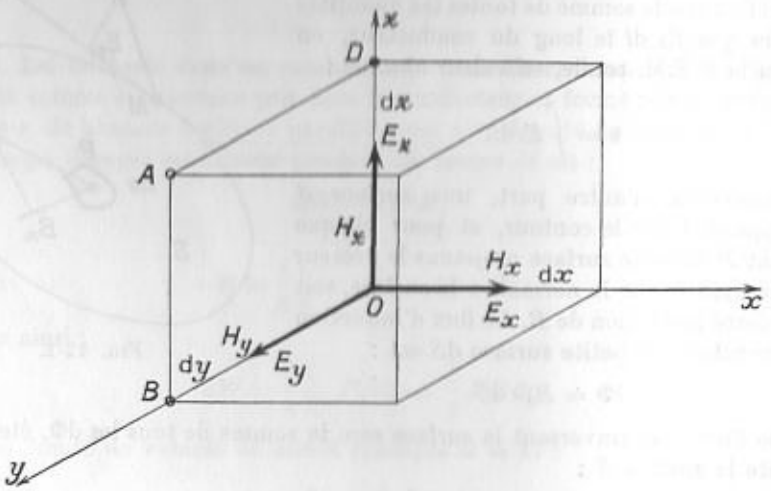


FIG. 12-3.

Faisons apparaître ces coordonnées en faisant une projection sur les trois axes de coordonnées (fig 12-3).

Pour cela appliquons la formule précédente à trois circuits rectangulaires, de côtés dx, dy et dz parallèles aux trois axes.

Considérons un tel circuit $ABODA$ situé dans un plan perpendiculaire à Ox, et ayant pour côtés dy et dz. On devra écrire :

$$\int_{ABODA} E_t \cdot dl = \frac{d\Phi}{dt}. \qquad (12\text{-}3)$$

Calculons donc chacun de ces deux membres, en appelant E_x, E_y et E_z les composantes du champ électrostatique E au point O.

Le long de OD :

$$\int E_t\,dl = E_z\,dz,$$

le long de AB le champ est devenu

$$E_z + \frac{\partial E_z}{\partial y} \cdot dy$$

puisque y a augmenté de dy, et l'on aura ainsi, le long de AB :

$$\int E_t\,dl = -\left(E_z + \frac{\partial E_z}{\partial y} \cdot dy\right) dz,$$

mais avec le signe — car on circule de A vers B.

Le long de BO, on aura :

$$\int E_t\,dl = -E_y\,dy.$$

Le long de DA le champ est devenu

$$E_y + \frac{\partial E_y}{\partial z} \cdot dz,$$

et l'on aura, avec le signe +, le long de DA :

$$\int E_t\,dl = \left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial z} \cdot dz\right) dy.$$

Additionnons toutes ces quantités :

$$\int E_t\,dl = E_z\,dz - \left(E_z + \frac{\partial E_z}{\partial y}\,dy\right) dz - E_y\,dy + \left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial z}\,dz\right) dy$$

$$= \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\right) dy\,dz.$$

— Calculons maintenant $d\Phi/dt$.

Appelons H_x, H_y et H_z les composantes du champ magnétique sur les trois axes et B l'induction. On aura :

$$\Phi = BS = \mu HS.$$

Considérons donc le flux qui traverse la surface $ABODA$, flux qui est parallèle à Ox :

$$\Phi_x = \mu H_x\,dS = \mu H_x\,dy\,dz$$

et

$$\frac{d\Phi_x}{dt} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}\,dy\,dz.$$

L'équation 12-3 nous donne alors :

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}\,dy\,dz = \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\right) dy\,dz.$$

Voyons maintenant le signe : il faut considérer l'observateur d'Ampère et la face gauche du circuit pour calculer l'augmentation du flux qui entre par cette face. Or, dans le cas présent, on a pris le flux entrant dans le sens de O vers x, donc par la face droite du circuit (soit la face arrière sur la figure). Il faut donc changer le signe du membre de gauche, et, après simplification par $dy\,dz$, il reste :

$$-\mu\frac{\partial H_x}{\partial t}=\frac{\partial E_y}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial y}.$$

En considérant maintenant les rectangles perpendiculaires à Oy et à Oz on obtiendrait (et il suffit de permuter les lettres) :

$$-\mu\frac{\partial H_y}{\partial t}=\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

et

$$-\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}=\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

— En résumé la loi généralisée de la F.E.M. d'induction, ou *loi de Maxwell-Faraday*, est ainsi traduite par le système suivant, qui constitue *le premier groupe des équations de Maxwell* :

$$\boxed{\begin{aligned}-\mu\frac{\partial H_x}{\partial t}&=\frac{\partial E_y}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial y}\\ -\mu\frac{\partial H_y}{\partial t}&=\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial z}\\ -\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}&=\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}.\end{aligned}}\qquad(12\text{-}4)$$

Elles donnent une relation entre les composantes du champ électrostatique et les composantes du champ électromagnétique.

Fig. 12-4.

— On admet enfin que ce groupe d'équations est encore vrai dans les isolants, et qu'il exprime une relation essentielle entre les vecteurs E et H.

12-6. **Expérience de Rowland.** — Le physicien américain Rowland a réalisé une expérience célèbre, lourde de conséquences, en cherchant à résoudre la question suivante : est-ce qu'une charge électrostatique dq en mouvement est de même nature et produit les mêmes phénomènes qu'une charge électrique $dq = i\,dt$ circulant dans un fil, et produite par une pile électrique ou une dynamo (fig. 12-4) ?

Autrement dit : est-ce que la charge q de la loi de Coulomb électrostatique (produite par exemple par frottement) :

$$F=K\frac{qq'}{r^2}$$

est de même nature que la charge $q = it$ qui circule dans un fil, et qui est celle de la loi de Faraday de l'électrolyse ?

L'expérience de Rowland répond par l'affirmative.

En effet, considérons un disque de verre dont l'axe peut être entraîné à grande vitesse par un moteur électrique. Le disque étant immobile, orientons son plan pour qu'il soit dans le plan du méridien magnétique, et plaçons à côté du disque une aiguille aimantée ; celle-ci va donc s'orienter parallèlement au disque. Frottons énergiquement une petite partie de la surface extérieure du disque de verre, afin de l'électriser, puis faisons tourner le disque à très grande vitesse : on voit aussitôt la boussole tourner et se placer perpendiculairement au plan du disque, comme si la charge statique q en mouvement donnait l'équivalent d'une spire parcourue par un courant fourni par une source chimique ou par une dynamo.

En résumé, une charge statique mise en mouvement produit un champ magnétique.

— Généralisons, et nous dirons, d'après Maxwell, qu'un champ électrique *variable* produit un champ magnétique, de même que, inversement d'après Faraday, un champ magnétique *variable* produit une F.E.M. induite, donc un champ électrique.

12-7. **Loi des ampères-tours ou loi d'Ampère.** — Rappelons la loi de Biot et Savart qui donne l'intensité H du champ magnétique produit à la distance a d'un fil rectiligne indéfini parcouru par un courant I : ce champ H est proportionnel à l'intensité I du courant et varie en raison inverse de la distance a :

$$H=K\frac{I}{a}.$$

On sait que dans le système CGS électromagnétique on a $K = 0,2$ et H est en œrsteds.

Si cette force F décrit autour du fil une circonférence de rayon a le travail accompli sera :

$$T=F\cdot 2\pi a=\frac{2I}{10a}\cdot 2\pi a$$
$$=\frac{4\pi I}{10}.\qquad(I\text{ en ampères})$$

On démontre que le travail a encore cette valeur, même si la trajectoire fermée, entourant le fil, est de forme quelconque.

De même, le travail accompli par le vecteur H le long d'une trajectoire fermée traversant le plan d'une spire parcourue par un courant I (ou circulation du vecteur H) est, dans le système CGS :

$$T = \frac{4\pi I}{10},$$

ou, dans le système MKS rationalisé, pour une spire :

$$T = I$$

exprimé en ampères-tours par mètres.

Cette loi peut s'étendre à un corps à trois dimensions.

12-8. **Généralisation.** — Soit H le champ magnétique en un point M et H_t sa projection sur la tangente en M au contour (fig. 12-5). Pour un déplacement dl sur le contour le travail de H_t sera :

$$dT = H_t\,dl,$$

et, le travail total le long du contour sera :

$$T = \int_C H_t\,dl.$$

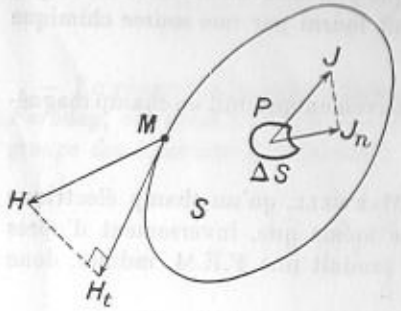


FIG. 12-5.

Appelons J la densité de courant en un point P quelconque de la surface S :

$$J = \frac{I}{S} \quad \text{ou mieux} \quad \frac{\Delta I}{\Delta S},$$

et soit J_n la projection de J sur la normale à ΔS. L'intensité dI du courant traversant une surface dS sera

$$dI = J_n\,dS,$$

et l'intensité totale traversant toute la surface S sera

$$I = \int_S dI = \int_S J_n\,dS.$$

La formule d'AMPÈRE $T = I$ devient alors :

$$\int_S H_t\,dl = \int_S J_n\,dS = \Phi,$$

Φ étant ici le flux de courant.

Cette loi d'AMPÈRE, qui est la loi du travail magnétique, ne fait pas intervenir les coordonnées.

12-9. **Traduction analytique en coordonnées cartésiennes. Deuxième groupe des équations de Maxwell.** — Faisons donc un calcul identique à celui qui a donné naissance au premier groupe d'équations de MAXWELL : mais au lieu des composantes E_x, E_y et E_z du champ ES nous aurons les composantes H_x, H_y et H_z du champ magnétique, et, au lieu de la dérivée par rapport au temps du flux magnétique, nous aurons le flux de courant ; enfin nous aurons affaire au vecteur densité de courant J à la place du vecteur induction B.

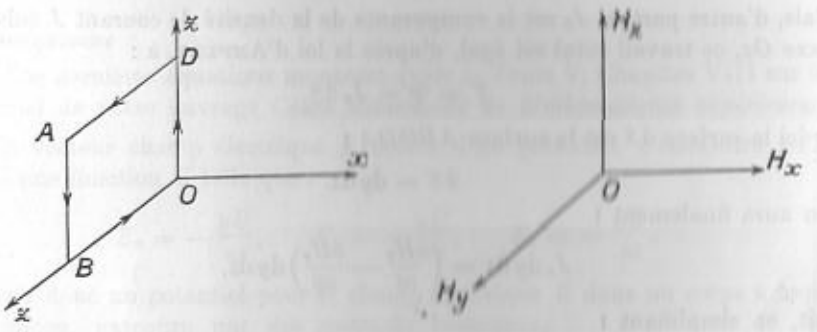


FIG. 12-6.

Partons de la figure 12-6, et calculons le travail $\int H\,dl$ le long du parcours $ABODA$.

Le long de BO, on a

$$dT_1 = -H_y\,dy.$$

Sur DA le champ H_y est devenu

$$H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z}\,dz,$$

donc le travail le long de DA est :

$$dT_2 = \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z}\,dz\right)dy.$$

Sur OD le travail est

$$dT_3 = H_z\,dz.$$

Sur AB le champ H_z est devenu

$$H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y}\,dy$$

et comme on se déplace de A vers B (fig. 12-6) le travail est négatif :

$$dT_4 = -\left(H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y}\,dy\right)dz.$$

Le travail total le long du parcours $ABODA$ sera donc la somme de tous ces travaux partiels :

$$T_{\text{total}} = dT_1 + dT_2 + dT_3 + dT_4$$
$$= -H_y\,dy + \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z}\,dz\right)dy + H_z\,dz - \left(H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y}\,dy\right)dz$$
$$= \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y}\right)dy\,dz.$$

Mais, d'autre part, si J_x est la composante de la densité de courant J suivant l'axe Ox, ce travail total est égal, d'après la loi d'AMPÈRE, à :

$$T = \Phi = J_x\,dS,$$

or ici la surface dS est la surface $ABODA$:

$$dS = dy\,dz.$$

On aura finalement :

$$J_x\,dy\,dz = \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y}\right)dy\,dz,$$

soit, en simplifiant :

$$J_x = \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y},$$

et en remplaçant J_x par sa valeur gE_x, d'après les équations (12-1), nous aurons :

$$gE_x = \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y}.$$

En refaisant le même calcul sur une surface dS dans le plan xOz, puis sur une surface dS dans le plan xOy, c'est-à-dire en permutant les lettres, nous obtenons finalement *le deuxième groupe des équations de* MAXWELL :

$$\boxed{\begin{aligned} gE_x &= \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ gE_y &= \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \\ gE_z &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x}. \end{aligned}} \qquad (12\text{-}5)$$

Ce sont les équations du champ E.M. dans les corps conducteurs.

12-10. **Cas particulier important.** — Si les courants sont constants et invariables on peut donner une autre forme à ces équations, puisque dans ce cas on a :

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0,$$

et les équations 12-4 deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \qquad (12\text{-}6)$$

Conséquences :

1° Ces dernières équations montrent (voir le Tome V, Chapitre VIII sur le potentiel de notre ouvrage *Cours élémentaire de Mathématiques supérieures*) que le vecteur champ électrique E dérive d'un potentiel, c'est-à-dire qu'il existe une fonction U telle que :

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

il existe donc un potentiel pour le champ électrique E dans un corps à trois dimensions, parcouru par des courants constants.

2° Dans les équations 12-5 les seconds membres ne sont pas nuls, puisque les premiers membres ne le sont pas ($g \neq 0$), il n'y a donc pas de potentiel pour le champ E.M.

Mais dans un isolant où $g = 0$ (ou si dans un conducteur on avait $E_x = E_y = E_z = 0$), il n'y aurait pas de champ électrique à l'intérieur du corps, et le champ E.M. dériverait d'un potentiel.

Remarque. — Les équations (12-4 *et* 12-5) *de* MAXWELL supposent que la distribution des champs varie avec le temps.

— *Ce sont ces équations que, par suite d'une intuition géniale,* MAXWELL *a généralisées en les étendant aux isolants, grâce à la considération des courants de déplacements, que nous allons maintenant introduire.*

12-11. **Courants de déplacement.** — Considérons (fig. 12-7) un condensateur de capacité C qui se charge. Pendant un temps dt il reçoit une charge dq :

$$dq = i\,dt.$$

FIG. 12-7.

D'après MAXWELL ce courant n'intéresse pas seulement le fil conducteur du circuit et les deux armatures, *auquel cas le circuit serait ouvert*, mais le circuit doit se fermer dans l'isolant par un... courant de nature spéciale, qu'il a appelé *courant de déplacement*.

Cherchons quelle serait la densité fictive J_D de ce courant (dans le système SI).

Si S est la surface d'une armature, on a :

$$i = J_D S,$$

d'où l'on tire

$$J_D = \frac{i}{S} = \frac{1}{S}\frac{dq}{dt}.$$

Si V est la D.D.P. entre les deux armatures et E l'intensité du champ E.S. dans l'isolant, on a :

$$E = \frac{V}{e},$$

où e est l'épaisseur de l'isolant.

On en déduit :
$$q = CV = CEe = \varepsilon\frac{S}{e}Ee = \varepsilon SE.$$

On aura ainsi :
$$\frac{dq}{dt} = \varepsilon S\frac{dE}{dt} = SJ_D,$$

d'où l'on tire

$$J_D = \varepsilon\frac{dE}{dt}.$$

Le nom de *courant de déplacement* vient de ce que l'électricité se déplace dans la molécule sans en sortir, tandis que dans le courant de conduction dans un métal il passe d'une molécule à une autre.

Par projection de J_D sur les trois axes on aurait :

$$J_{Dx} = \varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t}, \qquad J_{Dy} = \varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t}, \qquad J_{Dz} = \varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t}.$$

Dans cette hypothèse hardie de MAXWELL on admet que ces courants ont les mêmes propriétés que les courants de conduction (voir l'expérience de ROWLAND), et qu'il suffit d'ajouter ces courants de déplacement aux courants de conduction pour avoir l'effet total.

Dans ces conditions, *dans tout milieu à la fois isolant et conducteur*, le courant électrique total se compose de deux parties :

— un courant de conduction, de densité $J = gE$,

— un courant de déplacement, de densité $J_D = \varepsilon\, dE/dt$.

La densité effective et totale de courant est alors

$$J_t = gE + \varepsilon\frac{dE}{dt}$$

qui devra figurer dans les équations de MAXWELL.

Cette expression de J totale projetée sur les trois axes donne ainsi les trois composantes :

$$J_{tx} = gE_x + \varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$J_{ty} = gE_y + \varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$J_{tz} = gE_z + \varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t}.$$

Finalement le groupe des équations (12-5) devient :

$$\boxed{\begin{aligned} gE_x + \varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ gE_y + \varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \\ gE_z + \varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x}. \end{aligned}} \qquad (12\text{-}7)$$

On admet que les deux groupes de formules (12-4) et (12-7) sont entièrement générales pour tous les corps à trois dimensions.

On voit que, dans le cas de corps isolants, ces deux groupes d'équations (12-4) et (12-7) sont identiques comme forme, puisque g est nul. Au contraire, dans les conducteurs, et en régime permanent, il ne reste plus que les équations normales de l'électromagnétisme.

Les lois générales, déduites des formules (12-4) et (12-7), sont donc, grâce au génie de MAXWELL, une généralisation des lois du champ électromagnétique.

— Partant de cette généralisation, on peut en déduire des conséquences qui, étant vérifiées, confirment l'hypothèse si hardie de MAXWELL.

Remarque. — Si ε est nul, comme dans les conducteurs, le premier membre des équations (12-7) se réduit à gE, et on retombe sur les équations (12-5).

Si, au contraire, g est nul *comme dans les isolants*, il reste pour les équations (12-7) :

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ \varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \\ \varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x}. \end{aligned}} \qquad (12\text{-}8)$$

Résumé : les trois équations du groupe 12-4 sont la traduction analytique de la loi fondamentale de l'induction (ou loi de MAXWELL-FARADAY) :

La F.E.M. *totale le long d'un circuit fermé est égale à la dérivée par rapport au temps du flux d'induction à travers le circuit.*

Les trois équations du deuxième groupe (équations de MAXWELL-AMPÈRE) représentent à la fois la loi d'OHM (c'est-à-dire l'existence d'une chute de tension corrélative à un dégagement de chaleur), et la loi fondamentale de l'induction :

La force magnétomotrice totale le long d'un circuit fermé est égale à la dérivée par rapport au temps du flux d'induction à travers ce circuit.

On admirera la symétrie de ces deux lois et des deux groupes de formules.

— Dans toutes ces équations, E, H, μ et ε sont exprimés dans le système d'unités *SI* :

E en volts par mètre, H en ampères par mètre, ε en farads par mètre et μ en henrys par mètre, avec :

$$\varepsilon = \frac{1}{36\pi}10^{-9}\ \text{F/m} \qquad \text{et} \qquad \mu = 4\pi 10^{-7}\ \text{H/m}.$$

12-12. **Équations complémentaires.** — Le milieu étant supposé conducteur, il ne peut y subsister aucune densité cubique de charges électriques libres, puisque ces charges seraient aussitôt neutralisées par des charges égales et de signe contraire amenées par conduction.

— En effet, partons des équations (12-7).

Dérivons par rapport à x la première équation, par rapport à y la deuxième, et par rapport à z la troisième, et ajoutons-les :

$$g\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z\,\partial t}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2 H_z}{\partial x\,\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial y\,\partial x}-\frac{\partial^2 H_x}{\partial y\,\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial z\,\partial y}-\frac{\partial^2 H_y}{\partial z\,\partial x}\right)$$

c'est-à-dire que *tout le membre de droite s'annule.*

Posons alors

$$\rho = \varepsilon\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right), \tag{12-9}$$

d'où l'équation

$$g\cdot\frac{\rho}{\varepsilon}+\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)=0$$

ou

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+g\rho=0,$$

qui est une équation différentielle du premier ordre, et dont la solution est :

$$\rho=\rho_0\exp\left(-\frac{gt}{\varepsilon}\right)=\rho_0\exp(-\alpha t). \tag{12-10}$$

On voit que, au bout de peu de temps :

$$\rho=\rho_0$$

c'est-à-dire que l'on a

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0} \tag{12-11}$$

équation qui exprime que la densité cubique des charges électriques est nulle.

Dans le cas de charges électriques (ρ étant la densité cubique), l'équation (12-9) nous donne :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon},$$

c'est l'équation de Poisson, que ce dernier physicien a établie en électrostatique ; elle est encore vraie, d'après Maxwell, dans le champ électromagnétique.

— Quant aux masses magnétiques, on sait que, dans un élément de volume $\mathrm{d}v$, la quantité totale de magnétisme est toujours nulle, car en même temps que l'on a une masse $+\ m$ il apparaît toujours une masse $-\ m$; la densité cubique de magnétisme est donc toujours nulle, ce qui se traduit par l'équation suivante, qui a été étendue par Maxwell au champ magnétique :

$$\boxed{\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0.} \tag{12-12}$$

Remarque. — Cette équation (12-12) est bien une équation nouvelle qui ne provient pas des équations (12-4) et (12-7).

Dérivons par rapport à x la première équation (12-4), par rapport à y la deuxième et par rapport à z la troisième.

En ajoutant ces trois expressions, les deuxièmes membres donnent une somme nulle, comme plus haut, et il reste :

$$-\mu\left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial^2 H_y}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial z\,\partial t}\right)=0$$

ou

$$-\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}\right)=0,$$

et, comme $\mu\neq 0$, il reste :

$$\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=\text{Constante}.$$

La densité de magnétisme est indépendante du temps, mais cette équation n'implique pas que cette constante soit nulle, donc l'équation (12-12) est bien une équation nouvelle.

12-13. **Application de l'équation** $\rho=\rho_0\exp(-\alpha t)$. — Il existe pour chaque milieu, un temps caractéristique θ pour lequel la charge est réduite dans le rapport $1/e$:

$$\theta=\varepsilon/4\pi g,$$

on n'a plus qu'une fraction 1/2,7 de la charge initiale ρ_0.

Premier cas : eau de mer. On a $\rho = 30\ \Omega\ \text{cm}^2/\text{cm}$, donc

$$g = \frac{1}{3\cdot 10^{10}}\ (U.E.M.),$$

$$\varepsilon = 80\varepsilon_0 = \frac{80}{9\cdot 10^{20}}\ (U.E.M.),$$

d'où

$$\theta = \frac{1}{4\pi}(3\cdot 10^{10})\,\frac{80}{9\cdot 10^{20}} = 2{,}1\cdot 10^{-10}\ \text{s}.$$

Deuxième cas : terrain très sec. On a $\rho = 300\,000\ \Omega\ \text{cm}^2/\text{cm}$, donc

$$g = \frac{1}{3\cdot 10^{14}} \quad \text{et} \quad \varepsilon = 2\varepsilon_0,$$

d'où

$$\theta = 1/2\cdot 10^{-7}\ \text{seconde}.$$

Enfin, si $g = 0$ (dans un isolant), la charge se conserve, mais au bout d'un certain temps on peut pratiquement écrire :

$$\rho = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \qquad (12\text{-}13)$$

12-14. **La Laplacienne.** — Dans le cas où il existe une fonction potentielle U (voir Chapitre VIII du Tome V de notre *Cours élémentaire de Mathématiques supérieures*) on a :

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

et l'équation (12-13) donne :

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0}. \qquad (12\text{-}14)$$

Cette expression s'appelle *la Laplacienne* ΔU.

— Si le volume contient une densité cubique ρ, le flux total à travers la surface fermée, de volume $d\upsilon$, a pour valeur $\rho\, d\upsilon$, et on aura (toujours dans le système *MKSA*) :

$$-\Delta U \cdot d\upsilon = \rho\, d\upsilon$$

ou

$$\Delta U = -\rho = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \qquad (12\text{-}15)$$

C'est cette formule de POISSON que LANGMUIR appliqua à la lampe diode de la Radio.

12-15. **Application à la lampe diode.** — Les Américains LANGMUIR et CHILD ont appliqué la Laplacienne pour trouver l'équation de la lampe diode, c'est-à-dire l'équation qui donne la valeur du courant plaque i en fonction de la tension plaque v_p.

— Prenons une cathode chaude, en tungstène par exemple, supposée plane, et supposons une plaque métallique parallèle formant l'anode, dans le vide. LANGMUIR a constaté que, pour une température déterminée de la cathode il y a une tension anodique au-dessus de laquelle l'intensité du courant anodique n'augmente plus : *on dit qu'il y a saturation*, la plaque attirant tous les électrons émis par la cathode.

— Plaçons-nous à la distance x de la cathode, où le potentiel est V, et appelons :

ρ la densité cubique des charges à cet endroit,
v la vitesse des électrons dans ce plan et à cette distance x,
m la masse d'un électron,
e la charge électrique d'un électron,
i l'intensité du courant par cm^2, soit $i = \rho v$.

Si le potentiel à la distance x est V, on a, en égalant les deux valeurs de l'énergie d'un électron :

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV.$$

Mais ici nous sommes dans un plan et la seule variable est la distance x, aussi la Laplacienne de l'équation (12-14) se réduit-elle à l'expression suivante :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \rho = \frac{i}{v},$$

or, on sait que la vitesse de l'électron, dans le vide, est égale à :

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}},$$

d'où :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{i\sqrt{m}}{\sqrt{2e}} = K i V^{-1/2}.$$

Multiplions les deux membres par $2\partial V/\partial x$:

$$2\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2Ki V^{-1/2}\cdot\frac{\partial V}{\partial x},$$

et en intégrant :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 = K' i V^{1/2} + C.$$

Or, pour $V = 0$, on admet que $C = 0$, d'où, en appelant a un coefficient de proportionnalité :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = a V^{1/4} i^{1/2}$$

et, puisqu'il n'y a plus qu'une seule variable, nous pouvons mettre des d droits :

$$V^{-1/4}\,dV = a i^{1/2}\,dx.$$

Intégrant à nouveau, et élevant au carré :

$$\frac{16}{9} V^{3/2} = a^2 i x^2.$$

Prenons maintenant pour x la distance de la cathode à la plaque, il y correspond une tension plaque V_p, et, en appelant A un coefficient de proportionnalité convenable, on obtient la célèbre formule de CHILD-LANGMUIR donnant l'émission électronique :

$$\boxed{i = A V_p^{3/2}}. \qquad (12\text{-}16)$$

La figure 12-8 donne, pour différentes températures T_1, T_2, T_3 et T_4 la courbe de cette fonction, avec la saturation. L'équation précédente ne s'applique, bien entendu, qu'*avant* la saturation, c'est-à-dire dans la partie parabolique de la courbe.

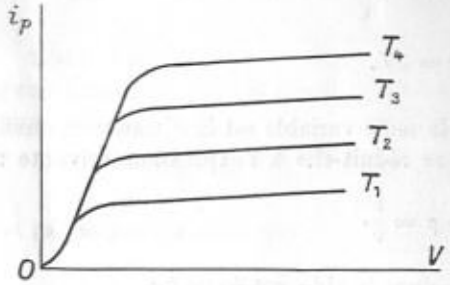


FIG. 12-8.

12-16. **Conditions aux limites pour les équations de Maxwell.** — Les équations précédentes de MAXWELL résument les lois de l'électromagnétisme pour des points situés dans la masse d'un milieu homogène, mais ne peuvent donner par leur intégration la valeur des champs ES et EM en un point. Comme dans toute équation différentielle on ne peut préciser que si l'on connaît les conditions aux limites.

Ainsi, dans un milieu infini, elles se réduisent à ce que le champ EM est nul à l'infini ; il faut y joindre les conditions de continuité aux surfaces de séparation des différents milieux, où g, ε et μ varient.

— Les équations (12-4) et (12-7) devant conserver des termes finis, on est conduit à énoncer les conditions suivantes :

a) A la surface de séparation de deux milieux homogènes, il y a continuité des composantes tangentielles du champ électrique et du champ magnétique.

b) La composante normale de l'induction magnétique $B = \mu H$ garde aussi la même valeur de part et d'autre de cette surface.

c) Il n'y a pas continuité de la composante normale du champ électrique.

d) Il y a encore continuité de la composante normale de la densité du courant total, c'est-à-dire du vecteur

$$J = gE + \varepsilon \frac{dE}{dt},$$

dont les trois composantes sont les premiers membres des équations du 2e groupe. Cette dernière condition s'interprète facilement en remarquant que gE représente la densité du courant de conduction, et $\varepsilon\, dE/dt$ représente la vitesse de variation de la charge électrique portée par la surface de séparation.

12-17. **Propagation dans un milieu isolant.** — Dans ce cas $g = 0$, et les équations de MAXWELL prennent *une forme remarquablement symétrique* en s'écrivant :

$$\boxed{\begin{aligned} -\mu\frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ -\mu\frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ -\mu\frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{aligned}} \qquad (12\text{-}17)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ \varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \\ \varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{aligned}} \qquad (12\text{-}18)$$

avec

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0} \qquad (12\text{-}19)$$

$$\boxed{\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0.} \qquad (12\text{-}20)$$

— Prenons les dérivées par rapport au temps de la première équation (12-18):

$$\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 H_y}{\partial t\,\partial z} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial t\,\partial y}$$

et remplaçons dans le deuxième membre les dérivées de H_y et de H_z par leurs valeurs tirées des équations (12-17). Nous obtenons ainsi :

$$\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial y\,\partial x}\right).$$

Or, en ajoutant et retranchant $\partial^2 E_x/\partial x^2$, on obtient :

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right).$$

Mais, d'après l'équation (12-19) cette dernière parenthèse est nulle, et il reste :

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}.$$

Des calculs analogues montreraient que les six composantes du champ, soit E_x, E_y, E_z, H_x, H_y et H_z satisfont toutes à la même équation différentielle du type :

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

— *Bornons-nous au cas d'une onde plane*, perpendiculaire à l'axe des x, c'est-à-dire au cas où les variables E_x, E_y, E_z, H_x, H_y et H_z sont seulement fonction de x et de t ; il reste alors :

$$\boxed{\varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}}, \qquad (12\text{-}21)$$

c'est l'équation classique aux dérivées partielles du second ordre, dont nous avons étudié en détail la résolution dans le Tome V de notre *Cours élémentaire de Mathématiques supérieures*, et dont la solution est

$$E_x = f\left(t - \frac{x}{\gamma}\right) = E_0 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

où γ est la vitesse de propagation dont la valeur, donnée par MAXWELL est :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Ainsi, en un point P d'abscisse x, la valeur de E_x à l'époque t est égale à la valeur qu'avait E_x au point origine, à une époque antérieure de x/γ à l'époque considérée t : *c'est bien ce qui exprime une propagation dans le sens des x avec la vitesse γ.*

Dans le vide on a :

$$\gamma = (2{,}997\,96) \pm 0{,}000\,04)10^{10} \text{ cm/s} = c$$

c'est la même valeur que la vitesse de la lumière, et la même que celle trouvée aussi par MAXWELL pour le rapport entre la charge ES exprimée en unités *CGS EM* et la même charge exprimée en unités *CGS ES*.

Dans l'air, il faut diviser la valeur précédente par 1,003.

— Nous allons voir que les vecteurs E et H sont perpendiculaires entre eux, et que l'on a :

$$\frac{E \text{ (en unités ES)}}{H \text{ (en unités EM)}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \qquad (12\text{-}22)$$

donc, dans le vide, comme ce rapport est égal à l'unité, on a :

$$E \text{ (en unités ES)} = H \text{ (en unités EM)}.$$

En effet, soit une nappe de courant parallèle au plan yOz, le courant étant parallèle à l'axe Oz (le milieu étant isolant).

Le vecteur courant étant parallèle à Oz, il en est de même du champ électrique, qui se réduit ainsi uniquement à E_z ; de plus E_z est indépendant de y, donc $\partial_z E/\partial y = 0$.

De la première et de la troisième équation (12-17) on déduit :

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0,$$

Il en résulte, puisque seuls les champs variables dans le temps nous intéressent, que :

$$H_x = 0 \qquad \text{et} \qquad H_z = 0,$$

donc le champ magnétique se réduit à H_y seul.

Ainsi, une nappe de courant parallèle au plan yOz entraine l'existence, en chaque point de la nappe, d'un champ magnétique H_y perpendiculaire au champ électrique E_z.

— La deuxième équation (12-17) et la troisième équation (12-18) donnent :

$$-\mu\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - 0 = \frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad (12\text{-}23)$$

$$\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 - \frac{\partial H_y}{\partial x} = -\frac{\partial H_y}{\partial x}. \qquad (12\text{-}24)$$

Or, on a vu que la solution de l'équation du champ électrique était :

$$E = E_0 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \qquad (12\text{-}25)$$

l'équation (12-24) donne alors, en dérivant par rapport à t :

$$\varepsilon \cdot \frac{2\pi}{T} E_0 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = -\frac{\partial H_y}{\partial x},$$

d'où, en intégrant :

$$H_y = \varepsilon\gamma E_0 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (12\text{-}26)$$

où γ est la vitesse de propagation.

— En comparant les équations (12-25) et (12-26) on voit que les champs E et H sont en phase : maximum en même temps et minimum en même temps (fig. 12-9).

De plus, si on désigne par ε' la constante diélectrique en unités $ES(CGS)$, on aura, en unités EM :

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{c^2}, \qquad (c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}),$$

et on aura pour la vitesse

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon'\mu}}.$$

L'équation (12-26) nous donne, en prenant les valeurs maxima (et avec H_0 en unités EM) :

$$H_0 = \varepsilon\gamma E_0 = \frac{\varepsilon'}{\sqrt{\varepsilon'\mu}} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon'\mu}} E_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}} \cdot \frac{E_0}{c}.$$

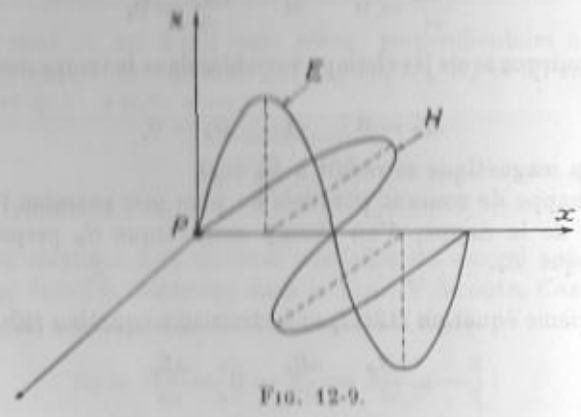


FIG. 12-9.

Or, E_0 est en unités EM, E_0/c sera alors exprimé en unités ES. Posons donc :

$$\frac{E_0}{c} = E'_0 \ (UES),$$

on aura finalement :

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}} \cdot E'_0$$

et, dans le vide, $\varepsilon' = \mu = 1$, d'où

$$H_0 \text{ en unités } EM = E'_0 \text{ en unités } ES.$$

— On sait que c'est en 1888 que HERTZ, en voulant vérifier la théorie de MAXWELL, fit ses célèbres expériences, et que c'est le Français Édouard BRANLY, professeur à l'Institut Catholique qui reçut le premier en **1890**, avec son radioconducteur à limaille, des signaux électriques émis à distance, et *sans fils de liaison*, à travers les murs épais, en pierre de taille, des bâtiments de cet Institut.

D'ailleurs, le lecteur qui voudrait connaître en *détail* la vie et les travaux de BRANLY n'aura qu'à se reporter à notre ouvrage : *Édouard Branly, et l'origine de la T. S. F.* (Éditions Séghers) écrit en collaboration avec M. PELLETIER, ancien préparateur de BRANLY.

BRANLY avait d'ailleurs inventé d'autres détecteurs : le trépied à pointes, le tube de verre à grosses billes d'acier, les aiguilles croisées en acier, le cohéreur solide à résine, les disques métalliques (y compris le cuivre) oxydés ou sulfurisés, etc., que l'on peut encore voir au Musée Branly, à l'Institut Catholique, 21, rue d'Assas, Paris 6e.

CHAPITRE XIII

QUELQUES APPLICATIONS DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

PÉNÉTRATION DES COURANTS A L'INTÉRIEUR DES CORPS

13-1. **Premier cas.** — *Cas d'un corps infiniment conducteur.* Cherchons les conditions à la surface limite d'un tel corps, placé dans un milieu isolant.

Partons des équations (12-4) et (12-7).

Si l'on fait croître indéfiniment la conductibilité g, en tenant compte :

a) du fait qu'aucun des éléments du champ ne doit devenir infini,

b) du fait que la quantité de chaleur dégagée dans un conducteur décroît quand g augmente,

on trouve les résultats suivants :

1° *En tous points à l'intérieur d'un conducteur parfait, le champ électrique est nul à tout instant.*

En effet, les premiers membres des équations E devant rester finis, et g augmentant, E_x, E_y et E_z doivent tendre vers zéro.

2° *A l'intérieur d'un conducteur parfait, H est invariable : il est donc toujours nul, s'il était nul au début.*

En effet, E_x, E_y et E_z étant nuls, on déduit des équations (12-4) que

$$\frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

sont nuls, donc H_x, H_y et H_z sont indépendants du temps.

Ceci est conforme à l'expérience : près du zéro absolu, g tend vers l'infini, un courant ne dégage plus de chaleur, la D.D.P. est nulle ; mais la supraconductivité est détruite par des champs H intenses. Par exemple, du bismuth ou du plomb dans l'hélium liquide restent aimantés quand on supprime le champ magnétique et leur aimantation disparaît très lentement.

3° *Les courants dans la masse sont indépendants du temps. Les courants variables sont localisés à la surface des corps conducteurs.*

En effet, les termes en $\varepsilon\partial E_x/\partial t$ du groupe E étant nuls, et les termes en $\partial H/\partial x$ étant indépendants du temps, il résulte de ces équations que les termes tels que gE_x sont aussi indépendants du temps.

Considérons une masse de cuivre parcourue par des courants de haute fréquence (fig. 13-1) supposés de densité constante. Découpons dans la masse du cuivre un cadre rectangulaire : il est traversé par un flux variable, et dans l'anneau la F.E.M. induite produira un courant i à un instant quelconque. Or d'après la règle d'AMPÈRE, ce courant aura en M à l'intérieur du conducteur le sens inverse de I, tandis qu'à la surface, en P, il sera de même sens, ce qui explique que le courant s'annule à l'intéreur, et soit maximum en P à la périphérie, en formant une pellicule.

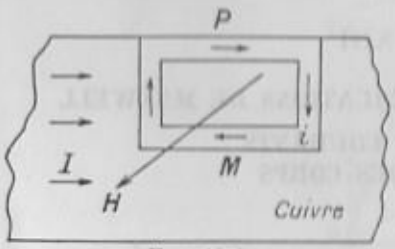


FIG. 13-1.

4° La composante tangentielle du champ électrique est infiniment petite, même à la périphérie.

Si $g \to \infty$, la pellicule où passe le courant est de plus en plus mince, mais la quantité de chaleur ne tend pas vers l'infini, donc la composante tangentielle de E doit tendre vers zéro : le vecteur J est parallèle à la surface du conducteur, et, comme $J = gE$, E est aussi dirigé le long de la surface et c'est lui qui produit la chaleur. On a $Q = gE^2$, or Q tend vers zéro en même temps que la résistivité, donc les courants superficiels étant finis, E tend vers zéro, puisque $gE^2 \to 0$.

5° *Au voisinage d'un conducteur parfait, le champ électrique extérieur est normal à la surface.*

En effet, la composante tangentielle de E étant nulle à l'intérieur, et encore nulle à l'extérieur, il ne subsiste que la composante normale.

6° *Le champ magnétique extérieur, près de la surface, est tangent à la surface* (abstraction faite d'un champ permanent qui pourrait exister).

En effet, l'axe des z étant normal à la surface du conducteur, les composantes tangentielles H_x et H_y sont nulles, et les équations (12-4) montrent que H_z devient indépendant du temps.

Il en est de même à l'extérieur.

13-2. **Deuxième cas.**

Cas des conducteurs métalliques en HF *placés dans un isolant.* — En HF les conducteurs se comportent comme s'ils étaient infiniment conducteurs. On verra dans les équations de MAXWELL quels sont les termes qui sont négligeables.

— Soit un champ électrique :

$$E = E_0 \sin \omega t.$$

Partout où il existe une dérivée des composantes du champ magnétique, celle-ci sera de la forme :

$$\frac{dH}{dt} = H_0\omega \cos(\omega t - \varphi).$$

Si $H_0 \neq 0$, et si ω croît indéfiniment, le premier membre des équations 12-4 deviendrait infini, donc aussi le deuxième membre, ce qui est impossible ; on est alors conduit à admettre que H est infiniment petit.

D'autre part, on a :

$$\frac{dE}{dt} = E_0\omega \cos \omega t,$$

donc les premiers membres des équations 12-5 deviendraient infinis avec ω, si E_x, E_y et E_z n'étaient pas infiniment petits. On est donc conduit aux mêmes résultats que pour les corps parfaitement conducteurs :

1° Il n'y a aucun champ électrique ni magnétique, ni aucun courant dans la masse du conducteur, les courants étant superficiels.

2° Dans l'isolant extérieur, le champ électrique aboutit normalement à la surface.

3° Le champ magnétique extérieur, tangent à la surface, est normal à la direction du courant superficiel.

L'épaisseur de la pellicule où passe le courant est d'autant plus mince que la fréquence est plus grande.

13-3. **Troisième cas :** *Courant de capacité et courant de conduction.* — Soit un condensateur avec un isolant parfait, et une D. D. P. sinusoïdale :

$$V = V_0 \sin \omega t,$$

l'intensité maximum du courant de capacité est :

$$i_0 = CV_0\omega = \frac{\varepsilon S}{e} V_0\omega.$$

Si entre les armatures du condensateur on glisse un conducteur de conductibilité g, le courant de conduction sera :

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V}{\frac{1}{g}\frac{e}{S}} = \frac{SVg}{e} = \frac{Sg}{e} V_0 \sin \omega t$$

dont l'amplitude maximum est :

$$I_0 = \frac{gSV_0}{e}.$$

Le rapport des intensités maxima est alors :

$$\frac{i_0}{I_0} = \frac{\varepsilon\omega}{g}.$$

Les courants seront égaux si $\varepsilon\omega/g = 1$, on a :

$$\frac{1}{\omega} = \frac{T}{2\pi} = \frac{\varepsilon}{g},$$

donc $\omega = g/\varepsilon$ est la pulsation critique, et :

— si $\varepsilon\omega/g > 1$, le courant de capacité domine,

— si $\varepsilon\omega/g < 1$, le courant de conduction domine, ce dernier existant seul si ω est faible.

D'où la conclusion :

Suivant la valeur de ω, les corps doivent être considérés comme conducteurs ou comme isolants.

13-4. **Équations réduites.** — Les équations du groupe 2 (équations 12-7) se simplifient suivant les valeurs de ω.

Prenons la première équation :

$$gE_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y}.$$

Dans le cas où E_x est de la forme :

$$E_x = E_0 \sin \omega t,$$

l'équation devient :

$$gE_0 \sin \omega t + \varepsilon\omega E_0 \cos \omega t = \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y}.$$

Pour des oscillations lentes, et pour un corps relativement conducteur (et sans effet diélectrique), le deuxième terme du membre de gauche est négligeable par rapport au premier, et il reste :

$$gE_x = \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y}. \qquad (13\text{-}1)$$

Pour un corps très peu conducteur, comme l'air, ce sera le contraire, et il reste :

$$\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y}, \qquad (13\text{-}2)$$

et l'on peut mettre cette équation en parallèle avec la première équation (12-4) :

$$-\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}. \qquad (13\text{-}3)$$

On obtient ainsi les deux groupes d'équations 12-4 et 12-8 que nous avons donnés au début, et dont on admirera la symétrie.

— On peut remarquer que l'équation 13-3 est tout simplement l'équation de l'électromagnétisme ordinaire et qu'elle traduit la loi de l'induction :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

appliquée à un circuit quelconque découpé dans le conducteur, tandis que l'équation 13-1 représente la deuxième loi fondamentale de l'électromagnétisme : la force magnétomotrice, dans un circuit fermé, est égale au courant qui traverse le circuit (dans le système d'unités *MKSA*.)

— Ainsi, en dehors du cas de corps très mauvais conducteurs, on peut étudier la propagation superficielle des courants, et leur pénétration dans la masse, au moyen d'une théorie élémentaire ne faisant appel qu'aux deux lois fondamentales de l'électromagnétisme.

13-5. **Exemples.**

1° *Eau de mer* à 30 kg de sel marin par mètre cube.

La résistivité est $\rho = 25$ à $30\ \Omega\ \text{cm}^3/\text{cm}$.

Prenons :

$$g = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{30} = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \text{ (unités } EM\text{)}$$

et, si ε_0 est la constante diélectrique du vide :

$$\varepsilon = 80\varepsilon_0 \quad \text{ou} \quad \frac{80}{(3 \cdot 10^{10})^2} \text{ (unités } EM\text{)}.$$

La pulsation critique est $\omega = g/\varepsilon$ qui correspond à une longueur d'onde :

$$\lambda_c = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c\varepsilon}{2g} = \frac{(3 \cdot 10^{10})80 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{2(3 \cdot 10^{10})^2} = 40 \text{ cm}.$$

Ainsi, pour $\lambda > 40$ cm l'eau de mer se comporte comme un conducteur à grande résistance. Ce sera le cas de la pratique (où λ est de quelques mètres).

2° *Terrain sec, caillouteux, très résistant.*

On a :

$$\rho = 300\,000\ \Omega/\text{cm}, \qquad \varepsilon = \frac{2}{(3 \cdot 10^{10})^2} \text{ (unités } EM\text{)}.$$

On aura :

$$\lambda_c = 3 \cdot 10^{10} \frac{2}{9 \cdot 10^{20}} \cdot 3 \cdot 10^{14} = 200 \text{ mètres},$$

et même avec un ε de 6 on ne dépasserait pas $\lambda = 600$ m.

En résumé :

— pour l'eau de mer, si $\lambda \gg 40$ cm, on a un bon conducteur,
et si $\lambda \ll 40$ cm, on a un diélectrique ;

— pour un terrain très résistant :
si $\lambda \gg 200$ m, on a un conducteur,
si $\lambda \ll 200$ m, on a un diélectrique.

On voit donc que ce n'est que dans le cas de propagation d'ondes courtes sur un sol très résistant qu'il y a lieu de tenir compte des courants de déplacement. Pour les conducteurs, et, si $\lambda \gg 40$ cm, on n'a que des courants de conduction.

13-6. **Calcul de la pénétration du courant dans un conducteur.** — Prenons un corps très conducteur, sans courant de déplacement, et appliquons-lui les équations réduites du paragraphe précédent en nous plaçant dans le cas d'une surface plane indéfinie.

Supposons donc un conducteur séparé de l'air par le plan horizontal xOy, dans lequel les courants sont supposés parallèles au plan xOz et, en outre, indépendants de la variable y.

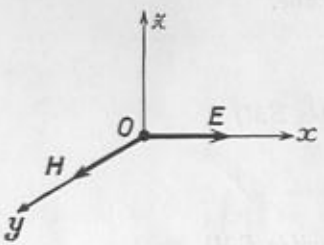


FIG. 13-2.

A l'extérieur, le champ électrique est vertical, puisqu'il est perpendiculaire à la surface de séparation, et le vecteur H est horizontal.

A l'intérieur, le champ électrique est dirigé suivant Ox et ses composantes sont (fig. 13-2) :

$$E_x = E, \qquad E_y = 0, \qquad E_z = 0.$$

Le champ magnétique H est orienté suivant Oy :

$$H_x = 0, \qquad H_y = H, \qquad H_z = 0.$$

Les intensités de E et de H varient en fonction de z et les équations simplifiées du groupe 12-4 se réduisent à :

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z}.$$

Le groupe 12-7 se réduit à :

$$gE_x = \frac{\partial H_y}{\partial z}.$$

On obtient ainsi deux équations à deux inconnues E_x et H_y :

$$\boxed{\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z}} \qquad (13\text{-}4)$$

et

$$\boxed{gE_x = \frac{\partial H_y}{\partial z}}. \qquad (13\text{-}5)$$

Résolution :

L'élimination de H_y donne, en dérivant la première par rapport à z et la deuxième par rapport à t après multiplication par μ :

$$g\mu \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}.$$

Cette équation du second ordre aux dérivées partielles fait connaître la loi de variation de la composante tangentielle E_x du champ électrique, et par conséquent, la densité de courant superficielle.

On remarque que cette équation est analogue à celle de la pénétration de la chaleur dans un mur ou un sol plan ; elle est aussi analogue à l'équation des cordes vibrantes ainsi qu'à celle de la propagation du courant HF le long des lignes, et que nous avons déjà étudiée.

Nous avons étudié une telle équation, et donné sa solution dans le Tome V consacré aux équations différentielles de notre *Cours Élémentaire de Mathématiques Supérieures* (Éditeur Dunod).

Voici sa solution :

$$E_x = E_0 \exp(-z/a) \cdot \cos(\omega t - z/a)$$

avec

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\pi g \mu \omega}}.$$

La densité de courant à la profondeur z est donc :

$$\begin{aligned} J &= gE_x = gE_0 \exp(-z/a) \cdot \cos(\omega t - z/a) \\ &= J_0 \exp(-z/a) \cdot \cos(\omega t - z/a), \end{aligned}$$

en posant :

$$J_0 = gE_0$$

Ainsi, J décroît exponentiellement, et se trouve réduite à la fraction $1/e$, soit environ au tiers de sa valeur maximum, à la profondeur a. Elle n'est plus que 1/1 000 du maximum à la profondeur sept fois plus grande.

Le courant total sera donc :

$$I = \int_0^\infty J\,dz = J_0 \int_0^\infty \exp(-z/a) \cdot \cos(\omega t - z/a)\,dz$$

$$= J_0 \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - \pi/4).$$

Il y a ainsi une variation de phase de $\pi/4$ par rapport à J à la surface.

Cette dernière formule montre que *la densité de courant, au voisinage de la surface, est la même que si l'intensité totale du courant était répartie uniformément dans l'épaisseur* $\frac{a}{\sqrt{2}}$, et qu'on appelle la pellicule.

13-7. **Valeurs numériques.** — Pour les métaux non magnétiques (cuivre, zinc, etc.), pour l'eau de mer et la plupart des terrains, on a $\mu \approx 1$. On remarque que a peut s'écrire, en désignant par K un coefficient de proportionnalité :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\pi g \mu \omega}} = \frac{K}{\sqrt{F}}. \qquad (13\text{-}6)$$

Le tableau ci-dessous donnent quelques valeurs, où :

$\rho = 2\ \mu\Omega$ cm pour le cuivre,

$\rho = 30\ \Omega$ cm pour l'eau de mer,

$\rho = 50\,000\ \Omega$ cm pour un terrain de sable humecté d'eau médiocrement conducteur.

Longueur d'onde en mètres	Pénétration en mètres		
	cuivre $g = \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}}$	eau de mer $g = \frac{1}{30}$	terrain médiocrement conducteur $g = \frac{1}{50\,000}$
16 000	0,000 52	2	80
4 000	0,000 26	1	40
1 000	0,000 13	0,50	20
250	0,000 065	0,25	10
4	0,000 008		

On voit ainsi que les ondes longues pénètrent dans la mer, ce qui permet aux sous-marins de recevoir ces ondes étant immergés, et même de communiquer entre eux. Dans ce but les Américains ont installé sur la côte de Californie une station d'émission de 1 000 kW, sur $\lambda = 15\,000$ et 10 000 mètres, permettant de transmettre avec un sous-marin immergé à plus de 25 m dans toute l'étendue de l'océan Pacifique et de l'océan Indien !

Dans les souterrains, on peut recevoir toutes les longueurs d'onde sauf les courtes et ultra-courtes, ainsi qu'à travers la maçonnerie. Au contraire, les métaux forment écran.

13-8. **Calcul de la résistance en H. F.** — Il faut calculer le dégagement de chaleur, et intégrer les quantités de chaleur relatives à une petite tranche de conducteur, de largeur l et de longueur x, comptée parallèlement à la direction du courant, et d'épaisseur dz, prise à la profondeur z.

La densité de courant étant J, la quantité élémentaire de chaleur pendant un temps dt est :

$$dQ = Ri^2\,dt = \frac{1}{g}\frac{x}{l \cdot dz}(Jl\,dz)^2\,dt$$

$$= \frac{1}{g}xlJ^2\,dz\,dt,$$

où J doit être remplacé par :

$$J = J_0 \exp(-z/a)\cos(\omega t - z/a).$$

Intégrons d'abord par rapport au temps, pendant un temps T de manière à évaluer la puissance moyenne élémentaire, c'est-à-dire la quantité de chaleur dégagée, par unité de temps, dans la tranche considérée :

$$dP = \frac{1}{T}\int_0^T dQ = \frac{1}{2}\frac{1}{g}xlJ_0^2 \exp(-2z/a)\,dz,$$

et, en intégrant ensuite par rapport à z pour toute la profondeur, on obtient :

$$P = \frac{1}{2g}xlJ_0^2\int_0^\infty \exp(-2z/a)\,dz$$

$$= \frac{1}{4g}xlJ_0^2a. \qquad (13\text{-}7)$$

Le lecteur, qui serait arrêté par ces calculs, trouvera dans les Tomes III et IV (consacrés au calcul Intégral) de notre *Cours Élémentaire de Mathématiques Supérieures* le moyen *facile* de calculer ces intégrales.

— Interprétons le résultat trouvé : il signifie que le dégagement de chaleur est le même que si le courant HF total :

$$I = \int_0^\infty Jl\,dz = lJ_0\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

passait tout entier, *uniformément réparti*, dans une épaisseur égale à :

$$\boxed{a = \frac{1}{\sqrt{2\pi g\mu\omega}}} \qquad (13\text{-}8)$$

ainsi qu'on peut s'en assurer en calculant directement cette quantité de chaleur.

La résistance en HF est donc la même que si le courant superficiel était réparti uniformément dans l'épaisseur a.

13-9. **Cas d'un fil conducteur rectiligne.** — Étudions le cas d'un gros conducteur cylindrique.

Si le diamètre est très grand par rapport à a on peut appliquer les résultats précédents pour le plan.

Soit l la longueur du fil et p le périmètre. On a, si r est le rayon du fil :

$$R_{\text{H.F.}} = \frac{1}{g}\cdot\frac{l}{pa} = \frac{l}{g2\pi ra}$$

$$= \frac{1}{g}\frac{l}{2\pi r}\sqrt{2\pi g\omega} \qquad (13\text{-}9)$$

— C'est en calculant la puissance rayonnée par un doublet :

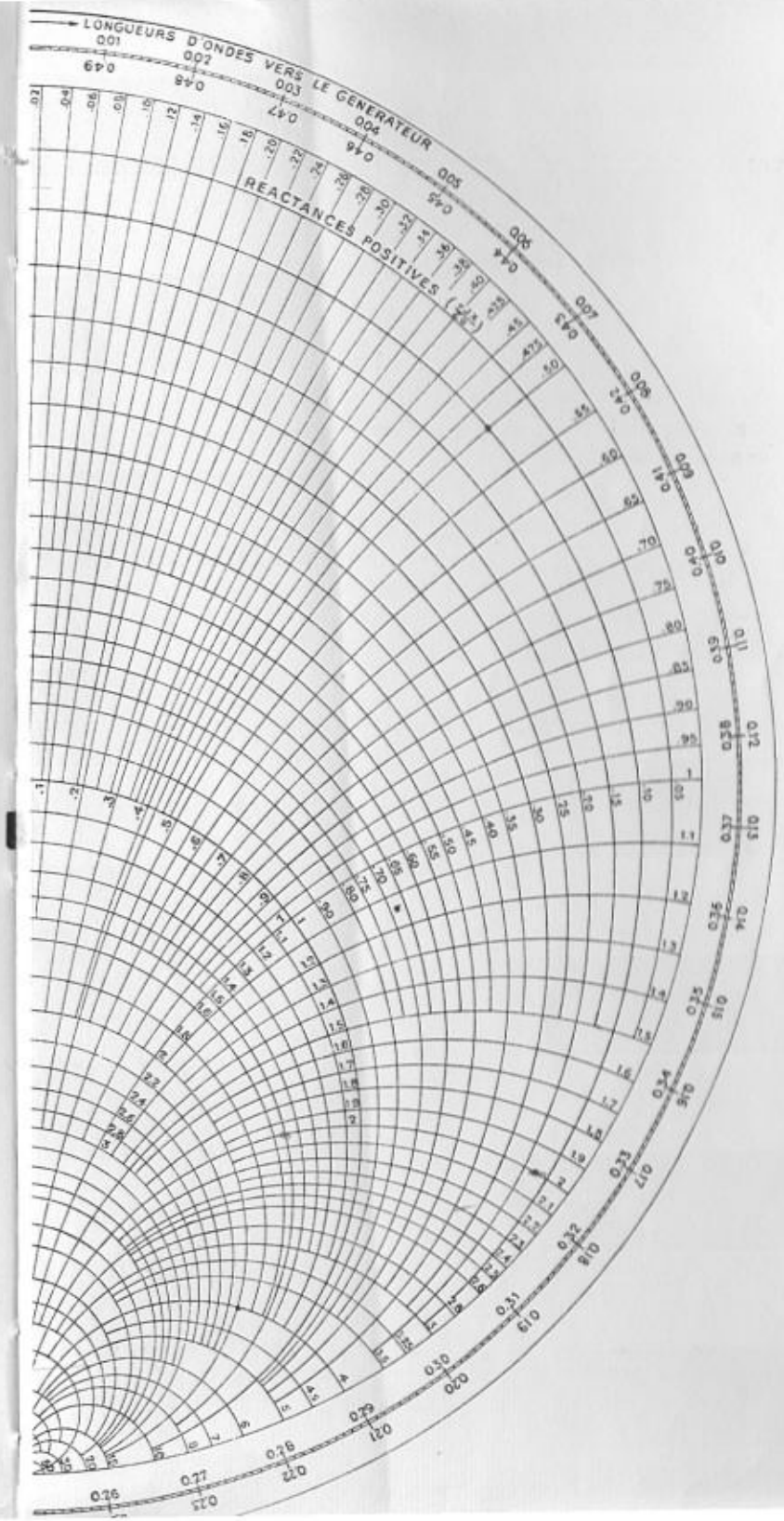
$$P = R_r I_0^2$$

où R_r est la résistance de rayonnement, que POYNTING a trouvé la valeur suivante, que nous avons d'ailleurs donnée plus haut au sujet du rayonnement des antennes :

$$R_r = 1\,600 \frac{h_e^2}{\lambda^2} \Omega$$

où h_e est la hauteur effective de l'antenne.

On n'oubliera pas que R_r est la résistance utile : plus elle est grande et plus l'antenne rayonne davantage d'énergie.

Remarque. — Nous signalons pour terminer, que les équations de MAXWELL servent de base actuellement à la théorie des guides d'ondes, en particulier, mais que nous ne pouvons aborder ici sans dépasser le niveau de cet ouvrage. Cependant, l'étude précédente en constitue une excellente introduction.

Imprimerie Bussière à Saint-Amand (Cher), France. — 18-6-1963.
Dépôt légal : 2e trimestre 1963. N° d'édition : 4282 N° d'impression : 264
Imprimé en France