Tangente

Bibliothèque Tangente
L'aventure mathématique

Mille ans d'histoire des mathématiques

1001-2000 : l'accès à la modernité

POLE
HS n° 10
ISSN 0987-0806

Bibliothèque
Tangente
L'aventure mathématique

Tangente Hors-série n° 10

Mille ans d'histoire des mathématiques

1001-2000 : l'accès à la modernité

Sous la direction d'Hervé Lehning

POLE

I.S.B.N. 2-84884-029-3 I.S.S.N. 0987-0806 Commission paritaire 1006 K 80883

Mille ans d'histoire des mathématiques

Sommaire

DOSSIER Évolution des techniques

Pratique, rapide, efficace : notre système actuel de numération est le fait d'une lente maturation depuis les Arabes jusqu'au Moyen-Age. Cette étape était nécessaire avant de commencer à calculer avec des lettres, à faire de l'algèbre. En inventant les repères qui portent son nom, Descartes a ensuite ramené la géométrie à l'algèbre. Toujours soucieux d'éviter ou de simplifier les calculs, les mathématiciens inventèrent les logarithmes, ou plus tard les logiciels de calcul symbolique.

DOSSIER Les grands problèmes

Pourquoi les Grecs ont-ils privilégié la règle et le compas pour la construction des courbes ? Quelle qu'en soit la raison véritable, ce choix a marqué les mathématiques jusqu'à nos jours. Autre héritage des Grecs, l'arithmétique ne verra son véritable avènement qu'avec Pierre de Fermat, célèbre grâce aux problèmes qu'il a résolus, mais aussi à celui qui n'a pu être démontré que récemment et qui porte son nom.

Où sont les femmes ?

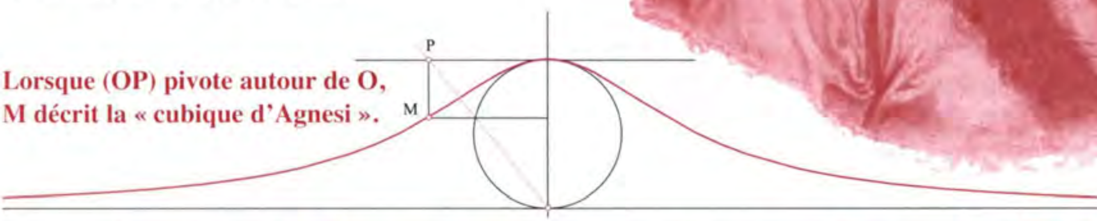
Sonia Kovalevskaïa, princesse de la science

C'est un détail de son enfance – une chambre de sa maison tapissée, parce que le papier peint était rare et cher, de cours du mathématicien Ostrogradski – qui poussa vers les mathématiques cette fille de général russe. « Ces feuilles, bigarrées d'anciennes et incompréhensibles formules, attirèrent bientôt mon attention. Je me rappelle avoir passé des heures entières dans mon enfance, devant ce mur mystérieux, cherchant à déchiffrer quelques phrases isolées et à retrouver l'ordre dans lequel ces feuilles devaient se suivre. »

Les mathématiques se mirent ainsi à occuper sa vie : bien que la plus douée des élèves de Weierstrass, que fréquentant Tchebychev et Poincaré, elle n'obtint que le poste largement sous-qualifié de « private docent » à l'Université de Stockholm. Ses travaux sur les équations aux dérivées partielles et leur application en mécanique sont pourtant remarqués. Pour l'un d'eux, sur la rotation des corps, l'Académie des Sciences de Paris propose de doubler le prix qu'elle lui offre. Mathématicienne de renom mais aussi écrivain, elle laisse une œuvre littéraire appréciée en Russie.

Tel père, telle fille... Maria Gaetana Agnesi

Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) est fille d'un professeur milanais. À 9 ans, elle compose un poème en latin qui constitue un véritable plaidoyer pour le droit des filles à l'éducation supérieure. Fine lettrée, connaissant, outre le latin, le grec, l'hébreu et plusieurs langues vivantes, elle apporte dans les deux tomes de son *Instituzioni analytiche* (1749) une contribution d'algèbre, de géométrie et d'analyse infinitésimale *la mieux faite qu'il y eût en ce genre*, aux dires de l'Académie des Sciences. Insigne honneur, elle laisse son nom à une courbe du troisième degré, qu'elle nomme elle-même « versiera », la sorcière…



Lorsque (OP) pivote autour de O, M décrit la « cubique d'Agnesi ».

par Hervé Lehning

Les étapes du millénaire

Après les flux et reflux des périodes antiques, le deuxième millénaire de notre ère se caractérise par un progrès continu des champs de la connaissance et des mathématiques en particulier. Une étude détaillée laisse cependant voir de grandes époques et une respiration de l'histoire.

Faire commencer une histoire des mathématiques en l'an 1001 semble une gageure. Vu de loin et intellectuellement parlant, rien ne bouge avant le XVI^e siècle. Cependant, cette vision de l'histoire est abusive pour au moins deux raisons. Tout d'abord, elle met exagérément le centre de la planète en Occident chrétien. Les Arabes n'avaient pas perdu les acquis de l'Antiquité. Ensuite, elle fait l'impasse sur la renaissance médiévale. En effet, le Moyen-Âge n'a pas été aussi obscurantiste que sa caricature le laisse parfois croire.

Le Moyen-Âge n'a pas été aussi obscurantiste que sa caricature le laisse parfois croire.

Le pape de l'an mil

L'église catholique passe souvent pour l'institution la plus obscurantiste de ces temps. La figure du pontife de l'An Mil contredit cette idée puisqu'il s'agit de Gerbert d'Aurillac, qui devint pape sous le nom de Sylvestre II. Enseignant à Reims l'astronomie, les mathématiques et la logique, il développa l'usage de l'abaque et construisit des instruments astronomiques. Nous lui devons aussi la première introduction des chiffres arabes en Occident.

Gerbert d'Aurillac (946-1003)

Faut-il s'en étonner ? Sans doute moins qu'il n'y paraît. Les monastères étaient les seuls lieux de culture de cette époque. Gerbert avait découvert ces chiffres en Espagne, alors partie du monde musulman. Ne vous étonnez pas trop de cette présence d'un moine dans un tel lieu. Les croisades n'ont pas encore eu lieu.

Transmission

À l'époque de Gerbert, les connaissances mathématiques grecques et indiennes commencent à pénétrer l'Occident, principalement à travers les relations commerciales avec l'Orient, le royaume normand de Sicile et l'Espagne. Le siècle qui suit sera celui des traducteurs. *Les Eléments* d'Euclide sont traduits en latin ainsi que les tables astronomiques d'Al-Khwarizmi. De cette transmission par les Arabes, nous devons d'autres mots comme *algèbre* (voir *Symbolisme et mathématiques arabes*) ou *sinus* (traduction latine du mot arabe « jaib » déformation du mot indien signifiant « corde »).

Voies de transmission des mathématiques grecques et indiennes à l'Occident chrétien

Assimimiliation progressive

Les premières traductions ne sont pas accompagnées d'une compréhension profonde des textes. Aucun progrès dans la lignée des anciens ne les accompagne. Les mathématiciens de l'époque sont davantage intéressés par les nouvelles techniques de calcul. Elles sont utiles pour le commerce. Nous les devons essentiellement aux Indiens et aux Arabes. Les plus grands mathématiciens de l'époque furent Fibonacci (voir l'article *Moyen-Âge : la numération décimale s'impose en Occident*) et Oresme, précurseur de l'utilisation des systèmes de coordonnées (voir l'article *Le repère de Descartes*). Ces deux grands apports se situent donc surtout au niveau technique. Rien de péjoratif dans cette remarque, ce niveau était indispensable aux progrès ultérieurs.

La véritable redécouverte des mathématiques se situe quand ces techniques de calcul alliées au symbolisme algébrique (voir l'article : *Viète, la naissance du calcul littéral*) commencent à féconder le vieil héritage grec. Nous sommes alors en pleine Renaissance, au XVI^e siècle. Les algébristes italiens (Cardan, Tartaglia, Ferrari) résolvent les équations du troisième et du quatrième degré. Ils échoueront sur les équations générales de degré supérieur et il faudra attendre le XIX^e siècle pour qu'Abel démontre l'impossibilité de cette tâche (voir l'article *La résolution des équations*).

Tartaglia

Simon Stevin est né à Bruges en 1548 et mort à La Hague en 1620. C'était un très bon ingénieur, il a construit des moulins à vent, des écluses et des ports. En mathématiques, il a introduit l'utilisation des décimales en Occident. Il a écrit plusieurs livres importants de mécanique.

Le début des temps modernes

La pleine éclosion des mathématiques modernes attendra le XVII^{e} siècle. Les découvertes succèdent alors aux découvertes : logarithmes avec Napier et Briggs (voir l'article *Des logarithmes au logarithme*), naissance des probabilités avec Pascal (voir l'article *Les probabilités : une paternité multiple*), Descartes (voir l'article *Le repère de Descartes*) et Fermat (voir l'article *Fermat ou l'avènement de l'arithmétique*) pour ne citer que les plus célèbres du point de vue des mathématiques. Sans doute faudrait-il citer également Simon Stevin, Galilée et Kepler. Ces deux derniers sont plus connus comme astronomes, le premier comme ingénieur et physicien. Cette époque prépare également la suivante, puisqu'on y voit plusieurs mathématiciens devenir maîtres des méthodes d'Archimède de calcul d'aire. Ce sont les véritables précurseurs modernes du calcul infinitésimal et de l'introduction des mathématiques dans les sciences physiques. La tradition médiévale dans cette discipline venait d'Aristote. Elle voulait trouver des explications aux phénomènes naturels et non se contenter de les décrire pour les prévoir comme nous le faisons depuis (voir l'article *Newton et la physique devint mathématique*).

Galilée est né à Pise en 1564 et mort près de Florence en 1642. Il est surtout connu pour ses travaux en mécanique et en astronomie ainsi que par son procès ordonné par le pape de l'époque au cours duquel il dut abjurer ses erreurs. « *Et pourtant, elle tourne* » aurait-il ajouté dans sa barbe selon la légende. À cette époque, les savants étaient beaucoup plus généralistes que de nos jours, la science était également moins étendue. D'autre part, les astronomes avec leurs calculs sont les premiers consommateurs de mathématiques. À l'heure actuelle, aucun mathématicien ne domine toutes les branches de sa propre discipline, sans parler des autres.

L'explosion mathématique

La grande époque est juste postérieure. Le XVII^{e} siècle voit successivement l'invention du calcul infinitésimal et son utilisation pour résoudre les problèmes de tangente et de calcul d'aire ainsi que de nombreux problèmes de physique.
De plus, à partir de ce siècle, on peut parler de croissance explosive de la recherche en mathématiques. Une façon sans doute approximative mais néanmoins objective de la mesurer est de compter le nombre de périodiques contenant des articles concernant les mathématiques. Jusqu'en 1700, on n'en dénombre que 17. A la fin du siècle, on en trouve 210 et un siècle plus tard 950. Combien à la fin du XX^{e} siècle ? L'unité de compte est devenue la dizaine de milliers.

Mais revenons au XVII^{e} siècle. Dans un premier temps, ces avancées scientifiques se font au détriment de la rigueur. L'introduction d'infiniment petits actuels c'est-à-dire existant réellement comme quantités non nulles inférieures à tout nombre réel strictement positif aboutit facilement à des absurdités. Les grands mathématiciens de l'époque n'en étaient d'ailleurs pas dupes et voyaient en fait ces infiniment petits comme potentiels. Il s'agissait de quantités variables pouvant être rendues aussi petites que désirées. Ces subtilités restaient bien obscures à la plupart et leur faisaient comparer les mathématiques à la théologie. La manipulation d'expression formelle comme la somme infinie :

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

aboutissait à toute sorte d'erreurs. Pour rester sur cet exemple, en groupant les termes deux à deux des deux façons différentes, on obtient deux résultats différents :

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0$$
$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots = 1$$

Ces deux résultats sont bien entendus faux. Euler en déduira que le résultat exact est la demi-somme c'est-à-dire 1/2. L'intuition d'Euler était tout à fait correcte mais, sans définition adéquate de la somme d'une série, le raisonnement sous-jacent n'est guère soutenable (voir l'article *Infiniment petits : actuels ou potentiels ?*).

La circonférence d'un cercle étant proportionnelle à son diamètre, le premier demi-cercle a même longueur que les deux demi-cercles de diamètres moitié, que les quatre demi-cercle de diamètre quart et ainsi de suite.

Nous arrivons ainsi à une figure se confondant visuellement avec le diamètre de départ et de même longueur que le premier demi-cercle. Un raisonnement trop rapide permettrait de conclure que le demi-cercle a même longueur que le diamètre c'est-à-dire que $\pi = 2$.

Ceci est bien entendu absurde et montre le type de paradoxe que peut produire des raisonnements abusifs si l'infini est en jeu.

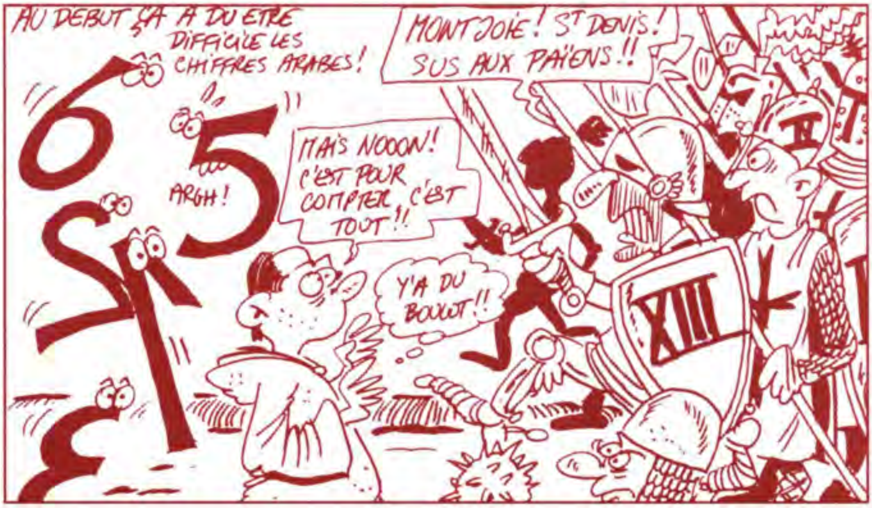
La notion de longueur ne passe pas forcément à la limite.

Retour à la rigueur

Le retour à la rigueur des Anciens vint avec Cauchy. C'est à lui que nous devons la définition des limites et de la continuité utilisée de nos jours dans l'enseignement secondaire. Les infiniment petits actuels disparaissent des mathématiques jusqu'à ce qu'Abraham Robinson leurs donne un fondement théorique rigoureux dans la seconde moitié du XX^e siècle. Cela n'enlève rien à l'importance de la construction entamée par Cauchy. Cette clarification des bases n'en resta pas là. Les découvertes du XIX^e siècle vont amener les mathématiciens à essayer de préciser les fondements des mathématiques. Ce sont des recherches sur les séries trigonométriques introduites par souci des applications en Physique qui vont produire une précision de cette notion apparemment si simple d'ensemble.

La crise des fondements

Si nous restons au niveau du vocabulaire courant et baptisons « ensemble » toute collection d'objets considérée comme un tout unique. Il s'agit alors de l'ensemble de ces objets. Dans ce cas, nous arrivons vite à de nombreux paradoxes. C'est pour cette raison que cette « théorie » des ensembles est dite naïve. Le paradoxe le plus simple a été fourni par Bertrand Russel (voir l'article *La logique moderne : de Boole à*



Gödel). Il est lié à la notion d'ensemble de tous les ensembles. Georg Cantor a montré que ce dernier est paradoxal en lui-même.

D'autres paradoxes sont apparus dans différents domaines des mathématiques. Bertrand Russell a montré que tous ces paradoxes étaient plus ou moins équivalents à celui d'Épiménide. Ce philosophe crétois du VIe siècle avant Jésus-Christ aimait dire : « les Crétois mentent toujours ». Etant lui-même crétois, cette phrase était donc un mensonge. Conclusion : Epiménide disait la vérité et donc il mentait, etc. Le cercle vicieux était qu'Épiménide étant lui-même crétois énonçait une assertion impliquant tous les crétois, lui-même compris. Autrement dit, cette phrase était autoréférente.

La méthode axiomatique

L'existence de tels paradoxes fit sentir que les mathématiques étaient bâties sur des bases peu solides. La réponse à ce problème fut le désir d'étendre la méthode axiomatique telle qu'Euclide l'avait conçue à toutes les mathématiques. L'idée de départ était de créer des bases qui excluaient les paradoxes connus. Un certain nombre d'axiomes étant admis, les Mathématiques se réduisaient alors via quelques principes de raisonnements à la Logique.

Les règles de départ d'une théorie sont appelées ses axiomes. Ils ne sont pas censés avoir de sens en eux-mêmes. Les seules conditions que l'on puisse poser concernant ces axiomes sont d'être consistants et complets c'est-à-dire de ne pas conduire à des résultats absurdes et de permettre de prouver tous les résultats vrais de la théorie.

Il n'est pas besoin que ces axiomes aient une signification sensible. Les noms des objets introduits n'ont pas de sens en eux-mêmes. Seules leurs relations importent. Ainsi, l'axiome de géométrie élémentaire : « par deux points distincts, il passe une et une seule droite » pourrait être changé en : « par deux bretzels distincts, ils passe un et un seul bock de bière » si dans les axiomes de la géométrie, nous remplacions « point » par « bretzel » et « droite » par « bock de bière ».

Pour les formalistes comme Hilbert (voir l'article *La logique moderne : de Boole à Gödel*), cet d'oubli du sens des objets mathématiques pour ne s'occuper que de leur forme était la condition à

Henri Cartan est né en 1904 à Nancy où figure une statue du général Charles Bourbaki qui, en son temps, ne fut pas aussi obscur que la légende veut bien le dire.

payer pour éviter les paradoxes. L'important était de montrer la consistance et la complétude d'une théorie. Ce programme bien modeste en apparence ne put être mené à bien même pour les théories les plus élémentaires comme celle des ensembles ou l'arithmétique. Gödel prouva qu'il était impossible de prouver qu'un système assez riche pour contenir l'arithmétique était complet. Plus précisément, il existe des résultats vrais dans une théorie dont on ne peut prouver qu'ils le sont en restant dans cette théorie. Gödel nous a appris qu'il fallait distinguer le prouvable et le vrai. On pourrait résumer ce fait en disant qu'il en est de même en mathématiques que dans les affaires judiciaires.

Les travaux de Turing complétèrent cette idée d'impossibilité de la preuve de certains résultats vrais en montrant qu'on ne pouvait inventer aucun algorithme fabriquant mécaniquement tous les résultats prouvables d'une théorie. Le prouvable n'est pas entièrement atteignable par un ordinateur, fut-il très puissant.

Dans une vision humaniste, ce résultat est somme toute très rassurant. Finalement, aucune machine ne supplantera jamais l'homme.

Bourbaki

Ceci dit, une idée ainsi lancée ne s'arrête pas comme cela. L'époque Bourbakiste devait naître de la conception de Hilbert. L'idée de ce groupe de mathématiciens français était d'écrire un traité de toutes les mathématiques « achevées ». Les domaines en mouvement étaient ignorés et laissés volontairement en dehors du traité. Le défaut principal est sans doute que ce fait n'est pas toujours perçu par le lecteur. Ainsi, les mathématiques pourtant très vivantes au XX^{e} siècle, y semblent mortes.

Nouvelle révolution

À propos de ce courant bourbakiste, on a souvent parlé de mathématiques modernes. Ce qualificatif devrait toujours être évité car ce qui est moderne un jour est ancien le lendemain. Ceci dit, les mathématiques sont à nouveau dans une période de découverte. Comme au XVIII^{e} siècle, il en sort le meilleur comme le pire. L'histoire jugera. Sans doute écrit-on de nos jours bien des absurdités concernant entre autres les notions de chaos et de fractales. Il n'en est pas moins qu'il s'agit de notions nouvelles et importantes. Ce bouillonnement des idées montre à quel point les mathématiques restent vivantes et utiles. Il serait absurde de vouloir les normaliser complètement. On ne fige d'ailleurs une source qu'en la tarissant.

H. L.

Nicolas Bourbaki est le nom choisi par un groupe de mathématiciens des années trente. Créé à l'origine par Henri Cartan et André Weil, le nom de ce groupe est celui d'un général Français de la guerre de 1870 (voir ci-dessus).
Selon la légende, un des anciens élèves de l'école normale se faisant passer pour un mathématicien suédois, avait cité ce nom comme intitulé d'un théorème lors d'un cours. Les élèves n'y ayant vu que du feu, ils supposèrent Bourbaki russe et lui attribuèrent Nicolas comme prénom. Toujours selon la légende, Bourbaki serait en fait un mot d'origine crétoise signifiant « chef des tueurs ».
Dans un des traités de Bourbaki, on trouve au milieu d'un théorème « un ensemble filtrant à droite et à gauche ». Dans la version finale de l'ouvrage, ce morceau a été remplacé volontairement par « un ensemble flirtant à droite et à gauche ». Sous les pavés, la plage disait-on en 1968. Sous Bourbaki, le canular, pourrait-on également dire. Cela n'enlève rien au sérieux de l'entreprise bourbakiste

Où sont les femmes ? (suite)

Tel père, telle fille... Emmy Nœther

Emmy Nœther (1882-1935), est fille d'un mathématicien d'Erlangen. Obligée de suivre en auditeur libre les cours universitaires de son père – les filles n'ont pas encore droit de cité à l'Université –, elle obtient cependant en 1921 un poste modestement rétribué de professeur associé (non officiel) à l'Université de Göttingen. Démise de ses fonctions par les lois raciales de 1933, elle s'exile aux États-Unis. Son œuvre eut un grand retentissement, développant la théorie des anneaux et des idéaux, reformulant la géométrie algébrique. L'originalité de son enseignement – dispenser ses théories au fur et à mesure de leur conception – permit à Van der Waerden et Dedekind – qui suivaient ses cours – de devenir célèbres. Les étudiants qui pratiquent aujourd'hui les anneaux noetheriens savent-ils que ces derniers doivent leur nom à une femme ?

Sophie Germain alias Monsieur Le Blanc

Heureusement pour elle – et les mathématiques – Sophie Germain (1776-1831) put mener à bien ses recherches tout au long de sa vie grâce à la fortune de son père, commerçant aisé. Elle vint aux mathématiques par dégoût pour le « Newtonianisme des Dames » d'Algarotti, censé expliquer aux marquises par les lois de la réfraction pourquoi on augmente la dose de rouge à lèvres pour aller à l'Opéra. Suivre le cours de Lagrange à l'École Polytechnique lui est refusé ? Qu'à cela ne tienne, elle entre en relation épistolaire avec le mathématicien sous le pseudonyme de Monsieur Le Blanc. Son audace scientifique lui vaut d'ailleurs les compliments de Gauss. Rapidement appréciée, elle reçoit en 1816 le Grand Prix des Sciences Mathématiques de l'Académie des Sciences de Paris. Outre ses travaux sur le mode vibratoire des surfaces, elle nous laisse le « théorème de Sophie Germain », qui permit à l'époque de progresser dans la démonstration du théorème de Fermat en réduisant les cas à envisager. On peut le généraliser ainsi : « Si n est premier impair et si $2n + 1$ est premier, $x^n + y^n = z^n$ implique que x, y ou z est divisible par n ».

Depuis, les nombres premiers n tels que $2n + 1$ soit aussi premier sont appelés « nombres premiers de Sophie Germain ». On ne sait pas s'il y en a une infinité, et on ne vous demandera pas le dernier trouvé. C'est $3905 \times 2^{6001} - 1$ (Keller, 1986).

par Hervé Lehning

Numérologie : la tentation ésotérique

De même que « scientologie », « numérologie » est un mot d'origine récente. Ce qu'il désigne est toutefois beaucoup plus ancien, aussi ancien que le besoin de l'homme de comprendre même quand il n'y a rien à comprendre.

Quelle définition donner à la numérologie ? La plus simple est sans doute la suivante : *la numérologie est l'étude du sens occulte des nombres et de leur influence sur la vie humaine.*

Avant de voir les derniers progrès de cette science divinatoire, voyons sa grande tradition. Tout est dans votre nom. Des valeurs numériques sont attribuées à chaque lettre. En les ajoutant, on arrive au nombre qui vous caractérise. Il ne reste plus qu'à interpréter celui-ci. Disons-le de suite, certains sont mauvais, très mauvais, et le pire est bien sûr le nombre 666.

Le chiffre de la bête

Ce nombre se trouve dans le *livre des révélations* de Jean (Apocalypse en grec) à la fin du chapitre 13 :

C'est le moment d'avoir du discernement : celui qui a de l'intelligence, qu'il interprète le chiffre de la bête, c'est un chiffre d'homme : et son chiffre est six cent soixante-six.

Nous ne discuterons pas de l'intention de l'évangéliste. Peut-être voulait-il coder un message trop dangereux. Certains disent qu'il faisait référence ainsi à l'empereur Néron. C'est tout à fait possible mais importe finalement peu, intéressons-nous plutôt à l'histoire de ce nombre au deuxième millénaire.

Des comptes à dormir debout

Pour diverses raisons, un certain nombre de mathématiciens se sont essayés à retrouver ce nombre 666 chez des personnages célèbres.

Voyons quelques exemples remontant au joli temps des guerres de religion. Michael Stifel, inventeur des logarithmes indépendemment de Napier, montra que 666 désignait le pape de l'époque, Léon X. Voyons son raisonnement. Tout d'abord, écrivez le nom du pape de la façon suivante :

LEO DECIMVS

mais ne retenez que les lettres ayant un sens dans le système numérique des romains, c'est-à-dire LDCIMV. Maintenant ajoutez X parce que LEO DECIMVS a dix lettres et enlevez le M car c'est l'initiale du mot « mystère ». Vous obtenez LDCIXV. Réarrangez tout cela et vous obtenez

DCLXVI c'est-à-dire 666 ! Élémentaire, n'est-ce-pas ?
John Napier lui-même ne fut pas en reste et montra par une autre méthode que 666 désignait bien ce pape. Réponse du berger à la bergère, un père jésuite montra alors qu'il désignait en fait Martin Luther. Son raisonnement étant plus proche du classicisme numérologique, nous le donnons ici. Pour notre jésuite, les lettres A à I représentaient les nombres 1 à 9, les lettres de K à S les nombres 10 à 90 (de dix en dix) et les lettres de T à Z les nombres de 100 à 500 (de cent en cent). Ecrivez alors :

M	A	R	T	I	N	L	U	T	E	R	A
30	1	80	100	9	40	20	200	100	5	80	1

Ajoutez le tout et vous obtenez 666. Rendons à ce brave père jésuite l'hommage qu'il mérite car il fallait y penser. Durant la première guerre mondiale, on découvrit de même que 666 représentait l'empereur Guillaume II. Vous aurez deviné qui il désignait pendant la seconde. Et oui, si A vaut 100, B 101, etc. DCLXVI se prénomme Adolf.
Comme souvent en matière d'occultisme, l'exercice reste en général bon enfant. À condition de ne pas y croire, il est à ranger dans les divertissements de l'esprit comme les mots croisés. Le lecteur intéressé pourra s'amuser à chercher la règle attribuant le nombre 666 au président actuel de la république française ou au roi des belges. L'usage du code ASCII n'est pas interdit.

La fin du monde

L'affaire se corse quand il se trouve des gens assez crédules pour laisser influencer leur vie par de telles balivernes. Malgré ses qualités de mathématicien, Michael Stifel semblait croire à ses petits comptes. Il prophétisa ainsi la fin du monde pour le 3 octobre 1533. Apparemment, il était excellent prédicateur car, en prêchant dans les campagnes, il réussit à convaincre de nombreux paysans de quitter leur terre. Rien ne se produisit le jour dit et Stifel, dut se réfugier en prison pour échapper à la colère de ceux qui avaient cru en lui. Nous aimerions pouvoir sourire de la naïveté de ces braves paysans si des exemples récents ne montraient tout le pouvoir de nuisance de ceux qui jouent avec la crédulité humaine.

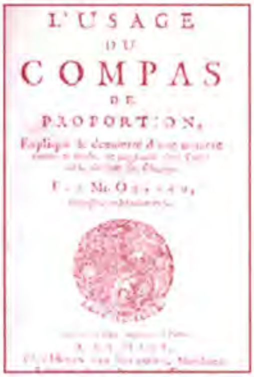
Développements actuels

Selon les numérologues modernes, le nom et le prénom constituent le bagage personnel de chacun. Ils renferment les tendances de l'être, ses carences et ses forces. La date de naissance, quant à elle, détermine les cycles de l'existence, leur influence dans chaque domaine et leur durée. La numérologie est fondée sur ces deux données. Aucun autre renseignement n'est nécessaire à un numérologue pour déterminer, dans les grandes lignes, ce que nous sommes, nos potentialités, la tournure que peuvent prendre nos rêves et nos désirs secrets, la nature et la compréhension de nos problèmes. À croire ces lignes, un nom et une date sont plus déterminants sur notre être que notre code génétique. En quoi, quelques symboles alphanumériques dépendant de choix artificiels (écriture et calendrier) et de plus différents dans chaque civilisation pourraient-ils influencer nos potentialités ? Tout ceci serait sans grande conséquence si la numérologie restait cantonnée à la sphère privée. On frémit en constatant que ce n'est pas le cas. Elle commence à être utilisée pour le recrutement du personnel dans les entreprises et l'orientation professionnelle. Il importe donc de dire que la numérologie tient de l'occultisme, pas de la science.

H.L.

Jacques Ozanam

Jacques Ozanam (1640-1717) se consacra aux mathématiques après des études de théologie. Il aimait à dire qu'il fallait laisser les docteurs de la Sorbonne argumenter, le pape en décider et le mathématicien aller au paradis par un chemin perpendiculaire. Après avoir amélioré les tables de logarithmes de Briggs, son manuscrit *Les six livres de l'Arithmétique de Diophante augmentés et réduits à la spécieuse* reçut les félicitations de Leibniz. Il consacra sa vie à l'enseignement et publia un grand nombre d'ouvrages parmi lesquels *Méthode générale pour tracer des cadrans* (1673), *Traité des lignes du premier genre* (1687), *De l'usage du compas* (1688), *Dictionnaire mathématique* (1691), *Traité de la fortification* (1694), … Mais son nom est passé à la postérité pour ses *Récréations mathématiques et physiques* (1694), ouvrage qui fut augmenté et révisé par Jean Étienne Montucla en 1778.



Un problème d'Ozanam

La moyenne harmonique $H(x, y)$ de deux nombres non nuls x et y est l'inverse de la moyenne arithmétique des inverses de x et y :

$$H(x,y) = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} = \frac{2xy}{x+y}.$$

Ozanam demande de construire un carré « magique » 3 × 3 où les nombres figurant dans les cases marquées d'une croix sur la figure sont la moyenne harmonique des nombres appartenant aux cases adjacentes.

	×	
×	×	×
	×	

Voici la solution générale proposée par Ozanam accompagnée d'une solution entière :

x	$\frac{2xz}{x+z}$	z
$\frac{2xy}{x+y}$	$\frac{2yz}{y+z}$	$\frac{2xyz}{2xy+xz-yz}$
y	$\frac{2xyz}{2xz+xy-yz}$	$\frac{xyz}{xy+xz-yz}$

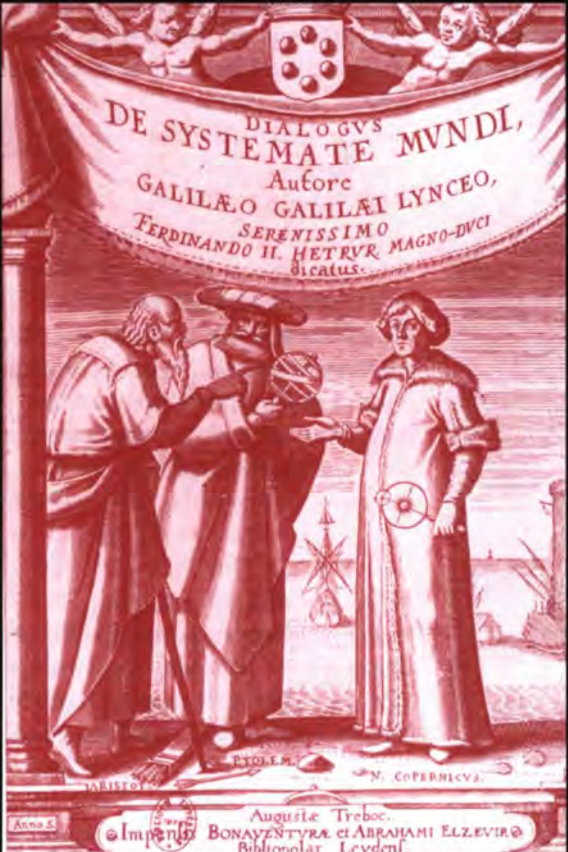
1260	840	630
504	420	360
315	280	252

Jean Étienne Montucla

Jean Étienne Montucla (1725-1799), ami de Diderot et d'Alembert, développa le livre de récréations mathématiques d'Ozanam en lui adjoignant de nombreux problèmes de découpages géométriques.

Il est célèbre pour son *Histoire des mathématiques*, ouvrage réédité par les Éditions Gabay (4 tomes).

Histoire des idées époque classique



Depuis l'Antiquité, les physiciens ont voulu connaître les causes des phénomènes. L'attitude de Newton consiste à les décrire de façon à pouvoir les prévoir sans se soucier de savoir l'origine des lois qu'il découvre. Cette description repose sur le calcul infinitésimal. Celui-ci péchait par le flou de la notion d'infiniment petit. Jugée non rigoureuse, elle fut évacuée par Cauchy pour n'être réintroduite que très récemment dans l'analyse non standard de Robinson.

Evariste Galois est souvent présenté comme l'exemple même du génie méconnu. Mythe ou réalité ? Découvrons comment Galois apporta une contribution majeure aux mathématiques de son temps et de ceux qui suivirent.

par Chérif Zananiri

Newton...

et la physique devint mathématique

Newton a bouleversé la conception de la physique. Depuis l'antiquité, les physiciens voulaient connaître les raisons des phénomènes. Newton se contente de les décrire de façon à pouvoir les prévoir sans se soucier de savoir l'origine des lois qu'il découvre. La recherche du « comment » a chassé celle du « pourquoi ».

Isaac Newton (1642-1727)

Les mythes ont la vie dure, et on ne prête qu'aux seuls gens célèbres les légendes les plus tenaces. C'est Stuckeley, qui le premier lance celle de la « pomme de Newton ». Une pomme qui symbolise les relations entre les mathématiques et la physique.

La légende de Newton

À l'époque, vers les années 1684, de grands esprits tels Hooke – et Halley, dont une comète porte le nom – pressentent que le Soleil attire les planètes suivant une force en $1 / r^2$, mais il leur manque les preuves et les outils mathématiques. C'est Newton qui met tout sur pied. Il sait, même s'il ne l'a pas publié, que pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est centripète et qu'elle vaut $a = v^2 / \mathrm{R}$, v vitesse et R rayon de la trajectoire.

Comme une pomme, attirée par les forces de la pesanteur, tombe sur le sol, la Lune tombe sur la Terre. Suivons le raisonnement de Newton. D'abord, Newton connaît la durée de révolution T de la Lune (environ 27 jours), et la distance Terre-Lune R (environ 60 fois le rayon de la Terre).

D'où l'accélération centripète a :

$$a = v^2 / \mathrm{R} = 4\pi^2 \mathrm{R} / \mathrm{T}^2$$

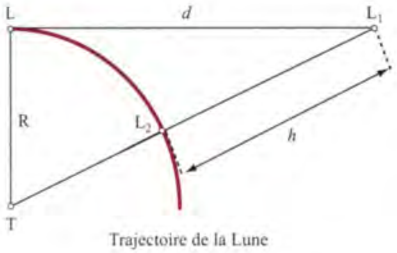
Par ailleurs, les lois de Kepler, connues empiriquement, lient la durée de révolution T et le rayon de l'orbite R par la relation : $\mathrm{T}^2 = \mathrm{C}\,\mathrm{R}^3$ où C est une constante. Ceci conduit à :

$$a = k / \mathrm{R}^2$$

avec k une nouvelle constante.
Ainsi, la force de gravitation, proportionnelle à l'accélération est en « inverse carré ». Il reste à vérifier le résultat. Détaillons l'argument de Newton.

Si la Lune n'était pas attirée par la Terre, elle aurait un mouvement recti-

ligne uniforme, « elle irait tout droit ». Sa trajectoire courbe (circulaire) montre que tout se passe comme si elle tombait sur Terre. C'est d'ailleurs là, le tour de force de Newton, que de voir cette chute, que nul n'avait pressentie avant lui.
Ainsi, en l'absence de la Terre, la Lune



Trajectoire de la Lune

aurait parcouru le segment LL_1. À cause de l'attraction terrestre, la Lune tombe de L_1L_2, segment que nous allons évaluer.
Du triangle TLL_1, nous tirons :

$$(R + h)^2 = R^2 + d^2$$

avec $d = LL_1$ d'où $2Rh + h^2 = d^2$ donc
$$h \sim d^2 / 2R.$$
Or la distance d que la Lune aurait dû parcourir pendant le temps t est telle que : $d = vt$, avec : $d = (2\pi R / T)\, t$. Il est à noter qu'ci Newton assimile le mouvement à vecteur vitesse constante au mouvement circulaire uniforme dont seule la norme de la vitesse se conserve. Il arrive donc à :

$$a = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \text{ d'où } h = \frac{1}{2}\, a\, t^2$$

Il est possible alors que pour expliquer son travail, Newton ait eu recours à l'image de la pomme. Ainsi est née une légende. Le travail de Newton, et c'est là l'essentiel, était conforme aux résultats expérimentaux obtenus par Galilée lors de son étude de la chute libre des corps sur Terre.

La Lune tombe sur la Terre. Le tour de force de Newton fut de voir cette chute que nul n'avait pressentie avant lui.

Réfléchissons un peu au travail de Newton et à sa loi qu'il étend à tous les systèmes, et en particulier au système solaire, ouvrant la voie à la découverte des planètes (à son époque, elles n'étaient pas toutes connues), et à la compréhension des trajectoires et des périodicités de passage des comètes. Newton manipule des entités ayant une réalité physique (la Terre, la Lune) avec des concepts clairement définies accessibles à un non spécialiste (l'accélération, la vitesse, la distance parcourue, la durée de chute), et utilise des bases géométriques simples (le cercle, sa tangente, un rayon de cercle) : il s'agit d'un vrai travail de physicien.

Isaac Newton naquit le jour de Noël 1642. De famille humble, il se montra très inventif dès son enfance. Il entra à l'université de Cambridge en 1660. Son professeur et ami Isaac Barrow sera déterminant dans sa formation. Newton maîtrisa rapidement les mathématiques de son époque. Mais la grande peste (1665-1666) l'obligea à retourner dans son village natal de Woolsthorpe, ce qui lui donne du temps pour ses recherches mathématiques et physiques.

Et quelles recherches ! Lois du mouvement des astres (attraction universelle), loi de l'optique sont brillamment abordées et Newton découvre le calcul différentiel (rien que ça) grâce à sa méthode des fluxions.
A ce sujet, Newton et Leibniz se querelleront violemment sur la paternité de l'invention du calcul infinitésimal jusqu'à la fin de la vie du mathématicien allemand.
La disparition de Newton le 20 mars 1727 provoque un deuil rarement égalé en Angleterre. Il est inhumé à l'abbaye de Westminster.

De la vitesse à la dérivée

Le chemin qui mène de Galilée à Newton est celui, entre autres, qui permet de définir la dérivée à partir de la vitesse. Jusqu'à Newton, l'idée de vitesse est vague et imprécise, plus qualitative que quantitative. Le mot « veloceta » qui recouvre ce que nous entendons par vitesse instatanée n'est jamais défini. Il faut attendre 1700 pour en trouver chez Varignon une définition rigoureuse. Galilée ne manipule pas directement des vitesses variables mais utilise un artifice « le théorème du degré moyen » pour ramener les mouvements uniformément accélérés à des mouvements uniformes.

Avec Torricelli, la physique se fait géométrie. Torricelli crée des êtres mathématiques nouveaux, de nouvelles courbes pour y appliquer les résultats de Galilée, il se sert de mouvements fictifs pour déterminer les tangentes aux courbes décrites. Fermat fut le premier à définir la tangente comme position limite d'une sécante mais Fermat abuse des « accroissements infinitésimaux ». L'Anglais Isaac Barrow rapproche le procédé de Fermat de la théorie moderne de la dérivation en introduisant l'équivalent des « accroissements finis ». Newton qui succède à Barrow à la chaire de mathématiques de Cambridge, a un point de vue plus physique. Il introduit o, quantité infinitésimale et la notation xo pour désigner la variation de l'abscisse ; il constate que la vitesse de variation de l'aire décrite par la courbe est égale à l'ordonnée y. Les variations des coordonnées des points de la courbe sont notées xo et yo.

Dans sa célèbre « méthode des fluxions », Newton ne calcule pas exactement la dérivée mais le rapport des composantes de la vitesse. On doit cependant noter que Newton place la dérivée au cœur de sa démarche, établissant le lien entre quadrature et dérivation.

Le ressort de Hooke

Hooke est un scientifique contemporain et ami de Newton, et qui le premier se rend compte de la proportionnalité entre l'allongement d'un ressort et la force qui le tend ; il arrive à la relation bien connue $F = kx$. Ainsi, si pour une force de 1 newton, le ressort s'allonge de 1 cm, pour 2 newtons l'allongement sera du double. Bien sûr nous parlons d'objets matériels, et en ce sens on peut considérer que nous faisons de la physique (un peu simple), mais peut-on qualifier de mathématique les calculs sous-jacents ? La réponse est positive. Toute modification de la position d'équilibre implique une équation différentielle dont les solutions sont périodiques. La situation physique la plus simple est riche de mathématiques élaborées.

Les lois de Newton

Revenons aux lois de Newton. Notre homme montre en un premier temps que l'accélération est en $1 / r^2$ et correspond à une force centripète. Comment étudier le mouvement des corps soumis à une telle force ? Newton, toujours lui, sait que la somme des forces appliquées s'écrit sous la forme du produit de la masse et de l'accélération ; il reste alors à résoudre l'équation qui traduit la proportionnalité vectorielle entre l'accélération et une force centripète en $1 / r^2$.
On peut tout de suite se rendre compte qu'à un instant donné, l'accélération est proportionnelle à $1 / r^2$, ce qui a pour effet de modifier la trajectoire, donc la valeur de r, donc en ricochet la valeur de l'accélération, et ainsi de suite. La relation est donc vérifiée à tout instant, seconde après seconde et à chaque position. Seules les mathématiques nous permettent de passer de cette évidence qualitative, à une idée précise de la trajectoire. Il est alors indispensable de mettre en œuvre des lois et des outils mathématiques performants ; passer de relations instantanées à une trajectoire, sous-entend la nécessité d'une intégration (au sens mathématique). Du reste l'énoncé lui-même : « deux corps en interaction newtonienne, agissent l'un sur l'autre, ce qui modifie leurs vitesses, et leur imprime une trajectoire telle que la force soit en inverse du carré de la distance qui les sépare », est mathématique ; ainsi on peut faire des mathématiques sans écrire d'équations, des maths avec des mots.
Pour aller plus loin, c'est-à-dire pour effectuer une prévision de la trajectoire, la résolution des équations devient nécessaire ; c'est d'ailleurs ce que Halley a fait pour identifier la trajectoire de « sa » comète.
Les équations scientifiques définissent des relations entre des mesures alors que les processus naturels renseignent sur les interactions entre systèmes et objets. Ces derniers sous-tendent une organisation très complexe qui fait intervenir plusieurs lois. Les équations mathématiques quant à elles, en dépit de leur éventuelle complexité apparente, sont simples, car elles se définissent en termes de variables et de paramètres clairement répertoriés et parfaitement séparables. Le physicien ne pourra donc jamais se séparer des mathématiques qui constituent pour lui un langage et un outil ; il ne faut pas qu'il se satisfasse d'une vision globale, intuitive, qualitative des choses, sinon son interprétation des phénomènes serait erronée.

C. Z.

Isaac Barrow, professeur et ami de Newton est né à Londres en 1630, mort à Cambridge en 1677. Il invente une méthode des tangentes (titre de l'un de ses livres) qui préfigure la notion de dérivée. D'autre part, il est le premier à remarquer les relations entre intégration et dérivation.

par Hervé Lehning

Les infiniment petits : actuels ou potentiels ?

Le calcul infinitésimal inventé par Leibniz péchait par le flou de la notion d'infiniment petit. Jugée non rigoureuse, elle fut évacuée par Cauchy pour n'être réintroduite que très récemment dans l'analyse non standard de Robinson.

Gottfried Leibniz

Les premiers calculs d'aires remontent à l'antiquité grecque et en particulier à Archimède. Celui-ci développe une méthode proche du calcul infinitésimal pour déterminer en particulier l'aire d'un segment de parabole (voir la figure). Sa méthode de calcul d'aire est proche de l'idée d'infiniment petit. Cependant, le passage au calcul intégral proprement dit demandait également une évolution du concept de nombre. Celle-ci a attendu le dix-septième siècle.

Méthode d'Archimède

Partant du segment de parabole de corde AB, Archimède considère les deux segments de parabole de corde AC et CB. Il démontre alors que l'aire de chacun des triangles correspondants à ces segments est égale au huitième de l'aire du triangle ABC soit $\mathcal{A}$.

Archimède utilise un raisonnement géométrique pour calculer une somme continuée à l'infini.

On obtient un polygone (voir la figure) approximant mieux l'aire cherchée que le triangle initial. Son aire est égale à

$\mathcal{A}$ multiplié par $1 + \frac{1}{4}$.

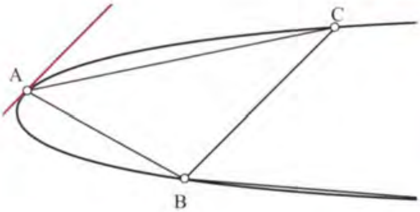
En recommençant le même procédé sur les nouveaux segments, on obtient un polygone approximant mieux le segment de parabole. Son aire est

égale à $\mathcal{A}$ fois $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}$.

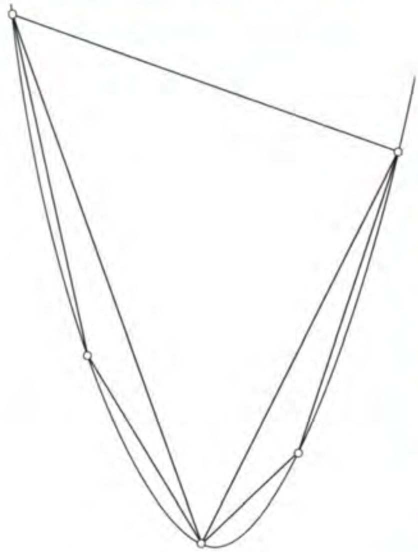
En continuant ainsi, on obtient une suite de polygones d'aires égales à $\mathcal{A}$ facteur de :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}.$$

Archimède utilise un raisonnement géométrique pour montrer que la somme ci-dessus continuée à l'infini

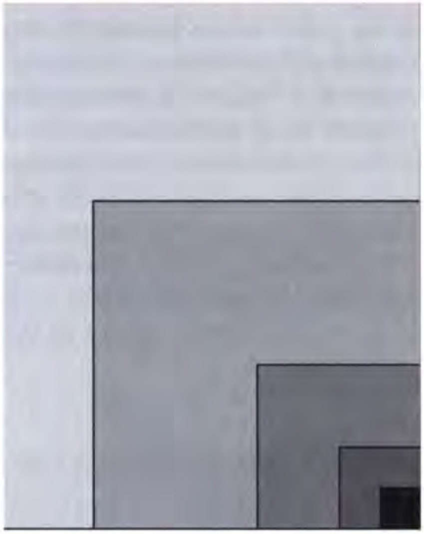


Un segment de parabole. Archimède a montré que l'aire du segment de parabole ABC (la partie grisée) est égale aux quatre tiers de l'aire du triangle ABC.



Deuxième polygone approximant le segment de parabole.

est égale à 4/3 (voir la figure).
Cette méthode fut réutilisée pour calculer certaines aires aux XV^e et XVI^e siècles en particulier par Cavalieri (1598-1647). Sa méthode nommée méthode des indivisibles consiste à découper une surface en éléments d'épaisseur « indivisible » mis en correspondance avec ceux d'une surface d'aire connue. Cette idée est donc une généralisation de celle d'Archimède faisant correspondre aux segments paraboliques précédents les « coins » composant finalement un carré d'aire connue (voir figure).



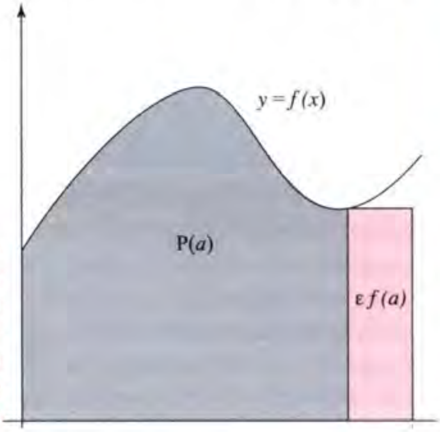
Calcul par Archimède de la somme 1 + 1/4 + 1/42 + ...
Les parties en forme de coin sur la figure ci-dessus sont homothétiques l'une de l'autre dans le rapport un demi. Leurs aires sont donc dans un rapport un quart. Elles s'emboîtent l'une dans l'autre pour former le carré dont l'aire est égale aux quatre tiers du premier « coin ».

Méthode de Newton

Pour Newton, une courbe est engendrée par le mouvement d'un point. Dans cette conception, une quantité variable (comme les coordonnées de ce point) est dite fluente. Sa vitesse instantanée est appelée sa fluxion. Ce vocabulaire qui peut sembler étrange

Leonhard Euler est né à Bâle en 1707 et mort à Saint Pétersbourg en 1783. Il a été élève de Johann Bernoulli. Il s'agit d'un mathématicien immense dont bien des travaux dépassent cet ouvrage.

de nos jours vient de la notion de flux (comme pour les marées). En notation moderne, il s'agit de la dérivée d'une fonction. En ce qui concerne le calcul d'aire, si une courbe a une équation $y = f(x)$ où f est positive, soit $P(a)$ l'aire sous la courbe entre les abscisses 0 et a (voir la figure). Newton montre que l'aire entre les abscisses a et $a + \varepsilon$ est approximativement égale à $\varepsilon f(a)$.



L'aire entre les abscisses a et a + ε vaut approximativement celle du rectangle grisé c'est-à-dire εf(a)

En termes modernes,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P(a+\varepsilon) - P(a)}{\varepsilon} = f(a).$$

Ainsi, l'intégration est l'opération inverse de la dérivation. Cette approche semble bien plus rigoureuse que celle de Leibniz car elle n'utilise pas la notion floue d'infiniment petit. Ceci dit, la lourdeur du calcul infinitésimal de Newton et son opposition à celui de Leibniz auront pour conséquence un retard d'un siècle dans les mathématiques anglo-saxonnes.

Pourquoi le calcul intégral ? Le terme est du mathématicien suisse Jakob Bernoulli en 1696 ; Leibniz aurait préféré au départ le terme calcul « sommatoire » mais a été convaincu par Bernoulli. Ce terme provient du latin integer « entier, total », probablement car une intégrale est le rassemblement (l'intégration !) d'une infinité de termes infinitésimaux en un tout.

Abraham Robinson est né en 1918 à Waldenburg (Allemagne) et mort en 1974 à New Haven (Etats Unis).
Sa famille émigra en Palestine en 1933. Il fut professeur en Israël avant d'occuper un poste aux Etats Unis.

Notations de Leibniz

De façon beaucoup moins rigoureuse que Newton en apparence, Leibniz utilise la notion d'infiniment petit. Si x est une quantité variable, il note dx un accroissement infinitésimal de cette quantité. Si une quantité y dépend de x, par exemple $y = x^2$, alors :

$$dy = (x + dx)^2 - x^2$$

or :

$$(x + dx)^2 = x^2 + 2xdx + (dx)^2$$

donc :

$$dy = 2xdx + (dx)^2$$

A ce niveau, Leibniz dit que le terme $(dx)^2$ est négligeable devant $2xdx$ et le considère tout simplement comme nul d'où :

$$dy = 2xdx$$

Le manque de rigueur annoncé se situe à ce niveau. A priori, une quantité est nulle ou ne l'est pas. Elle ne peut pas l'être quand on le désire et ne plus l'être quand on ne le veut pas. Cette difficulté fut levée par Cauchy au début du XIX^e siècle grâce à la notion de limite mais elle fit perdre la richesse intuitive de l'idée d'infiniment petit.

Elle évitait cependant bien des erreurs à ceux qui n'arrivaient pas à acquérir facilement l'intuition de ce qu'est un infiniment petit.

La difficulté ne fut résolue complètement que par Abraham Robinson dans la seconde moitié du XX^{e} siècle avec l'analyse non standard. Il nomma son invention ainsi par opposition à l'analyse classique qui se trouve donc considérée comme standard. Dans cette analyse (et d'autres), on manipule donc des infiniments petits « actuels » par opposition aux infiniments petits « potentiels » de l'analyse classique. Le mot potentiel signifie ici que, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$ envisagé, il existe des nombres strictement plus petits. Derrière cette idée, la notion de limite n'est pas loin.

La rigueur de Cauchy

Cauchy exclut l'idée d'infiniment petit actuel en précisant d'abord la notion de limite qu'il définit de la façon suivante :

« *Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres* ».

En termes plus précis et plus modernes, Weierstrass écrit :

Si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - a| < \delta$ implique $|f(x) - l| < \varepsilon$ alors on dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a.

Dans cette approche, la quantité ε n'est infiniment petite que potentiellement, c'est-à-dire qu'elle prend des valeurs aussi petites que l'on désire. C'est pourquoi, on parle parfois d'infiniment petit potentiel à l'opposé de la notion d'infiniment petit actuel. Une intuition correcte de ces derniers reste cependant délicate.

Ceci posé, il note Δx un accroissement de x et Δy l'accroissement correspondant de $y = f(x)$, c'est-à-dire :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

puis il considère le rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Si celui-ci a une limite quand Δx tend vers 0, cette limite est appelée la dérivée de y par rapport à x au point x.
Une autre approche :
Reprenons le cas précédent où $y = x^2$:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$$

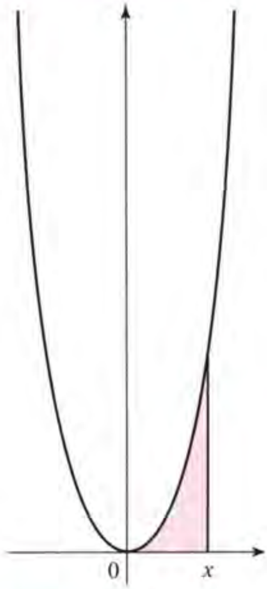
donc :

$$\Delta y = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$$

d'où :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

La limite du rapport est donc $2x$ qui est donc la dérivée de $y = x^2$.
Sur cet exemple, nous voyons donc la proximité des deux approches. Dans les exemples, la première est souvent plus manipulable.



Aire sous la courbe entre 0 et x

Augustin Cauchy est né à Paris en 1789 et mort à Sceaux en 1857.
Il est à l'origine de la réintroduction de la rigueur en mathématiques. Sa contribution est importante et parfois non reconnue en France dans certains milieux à cause de ses idées politiques ultra-monarchistes.
Il fut cependant assez grand mathématicien pour qu'on lui pardonne.

Johann Bernoulli est né comme son frère Jakob à Bâle en 1667 et mort dans la même ville en 1748. La famille Bernoulli a encore produit plusieurs grands mathématiciens.

Calcul d'aire

Pour donner un exemple simple d'application, il existe plusieurs façons de présenter le calcul de l'aire sous la courbe d'équation $y = f(x)$ où f est positive. La première a été déjà vue avec Newton. Elle consiste à relier la question à la notion de dérivée introduite par Cauchy. Il est également possible d'utiliser la notion d'infiniment petit. Si dx est infiniment petit, y reste constant entre x et x + dx donc l'aire correspondante dA est celle d'un rectangle de côtés dx et y donc d$A = y$ dx.

On retrouve le résultat : A est dérivable et a pour dérivée y.
On peut reprendre le calcul de l'aire du segment de parabole à la lumière de ce résultat.

L'équation de la parabole dans un repère orthonormal est $y = p\,x^2$.
L'aire A(x) entre les abscisses 0 et x vérifie donc A(0) = 0 et A′ (x) = $p\,x^2$. Comme $(x + \mathrm{d}x)^3 = x^3 + 3x^2\mathrm{d}x$, nous en déduisons que :

$$\mathrm{A}(x) = \frac{px^3}{3}.$$

L'aire du segment de parabole entre les abscisses a et b est donc égale à :

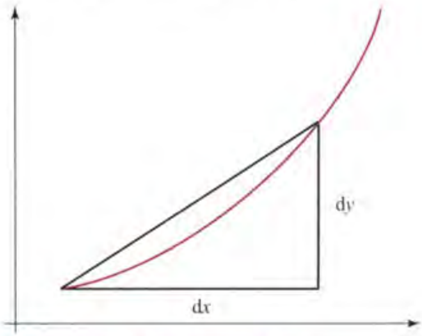
$$\frac{p}{3}(b^3 - a^3).$$

Il ne reste plus qu'à calculer l'aire du triangle pour retrouver le résultat d'Archimède.

Jakob Bernoulli est né à Bâle en 1654 et mort dans la même ville en 1705. On lui doit très probablement le terme de calcul intégral qui vient du latin médiéval integralis signifiant entièrement. L'idée est qu'ici d'une somme d'infiniment petits, on obtient le tout. On lui doit aussi les fonctions exponentielles.

Calcul d'une tangente

Le calcul infinitésimal ne sert pas qu'à déterminer des aires. Il permet également de trouver la tangente au point courant à la courbe d'équation $y = f(x)$.

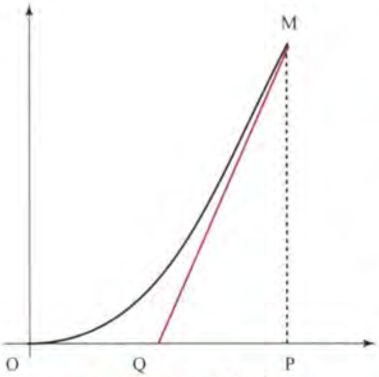


Tangente à une courbe

Intuitivement, la tangente en un point x à une courbe $y = f(x)$ est la droite à laquelle elle se confond au voisinage de ce point. Elle passe donc par les points de coordonnées (x, y) et $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$, elle a donc pour vecteur directeur, le vecteur de coordonnées (dx, dy).
Dans le cas de la parabole d'équation $y = p\,x^2$, cela donne donc la droite de vecteur directeur (dx, $2px$ dx). Une équation en est : $(\mathrm{Y} - y)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{X} - x)\,2px\,\mathrm{d}x$ soit, après calculs simplificateurs :

$$\mathrm{Y} = px\,(2\mathrm{X} - x).$$

On en déduit que la tangente passe par le point de coordonnées ($x/2$, 0) ce qui donne une façon de la construire (voir la figure ci-après).



Tangente à la parabole. Le point Q est le milieu de [OP]

Dans ce cas encore, Leibniz modifie légèrement la définition intuitive de la tangente. Il la définit comme une limite. Il considère un point A fixé d'une courbe et M un point variable. Si la droite AM a une position limite quand M tend vers A en restant sur la courbe, cette position est

dite la tangente en A à la courbe.

Exploitation

Dès le XVIII^{e} siècle, les mathématiciens exploitèrent le nouveau calcul pour obtenir les principaux résultats que l'on peut en déduire. Par exemple, les frères Bernoulli étudièrent le problème de la courbe brachystochrone.
Il s'agit de trouver la courbe joignant deux points assurant la descente la plus rapide possible entre ceux-ci d'un point pesant assujetti à rester le long de cette courbe.
La réponse est un arc de cycloïde, c'est-à-dire la courbe engendrée par un point d'un cercle roulant sans glisser sur une droite.

H. L.

par Hervé Lehning

Évariste Galois : génie méconnu ?

Évariste Galois est souvent présenté comme l'exemple même du génie méconnu. Mythe ou réalité ? Et pour commencer, quelle est la contribution majeure de Galois aux mathématiques de son temps et des temps qui suivirent ?

Galois a précisé les travaux de Niels Abel en trouvant une condition pour qu'une équation soit résoluble par radicaux.

La mort en duel d'Evariste Galois a beaucoup contribué à l'image romantique qu'il a laissée. S'agit-il d'un suicide déguisé comme l'affirment certains, d'une aventure sentimentale se terminant mal ou bien encore d'un règlement de compte politique ? Difficile de le savoir avec certitude et qu'importe pour notre propos ? Le lecteur intéressé pourra cependant consulter l'ouvrage de Robert Bourgne et Jean Pierre Azra cité en référence.

Équation soluble par radicaux

Galois s'est essentiellement intéressé à la résolution des équations par radicaux. Dire qu'une équation est soluble par radicaux, c'est dire que ses racines s'expriment à l'aide des coefficients de l'équation, des quatre opérations et de radicaux.

Par exemple, l'équation du second degré $x^2 - 2x - 1 = 0$ a pour racines $1 \pm \sqrt{2}$.

De même, l'équation générale du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a pour racines

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

où Δ s'exprime à l'aide des coefficients de l'équation et des quatre opérations. Plus précisément : $\Delta = b^2 - 4ac$ et le symbole $\sqrt{\Delta}$ désigne une quelconque des racines du nombre Δ.

En ce qui concerne les équations générales, on sait également résoudre par radicaux les équations du premier degré, du troisième et du quatrième. Dans les deux dernier cas, ce n'est pas si simple comme le montre l'article sur la question dans ce numéro.

Après que bien des mathématiciens aient cherché à résoudre l'équation générale du cinquième degré, Abel (1802-1829) a démontré que c'était impossible. Galois a précisé ses travaux en trouvant une condition pour qu'une équation soit soluble par radicaux.

Théorie des groupes

La condition pour qu'une équation soit soluble par radicaux n'est pas facile à exprimer directement en termes élémentaires. C'est pour cela d'ailleurs que Galois est à l'origine d'une nouvelle théorie. Pour parler de choses nouvelles, il faut souvent des mots nouveaux. Cela ne veut pas dire que l'on ne puisse pas approcher cette notion en termes simples.

La condition de Galois porte sur certains groupes de substitutions des racines de l'équation considérée. Pour expliquer ceci, prenons un exemple. Les trois lettres *abc* peuvent être écrites de six façons différentes : *abc*, *bca*, *cab*, *bac*, *acb* et *cba*. Ce sont les permutations de *abc*. Les substitutions sont le passage d'une permutation à l'autre. Il y en a également six et on les note comme les permutations. Par exemple *bca* signifie que l'on substitue b à a, c à b et a à c.

Fonction des racines

Ceci dit, Galois considère les fonctions rationnelles des racines et de certaines quantités adjointes éventuellement. Plus précisément, ces quantités adjointes peuvent être des radicaux ou des racines d'autres équations. Si une telle fonction V ne change pas de valeur quand on opère une substitution S des racines, on dit qu'elle est invariable par S.

Par exemple, $V = ab + c$ est invariable par les substitutions *abc* et *bac* (on échange a et b ce qui ne modifie pas le produit ab).

On démontre que si une telle fonction est invariable par toutes les substitutions alors elle s'exprime rationnellement en fonction des coefficients de l'équation.

Par exemple, considérons la fonction :

$$V = a^2 + b^2$$

où a et b sont les racines de l'équation :

$$x^2 + px + q = 0.$$

On peut écrire V sous la forme suivante :

$$V = (a + b)^2 - 2ab$$

or, en remarquant que

$$x^2 + px + q = (x - a)(x - b),$$

en effectuant le produit et en identifiant, on montre que :

$$a + b = -p \text{ et } ab = q$$

donc :

$$V = p^2 - 2q.$$

Ceci signifie que V s'exprime rationnellement (c'est-à-dire en n'utilisant que les quatre opérations) en fonction des coefficients p et q de l'équation. En fait, ce résultat est général. Si une fonction des racines est invariante par toute substitution de ces racines, elle s'exprime rationnellement en fonction des coefficients de l'équation.

Groupe d'une équation

Galois a montré que ce fait se généralisait d'une certaine façon en réduisant l'ensemble de toutes les permutations à un groupe d'entre elles qu'il appelle groupe de l'équation. Voici son résultat :

Si une fonction des racines est invariable par toutes les substitutions de ce

Évariste Galois, est né à Paris le 25 octobre 1811 et décédé toujours à Paris le 31 mai 1832.
La vie de Galois fut dominée par la politique et les mathématiques. Il était dans une position inconfortable. Le seul mathématicien français capable de comprendre ses travaux était Cauchy, royaliste tout aussi ardent que lui était républicain.
En 1829, il publia une démonstration prouvant l'impossibilité de résoudre l'équation générale du cinquième degré par radicaux. Cela conduisit à la théorie de Galois, une branche des mathématiques traitant en particulier de la résolution des équations algébriques. Il découvrit également une méthode déterminant quand une équation pouvait être résolue par radicaux apportant ainsi une réponse à des problèmes fort anciens tels que la trisection de l'angle et la duplication du cube.
Il introduisit le mot « groupe » en considérant le groupe de permutations des racines d'une équation. C'est la théorie de groupes qui rendit possible la synthèse de la géométrie et de l'algèbre.
Après avoir passé quelque temps en prison pour « délits » politiques, il fut tué en duel à l'âge de 21 ans peu après sa remise en liberté.

groupe alors on peut l'exprimer rationnellement en fonction des coefficients et des quantités adjointes éventuelles.

Pour commencer, on voit qu'un tel groupe, notons le G, possède plusieurs propriétés, entre autres :
1) l'identité I c'est-à-dire la substitution qui laisse invariantes toutes les racines, appartient à G,
2) si S et T appartiennent à G alors $S \circ T$, c'est-à-dire la substitution obtenue en effectuant successivement T et S, appartient aussi à G.

Prenons le cas de notre première équation :

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Si nous appelons a et b les deux racines, il n'y a que deux substitutions possibles ab et ba.
Les deux groupes possibles sont donc $\{ab\}$ et $\{ab, ba\}$.

Supposons que le groupe G de l'équation (sans quantités adjointes) soit réduit à $\{ab\}$. Les expressions $V = a$ et $V = b$ sont alors invariables par tous les éléments de G. D'après le théorème, on en déduit qu'elles s'expriment rationnellement en fonction des coefficients de l'équation. C'est faux, $G = \{ab, ba\}$.
Si on adjoint la quantité $\sqrt{2}$ alors c'est vrai donc $G = \{ab\}$.

De façon générale, si le groupe d'une équation est réduit à l'identité alors, pour toute racine a, l'expression $V = a$ est invariable par tous les éléments de G donc a s'exprime rationnellement en fonction des coefficients et des quantités adjointes. Le calcul du groupe d'une équation est donc essentiel pour répondre à la question posée.

Les travaux de Ruffini, d'Abel et de Galois ne mirent pas fin à l'étude de la résolution des équations algébriques. Parallèlement à la recherche d'algorithmes toujours plus puissants de résolution numérique, on mit en œuvre de nouveaux outils pour étendre le domaine de « solvabilité ».

Charles Hermite parvint ainsi en 1858 à résoudre l'équation générale du cinquième degré à l'aide de fonctions elliptiques :
à partir de la recherche de la longueur d'un arc d'ellipse, on est amené à considérer l'intégrale


Charles Hermite

$$E(u) = \int_0^u \frac{dx}{(\sqrt{1 - x^2})(\sqrt{1 - e^2x^2})},$$

où e désigne l'excentricité de l'ellipse.

Sous des conditions convenables, la fonction réciproque E^{-1} permet de définir un certain type de fonctions elliptiques. Comme

$$\text{Arcsin}\, x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}},$$

on voit que les fonctions elliptiques sont à l'ellipse ce que les fonctions trigonométriques sinus et cosinus sont au cercle.

Calcul du groupe

Bien entendu, ce théorème n'a d'intérêt pratique que si on est capable de calculer le groupe d'une équation sans déterminer les quantités adjointes. La question est bien plus délicate, nous ne l'aborderons donc pas ici.

H. L.

par Gilles Cohen

Petite histoire des récréations mathématiques

Les jeux et les mathématiques entretiennent des relations privilégiées depuis leurs origines, qui remontent à la nuit des temps. Mais c'est au deuxième millénaire que les mathématiciens ont pris conscience du côté ludique de la recherche mathématique. Peut-être avaient-ils besoin de mettre en avant cet aiguillon pour renouer avec un intérêt perdu depuis de nombreux siècles.

Les Arabes, les premiers de notre millénaire à s'intéresser aux mathématiques, nous ont transmis les écrits grecs à l'aide de force jeux, devinettes, défis, poèmes à contenu scientifique, qui décrivaient aussi l'enrichissement qu'ils en ont fait. Dans le numéro exceptionnel de *Tangente* 74 consacré aux jeux mathématiques, Ahmed Djebbar raconte en détail comment les mathématiques de la tradition arabe médiévale ont exprimé leur intérêt pour des formes que l'ont pourrait qualifier de « peu sérieuses ». Les mathématiques y sont prétexte à problèmes liés à la religion, au commerce, voire à l'amour !

Dix siècles de défis

Du plaisir de chercher à celui de défier les autres, il n'y a qu'un pas, franchi dès l'Antiquité et largement emboîté par les mathématiciens de la fin du

Le défi de Newton

Dans son *Arithmetica Universalis* (1707), Isacc Newton propose le problème suivant :
Si a vaches tondent à ras l'herbe de b prairies en c jours,
si a' vaches tondent à ras l'herbe de b' prairies en c' jours,
si a''vaches tondent à ras l'herbe de b'' prairies en c'' jours,
quelle est la relation vérifiée par les neuf paramètres en jeu ?

Solution

Supposons que chaque prairie fournisse initialement la même quantité d'herbe M, que la pousse d'herbe m soit la même chaque jour dans chaque prairie et que chaque vache broute quotidiennement la même quantité Q d'herbe, alors

$$bM + cbm - caQ = 0$$
$$b'M + c'b'm - c'a'Q = 0$$
$$b''M + c''b''m - c''a''Q = 0.$$

Ce système linéaire n'est pas un système de Cramer (l'énoncé laisse entendre qu'il existe une solution non nulle), il s'ensuit que le déterminant associé au système est nul :

$$\begin{vmatrix} b & bc & ca \\ b' & b'c' & c'a' \\ b'' & b''c'' & c''a'' \end{vmatrix} = 0$$

Ceux qui ne connaissent pas les déterminants arriveront néanmoins par combinaisons et éliminations à la relation demandée :
$b''cc'(ab' - ba') + c''b''(bc'a' - b'ca) + c''a''bb'(c - c') = 0.$

Moyen-Âge et de la Renaissance. De grands mathématiciens se sont ainsi adonnés au plaisir de la joute mathématique. Léonard de Pise (1170-1250), qui allait devenir célèbre sous le nom de Fibonacci, ne s'est-il pas fait connaître lors d'une « dispute » mathématique organisée par Maître Giovanni de Palerme pour l'empereur Frédéric II ? François Viète (1540-1603) n'a-t-il pas résolu le défi « à tous les mathématiciens d'Europe » lancé par le Flamand Adrianus Romanus ? Blaise Pascal, quant à lui, organisa un véritable jeu primé autour de cinq problèmes. Personne ne répondit dans les temps pour remporter les deux prix de 40 et 20 pistoles qu'il avait mis en jeu. Le XVII^e^ siècle vit d'ailleurs de nombreux échanges sous forme de défis, en particulier entre Pascal, Fermat, Descartes, Mersenne... Et n'est-ce pas le grand Isaac Newton en personnes qui proposa le « casse-tête des 9 arbres » ? Au XVIII^e^ siècle, Euler imagina le problème des « 36 officiers » et jeta les bases de la théorie des graphes pour résoudre un autre casse-tête, celui des « sept ponts de Königsberg ». Au XIX^e^ siècle, Hamilton, Cayley, Bertrand puis Lucas perpétuèrent ces défis ludiques. Encore plus près de nous, Päl Erdosz (1913-1996) avait l'habitude, lors de ses conférences, de proposer des problèmes et d'offrir pour leur résolution de petites sommes — de l'ordre de 50 $

Jusqu'à l'aube du XX^e^ siècle, les grands mathématiciens s'adonnaient aux jeux mathématiques, et les problèmes ludiques nourrissaient la recherche fondamentale.

Fibonacci propose dans son ***Liber Abaci*** ce petit problème qui depuis a fait florès.
S'il faut 4 heures à un lion pour dévorer un mouton, 5 heures à un léopard et 6 heures à un ours, combien d'heures faudra-t-il aux trois animaux réunis pour mettre à mal un mouton ?

— qu'il payait de ses deniers quand on lui fournissait une solution acceptable.

L'avènement des ludographes

Jusqu'à l'aube du XX^{e} siècle, les grands mathématiciens s'adonnaient aux jeux mathématiques, et les problèmes ludiques nourrissaient la recherche fondamentale. C'est à cette période qu'on vit néanmoins un début de schisme entre mathématiques ludiques et mathématiques fondamentales. Quelques mathématiciens affichèrent un certain dédain pour les jeux, parallèlement à — ou à cause de — l'arrivée de nouveaux venus dans le monde des jeux mathématiques, et qu'ils n'étaient pas issus du sérail des chercheurs. Les premiers « ludographes », comme on les appelle, firent leur apparition à la fin du XIX^{e} siècle à la faveur d'un intérêt croissant du public, de livres ou de revues pour les « récréations mathématiques ». Dans le monde anglo-saxon, trois noms se détachèrent : Lewis Carroll, Sam Loyd, Ernest Dudeney. Parmi eux, seul l'auteur d' « Alice au pays des merveilles » était mathématicien, et encore n'était-il pas chercheur. Les deux autres, qui étaient autodidactes des mathématiques rivalisèrent, par rubriques de journaux interposées, de part et d'autre de l'Atlantique, se plagiant mutuellement, à tel point qu'on hésite parfois lorsqu'il s'agit d'attribuer la paternité de tel ou tel problème à l'un des deux. Une chose est sûre : ils bénéficièrent d'une popularité inouïe, vendant leurs productions à des millions d'exemplaires. Le coup médiatique —et commercial— le plus réussi fut sans nul doute celui du taquin. Sam Loyd promit une somme considérable à celui qui parviendrait à reconstituer l'ordre naturel des 15 premiers nombres dans ce puzzle où le 14 et le 15 avaient été inversés. Il ne prenait pas grand risque : la théorie de la parité des permutations permettait de montrer que le problème était impossible !

En langue française, à la même époque, parurent les œuvres d'Édiuard Lucas, qui, outre le fait de brosser un panorama complet des récréations mathématiques, apporta de nombreuses trouvailles, tant théoriques que ludiques. La « tour de Hanoï » reste sans aucun doute le plus célèbre de ses casse-tête.

Dans la première moitié du XX^{e} siècle, de nombreux spécialistes s'intéressèrent aux récréations mathématiques, au point que deux congrès f urent organisés : le premier à Bruxelles en 1935 par Maurice

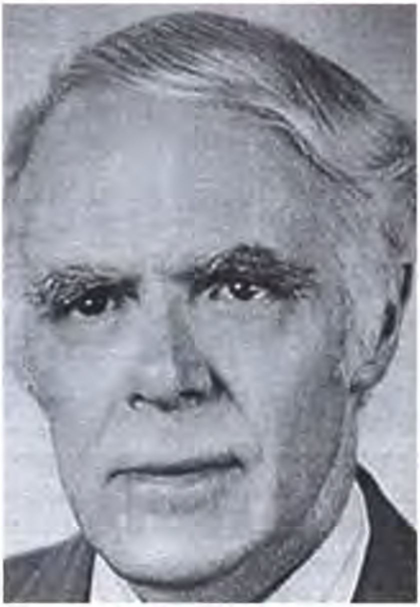
Lewis carroll

Kraïtchik, animateur de la revue « Le Sphinx », le deuxième à Paris en 1937 par André Sainte-Lagüe, responsable du département mathématique du Palais de la Découverte.

Martin Gardner

Une nouvelle vie fut insufflée après guerre aux récréations mathématiques, grâce avant tout à un homme, qui, bien que non mathématicien, popularisa les mathématiques plus efficacement que tous les mathématiciens réunis. Il s'agit de Martin Gardner, chroniqueur à la revue « Scientific American » (traduite en français sous le nom de « Pour la Science »), qui, par son génie fait à la fois d'imagination et de rigueur, les relations étroites et les échanges permanents qu'il a entretenus avec la communauté mathématique, fut à l'origine de nombre de vocations, tant en mathématiques que dans le domaine ludique, à commencer par celle de l'auteur de ces lignes.

D'autres vulgarisateurs de talent lui emboîtèrent le pas : Raymond Smullyan aux USA, Pierre Berloquin en France. La France fut même en pointe dans les années quatre-vingts, avec deux événements : la parution du



Martin gardner

magazine *Jeux & Stratégies*, qui fédéra autour de lui plusieurs centaines de milliers d'amateurs, et le lancement du Championnat International de Jeux Mathématiques (bientôt suivi par des rallyes régionaux et par le Concours Kangourou), point de départ d'une nouvelle vague de compétitions mathématiques qui ne s'est pas toujours démentie.

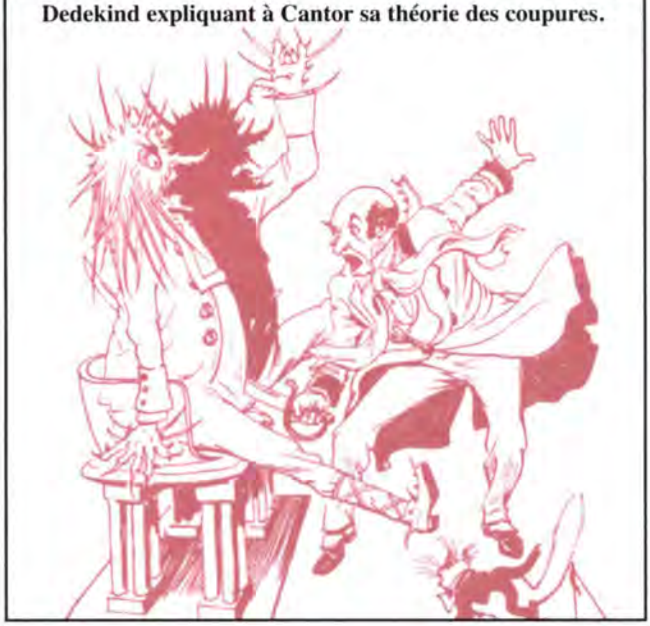
G. C.

par Benoît Rittaud

L'invention des nombres réels

Le dix-neuvième siècle est le siècle de toutes les remises en question mathématiques. Les fondements sur lesquels reposent les mathématiques ne semblent plus sûrs. Les nombres en particulier font l'objet de doutes.

Dedekind expliquant à Cantor sa théorie des coupures.



Les notions de continuité, de convergence ou de limite n'émergent qu'au début du dix-neuvième siècle, et c'est pour mieux comprendre ces notions difficiles qu'il faut préciser ce qu'on entend par nombre.

Au dix-neuvième siècle, les mathématiques semblent prendre l'eau de toutes parts. La géométrie d'Euclide, qui passait pour invulnérable, est attaquée, notamment par Riemann. La logique, qui n'avait plus fait parler d'elle pratiquement depuis Aristote, change de peau avec les travaux de Boole. Sans parler de la question des fondements, des bases de la science mathématique, qui semblent de moins en moins assurés. Et les nombres ne sont pas épargnés par cette vague de remise en question.

Un concept central

Il peut sembler curieux qu'un concept aussi central que celui de nombre ait mis si longtemps à être tiré au clair. Pour nous qui manipulons les nombres à longueur de journée, il y a de quoi se demander ce qu'ont bien pu faire les mathématiciens plutôt que d'essayer d'en dégager une notion claire le plus vite possible. Mais il faut comprendre que le besoin ne s'en était guère fait sentir. Les notions de continuité, de convergence ou de limite n'émergent qu'au début du dix-neuvième siècle, et c'est pour mieux comprendre ces notions difficiles qu'il faut préciser ce qu'on entend par nombre.

Tous les nombres ne posent pas les mêmes problèmes. Ce qui intéresse les mathématiciens comme Bolzano, Weierstrass, Méray, Cantor ou Dedekind est surtout de fonder une théorie qui bouche correctement les trous laissés par les nombres rationnels. On admet l'existence des nombres entiers (voire : on ne se pose pas la question), on en déduit une construction des nombres fractionnaires, et l'on cherche comment définir proprement les autres nombres, les "irrationnels" tels que $\sqrt{2}$ ou π (l'irrationalité de ce dernier est connue depuis le dix-huitième siècle).

Historiquement, les choses se déroulent selon une chronologie quelque peu désordonnée : c'est en 1872 que Dedekind propose ses célèbres "coupures" (que nous verrons plus loin), donnant une première définition "acceptable" des nombres réels, alors qu'il faut attendre 1892 pour que Peano propose une première axiomatisation de l'ensemble des entiers naturels. Les nombres complexes, entités algébriques étudiées depuis la Renaissance et englobant entre autres les réels, étaient, eux, clairement définis dès le début du dix-neuvième siècle, avec notamment les travaux de Gauss. Clairement définis, pour peu tout de même que l'on s'accorde sur la définition d'un nombre réel…

Définition des nombres réels

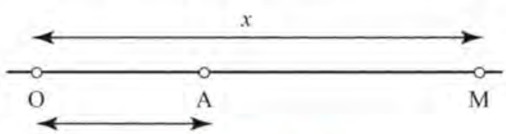
À l'époque, il n'est plus question de faire appel à la géométrie. Cette discipline, après avoir régné en maître sur toutes les mathématiques, avait déjà perdu de sa superbe. Depuis le dix-septième siècle, l'arithmétisation des mathématiques était commencée (cf. *L'avènement de l'arithmétique* dans ce numéro). On ne reconnaissait donc plus à la droite l'autorisation de définir les nombres, comme on avait pu l'envisager auparavant en disant que, un point origine O et un point A étant choisis sur la droite (pour fixer l'unité de mesure), chaque nombre s'identifie au point de la droite dont la distance algébrique à O (mesurée par l'unité de mesure OA) est égale à ce nombre (voir figure).

Il fallait faire le contraire : la droite n'était déjà plus qu'un support visuel à une réalité mathématique différente, de nature non plus géométrique mais arithmétique, algébrique.

On peut séparer les différentes constructions proposées des nombres réels en deux catégories. La première est celle qui utilise les propriétés des suites, elle est notamment l'œuvre de Cantor et Heine. La seconde est due à Dedekind, elle utilise, elle, la relation d'ordre entre les nombres. Les deux présupposent l'existence des nombres rationnels, qui servent de tremplin pour définir les irrationnels.

L'idée de Cantor

Pour décrire en quelques mots la méthode de Cantor, on pourrait dire qu'elle consiste à définir les irrationnels comme limites de rationnels.



La droite réelle

Georg Cantor naît à Saint Pétersbourg (Russie) de parents danois en 1845 et meurt à l'hôpital psychiatrique de Halle (Allemagne) en 1918. Sa première dépression nerveuse date de 1884, sa période créatrice s'achève en 1899.Son intérêt pour les ensembles vient de ses études sur la convergence des séries de Fourier, séries fort utiles en sciences physiques. Pour préciser leurs ensembles de convergence, il est amené à clarifier la notion de nombre réel. C'est donc un souci pratique qui conduit à la naissance de la théorie des ensembles et à la crise des fondements qui s'ensuit (voir l'article « la logique moderne : de Boole à Gödel »). Cette théorie naît en partie de sa correspondance avec Dedekind.

Considérons une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels possédant la propriété suivante : pour toute suite d'entiers $r(n)$, la quantité $u_{n+r(n)} - u_n$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini (en un sens que l'on peut définir soigneusement).

Cette propriété correspond à une suite dont les termes sont de plus en plus proches les uns des autres. Une telle suite est appelée "fondamentale" par Cantor.

On peut démontrer qu'il ne peut y avoir deux nombres rationnels l pour lesquels la suite des quantités $u_n - l$ tende vers zéro. En langage intuitif, on dirait qu'une suite ne peut avoir deux limites à la fois.

C'est là l'idée de Cantor. Pour certaines suites fondamentales, constituées, rappelons-le, uniquement de nombres rationnels, il existe effectivement un rationnel l pour lequel $u_n - l$ tend vers zéro : c'est par exemple le cas de la suite définie par la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 1/10 :

$u_1 = 1$
$u_2 = 1{,}1 \quad = 1 + 1/10$
$u_3 = 1{,}11 \quad = 1 + 1/10 + (1/10)^2$
$u_4 = 1{,}111 \quad = 1 + 1/10 + (1/10)^2 + (1/10)^3$.

On peut montrer, sans faire appel à d'autre notion que celle de nombre rationnel, que cette suite tend vers $1/(1 - 1/10)$, c'est-à-dire 10/9 (que nous écrivons aussi 1,1111111..., utilisant les points de suspension comme définition intuitive d'une limite).

Mais il est d'autres suites fondamentales pour lesquelles il n'existe aucun rationnel qui en soit la limite. Par exemple, la suite définie par

$u_1 = 1$
$u_2 = 1{,}1 \quad = 1 + 1/10$
$u_3 = 1{,}11 \quad = 1 + 1/10 + (1/10)^2$
$u_4 = 1{,}1101 \quad = 1 + 1/10 + (1/10)^2 + (1/10)^4$
$u_5 = 1{,}11010001$
$\quad = 1 + 1/10 + (1/10)^2 + (1/10)^4 + (1/10)^8$
$u_6 = 1{,}1101000100000001$
$\quad = 1 + 1/10 + (1/10)^2 + (1/10)^4 + (1/10)^8 + (1/10)^{16}$

etc. (Le fait que cette suite n'admette pas de limite rationnelle provient du fait que l'écriture décimale de la limite n'est pas périodique.)

Qu'à cela ne tienne, déclare alors Méray, auteur en 1894 d'un traité dont les idées sont assez proches de celles de Cantor : créons tout simplement un nouveau nombre, irrationnel celui-là, qui sera, par définition la limite de notre suite. C'est la façon la plus séduisante de conclure, mais, comme nous le verrons plus loin, elle fut en butte à de nombreuses attaques.

Cantor, lui, en reste aux suites. Il déclare que toutes les suites fondamentales $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers zéro constituent une même classe, celle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et que c'est cette classe prise dans son ensemble qui constitue un nombre. Ce nombre est rationnel lorsqu'il existe un membre de la classe qui est une suite constante égale à un certain rationnel l, irrationnel sinon. Cette méthode, très abstraite, est aujourd'hui la plus courante dans les cours de mathématiques pour définir les réels. L'expliquer en détails serait trop long, retenons simplement que Cantor a franchi un pas important en acceptant l'idée que les nombres réels pouvaient être définis de façon fort éloignée de nos idées préconçues sur ce que c'est qu'un nombre.

L'idée de Dedekind

Venons-en à Dedekind, dont l'approche est toute différente. Dedekind est l'homme de l'ordre. Il remarque que, lorsqu'on se donne un nombre r (rationnel), le reste des nombres (rationnels) peut se répartir en deux catégories : les nombres inférieurs à r et les nombres supérieurs à r.

Appelons I_r la partie de gauche, constituée des nombres (rationnels, toujours !) inférieurs à r, et S_r la partie de droite, des nombres supérieurs à r : le couple (I_r, S_r) constitue une coupure, c'est-à-dire une partition de l'ensemble des rationnels en deux morceaux tels que tout élément de l'un est inférieur à tout élément de l'autre.

Dedekind remarque alors qu'à chaque nombre (rationnel, redisons-le) correspond une coupure (et une seule), mais qu'à une coupure ne correspond pas toujours un rationnel pour faire la frontière. Définissons par exemple l'ensemble A^+ comme l'ensemble des rationnels positifs dont le carré est plus grand que 2, et A^- comme l'ensemble des autres rationnels.

On montre facilement que le couple (A^-, A^+) constitue une coupure : tout rationnel est soit dans A^- soit dans A^+, et tout élément de A^- est inférieur à tout élément de A^+. Mais aucun rationnel n'est là pour faire la frontière, et pour cause : la frontière est ce que nous appelons d'habitude $\sqrt{2}$, qui n'est pas rationnel.

Dedekind définit alors les nombres réels en postulant que les frontières des coupures non associées à des rationnels constituent les entités nouvelles que sont les irrationnels.

Bien sûr, dans toutes ces constructions, il importe de démontrer soigneusement chacune de nos affirmations, et aussi de s'assurer que ce que l'on construit correspond bien à l'idée que l'on se fait de l'ensemble des nombres réels. En particulier, il faut s'assurer de ce qu'on peut multiplier, additionner, comparer, soustraire, etc., comme on le faisait depuis toujours (et sans trop se poser de questions).

Richard Dedekind est né à Brunswick en 1831 et mort dans la même ville allemande en 1916. Il est l'un des fondateurs (avec Kummer et Kronecker) de la théorie des nombres algébriques. Il proposa une construction purement algébrique des nombres réels.

Bernhard Bolzano est né à Prague en 1781 et mort dans la même ville en 1848. Bien que Tchèque, il est de langue allemande. Il est ordonné prêtre en 1805 et est professeur de sciences de la religion jusqu'à sa destitution de ce poste en 1820 pour raisons politiques. Il s'intéresse aux fondements des mathématiques, introduit les suites dites de Cauchy et il est le premier à étudier les ensembles infinis. En particulier, il énonce, sans démonstration, que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ ont des cardinaux infinis différents.

Problème de logique

Reste une objection logique qui se pose, aussi bien dans la démarche de Méray que dans celle de Dedekind. Les deux mathématiciens ont en effet créé des entités nouvelles, ou plus exactement défini des objets nouveaux qui leur convenaient. Russell, au début du vingtième siècle, s'oppose de façon humoristique à ce procédé en ces termes : « la méthode qui consiste à [créer] ce dont on a besoin présente de nombreux avantages. Ce sont les mêmes avantages que présente le vol vis-à-vis du travail honnête ». C'est là le réel problème de l'existence du défini. Il ne suffit pas de définir une notion nouvelle pour que celle-ci représente automatiquement un objet existant. Notons que le problème ne se pose pas pour la construction de Cantor, c'est l'avantage qu'elle présente sur la vision, plus intuitive, de Méray.

Pour corriger la construction de Dedekind, Russell supprime purement et simplement ces "créations", et définit comme nombre la coupure elle-même, et non plus sa frontière. Ce que l'on note $\sqrt{2}$ ne désigne alors plus le point limite entre les ensembles A^- et A^+ définis plus haut, mais la coupure (A^-, A^+) dans son ensemble. En d'autres termes, on prend la carte des deux régions, et non simplement le lieu de la rencontre.

Bilan : rien n'est plus créé pour la circonstance, aucun lapin irrationnel ne sort plus du chapeau des nombres rationnels. Le prix à payer pour cela est analogue à celui de la construction de Cantor : une abstraction grandissante, qui éloigne la définition mathématique de la perception usuelle. Est-on alors bien sûr que les objets abstraits ainsi construits représentent bien ce que nous voulons, et dont la droite géométrique nous donne la perception ? Les constructions de Cantor et de Dedekind (en tenant compte de la correction de Russell) sont-elles équivalentes ?

La réponse à cette dernière question est oui. Pour la première question, il faut se souvenir de ce que les mathématiciens qui ont proposé ces constructions ont été des inventeurs et non des découvreurs. Leur but était d'arithmétiser une notion intuitive aux contours flous, pour ensuite poursuivre l'œuvre mathématique.

B. R.

Pourquoi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$?

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, baptisés ainsi par l'Italien Giuseppe Peano (1858-1932) (*naturale* en italien) ; dire que $\mathbb{N}$ est l'initiale de nombre est donc un contresens.

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs, initiale due à l'Allemand Richard Dedekind (1831-1916), car « compter » se dit *zahlen* en allemand ; cela n'empêchera pas certains de dire que c'est l'ensemble des « zentiers »…$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, baptisé ainsi par Peano (*quotiente* = quotient en italien).

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, baptisés ainsi par l'Allemand Georg Cantor (1845-1918) (*Real* = réel en allemand).$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes, baptisés ainsi par Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855) en remplacement du terme « imaginaire ».

Histoire des idées : les nouvelles tendances

Au XVIII^e siècle, la logique appartenait surtout au discours philosophique et Voltaire surnommait Dieu « le grand horloger ». La logique était celle d'Aristote et le cours des planètes semblait réglé comme par une autorité divine. Puis Henri Poincaré découvrit qu'en fait, leur comportement n'était sans mystère qu'en première approximation. De même, les mathématiciens n'ont longtemps étudié que des courbes très régulières avant de découvrir que la géométrie classique ne permettait pas de modéliser correctement les phénomènes naturels complexes. La géométrie fractale s'imposa comme un nouvel outil pour étudier ces structures. D'autre part, les ordinateurs ont créé d'autres domaines d'études comme celui des automates.

par Benoît Rittaud

Sept défis pour un millénaire

En 1900, David Hilbert avait recensé les « 23 problèmes du siècle ». Cent ans après, la communauté mathématique lance un défi à l'avenir sous forme de sept problèmes majeurs, primés à la hauteur de leur enjeu.

Les défis du prochain siècle font écho au « Programme de Hilbert », proposé en 1900 au cours d'une conférence restée célèbre, dans laquelle le mathématicien David Hilbert avait donné une liste de 23 problèmes qu'il pensait être les plus décisifs pour les mathématiciens du vingtième siècle. Le grand retentissement de son programme tint à son caractère visionnaire : beaucoup des problèmes de Hilbert se révélèrent extrêmement féconds. Hilbert lui-même n'en a résolu qu'un seul, et les plus grands noms du vingtième siècle sont attachés à l'étude de certains d'entre eux. Tous ne sont pas résolus, et nul ne sait quand le programme sera achevé.

Steve Smale
(1930-2000)

La tentation était grande d'élaborer un programme analogue qui concernerait les mathématiques du vingt-et-unième siècle. S. Smale a relevé le défi, en proposant une liste qui fait une place significative à des problèmes issus de l'informatique. D'autres mathématiciens, sollicités, ne s'y sont pas risqués, tant il est difficile de prévoir la manière dont les mathématiques évolueront dans les prochaines décennies. Un grand colloque sur le thème des mathématiques du prochain siècle s'est d'ailleurs tenu à Los Angeles, au mois d'août.

Les défis du prochain siècle font écho au « Programme de Hilbert », proposé en 1900 au cours d'une conférence restée célèbre.

Si vous vous demandez comment devenir millionnaire en faisant des mathématiques, voici la réponse : il vous suffit de résoudre l'un des sept problèmes choisis par le **Clay Mathematics Institute** (CMI), une fondation créée il y a deux ans par le mécène américain Landon Clay, son épouse Lavinia ainsi qu'Arthur Jaffe. Si ce dernier est professeur à l'université de Harvard, l'homme qui a donné son nom au CMI est un homme d'affaire américain, qui n'a jamais été mathématicien ; « pas même un amateur, mais plutôt un spectateur », confie-t-il lui-même. Le 24 mai dernier, au Collège de France,

Les 23 problèmes de David Hilbert

Pb 1 : L'hypothèse du continu (existe-t-il une partie de $\mathbb{R}$ qui ne soit équipotente ni à $\mathbb{N}$, ni à $\mathbb{R}$?).
Pb 2 : L'arithmétique est-elle consistante ? (les axiomes de l'arithmétique sont-ils contradictoires ?)
Pb 3 : Peut-on reconstituer un cube et un tétraèdre de même volume à l'aide des mêmes polyèdres en nombre fini ?
Pb 4 : Déterminer toutes les géométries pour lesquelles la distance la plus courte entre deux points est obtenue par le segment de droite.
Pb 5 : Existe-t-il des groupes de Lie « continus » ?
Pb 6 : Peut-on mathématiser les axiomes de la physique ?
Pb 7 : e^{π} est-il transcendant ?
Pb 8 : Prouver la conjecture de Riemann.
Pb 9 : Prouver le résultat le plus général sur la loi de réciprocité quadratique.
Pb 10 : Trouver un algorithme permettant de déterminer en un nombre fini de pas si une équation diophantienne à des solutions entières.
Pb 11 : Établir la classification des formes quadratiques à coefficients dans des anneaux d'entiers algébriques.
Pb 12 : Généraliser le théorème de Kroneker sur les corps communatifs.
Pb 13 : Montrer l'impossibilité de résoudre des équations généralisées du 7^e degré à l'aide de fonctions de deux variables.
Pb 14 : Prouver la finitude de certains systèmes complets de fonctions.
Pb 15 : Trouver un fondement rigoureux de la géométrie énumérative de Schubert.
Pb 16 : Questions sur la topologie des variétés algébriques.
Pb 17 : Une fonction rationnelle qui ne prend que des valeurs positives est-elle une somme de carrés de fonctions rationnelles ?
Pb 18: Avec quelles familles de polyèdres identiques peut-on paver l'espace ?
Pb 19, 20 et 23 : Questions liées aux équations aux dérivées partielles.
Pb 21 : Prouver l'existence d'équations différentielles linéaires ayant un groupe de monodromie donnée.
Pb 22 : Résoudre le problème d'uniformisation des courbes analytiques.

À l'heure actuelle, un certain nombre de ces problèmes ne sont pas ou ne sont que partiellement résolus. Mais rien ne dit qu'ils ne le seront pas un jour s'il faut en croire l'épitaphe de David Hilbert sur sa tombe à Göttingen : *Wir müssen wissen, wie werden wissen* (nous devons savoir, nous saurons).

dans un amphithéâtre bondé de plus de 500 personnes, ont ainsi été présentés sept problèmes mathématiques contemporains, dits « **problèmes du millénaire** », dotés chacun d'un prix de un million de dollars pour celui - ou celle, ou ceux - qui en viendrait à bout.

Un million de dollars par problème

L'initiative fait bien entendu écho à la célèbre conférence donnée durant l'exposition universelle de Paris en 1900 par David Hilbert, lequel avait sélectionné 23 problèmes ouverts pour le vingtième

Une formulation de la conjecture de Riemann

Si $\pi(x)$ désigne le nombre d'entiers naturels premiers inférieurs ou égaux à x et Li désigne la fonction « logarithme intégral », i.e.

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t},$$

alors, pour une certaine constante c, on a l'inégalité suivante, pour tout x :

$$|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| \leq c\, x \ln x.$$

Le Clay Mathematics Institute

Le CMI est une fondation américaine à but non lucratif, poursuivant cinq objectifs :

- **faire avancer la recherche mathématique, à partir de programmes de financement pour des chercheurs ;**
- **populariser le savoir mathématique, en organisant conférences, écoles d'été, rencontres entre mathématiciens, scientifiques et grand public ;**
- **encourager de brillants étudiants à poursuivre en mathématiques ;**
- **valoriser les grandes percées mathématiques, au travers du Clay mathematics award ;**
- **pousser à la résolution de problèmes mathématiques spécifiques : les « problèmes du millénaire ».**

Pour entrer en contact :
The Clay Mathematics Institute
1770 Massachusetts Ave., #331
Cambridge, Massachusetts 02140, USA
Téléphone : **1 617 868 8277**
Site web : **www.claymath.org**

siècle qui allait naître. Parmi ces vingt-trois problèmes, douze sont aujourd'hui résolus, huit autres ont été bien entamés, et trois résistent encore à la sagacité des chercheurs. Seul l'un des problèmes de Hilbert a été repris par la commission scientifique du CMI : l'**hypothèse de Riemann**, dont il existe plusieurs formulations possibles, toutes assez compliquées (cf. encadré). En gros, il s'agit de savoir comment se distribuent les nombres premiers (*i.e.* qui ne sont divisibles que par eux-mêmes et par 1) dans l'ensemble des entiers naturels.

Tous les problèmes choisis par le CMI, s'ils ont une importance considérable en eux-mêmes, souffrent sans doute d'être véritablement hermétiques au profane. Difficile de croire, donc, que l'intérêt que l'événement pourra susciter dans le grand public concernera autre chose que l'argent mis en jeu, et difficile aussi d'espérer sérieusement expliquer en des termes accessibles le contenu et les enjeux de ces problèmes. En-dehors de la conjecture de Riemann, les six autres problèmes sont : **la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer**, relative aux équations dites « diophantiennes », c'est-à-dire des équations à plusieurs inconnues dont on cherche à déterminer d'éventuelles solutions qui soient des nombres entiers ; **le problème P = NP**, le seul du lot à être un problème issu de l'informatique, qui consiste à savoir, en gros, s'il existe ou non des problèmes difficiles à résoudre dont on puisse contrôler rapidement la validité d'une solution éventuelle ; **la conjecture de Poincaré**, qui concerne des propriétés topologiques d'ensembles tridimensionnels (analogues à des « surfaces de dimension 3 ») ; **la conjecture de Hodge**, posée en 1850, qui se réfère à la classification d'objets mathématiques à partir

d'outils originellement destinés à l'étude d'objets géométriques ; enfin, **la théorie de Yang-Mills** et **les équations de Navier-Stokes**, qui sont deux problèmes de la physique mathématique. À noter que, pour Yang-Mills, certains chercheurs considèrent que la formulation du problème donnée par le CMI est partiellement erronée.

Un siècle après Hilbert

L'esprit de Hilbert était bien au rendez-vous du Collège de France, les organisateurs de l'événement ayant même pu faire écouter un enregistrement audiophonique de la voix du mathématicien allemand, que l'on entend notamment prononcer son épitaphe : « *Wir müssen wissen. Wir werden wissen.* » [Nous devons savoir. Nous saurons.]. La « rencontre du millénaire » a tenu ses promesses, bien qu'on ait pu reprocher au conseil scientifique du CMI (composé d'Alain Connes, d'Arthur Jaffe, d'Andrew Wiles et d'Edward Witten) d'avoir été un peu conventionnel dans son choix de problèmes.

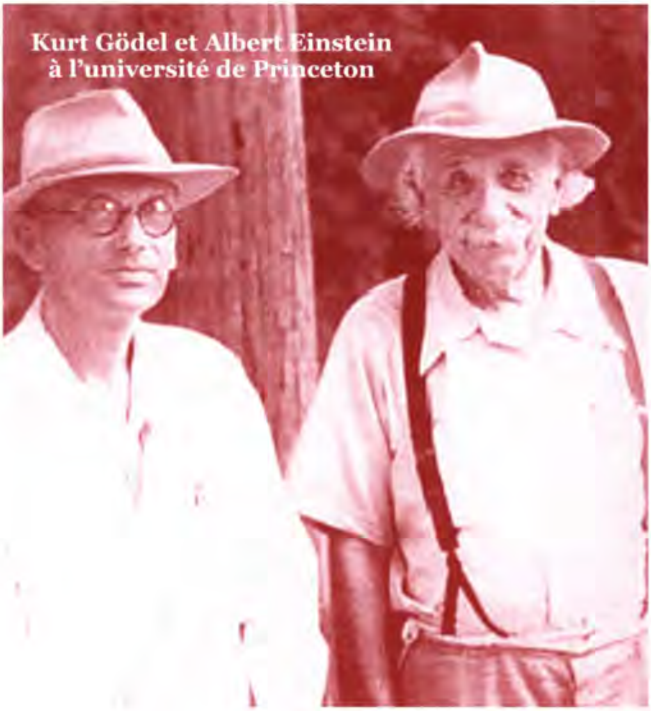
À l'occasion de la rencontre du millénaire, Laurent Lafforgue, du CNRS, ainsi qu'Alain Connes, ont reçu le « Clay Mathematics Award » pour leurs travaux mathématiques des mains d'Andrew Wiles, qui en avait été le premier lauréat, notamment pour avoir démontré la fameuse « conjecture de Fermat ». Avant que John Tate, de l'université d'Austin (Texas) et Michael Atiyah, professeur « Emeritus » de l'université de Cambridge (Royaume-Uni) n'exposent ces problèmes, Timothy Gowers, professeur à Cambridge, a présenté une conférence sur « *L'importance des mathématiques* ». Il s'est livré, en utilisant des exemples particulièrement ludiques, à un plaidoyer pour la recherche mathématique, laquelle, somme toute peu coûteuse, doit être défendue y compris lorsque les applications ne semblent pas se manifester tout de suite : on ne peut pas savoir à l'avance quelles parties serviront un jour (pensons à la théorie des nombres, qui a mis des siècles à servir, en cryptographie) ; de plus, même ce qui ne sert pas peut parfois être relié à quelque chose d'utile qu'on ne pourrait atteindre autrement. Puissent nos décideurs ne pas l'oublier.

B. R.

par Francis Casiro

La logique moderne de Boole à Gödel

La logique, philosophie ou mathématique ? Dès son origine, elle jouit de ce double statut. Mais jusqu'au XVIIIe siècle elle appartient surtout au discours philosophique. Il faut attendre Georges Boole pour qu'elle bascule définitivement dans le giron mathématique.



Kurt Gödel et Albert Einstein à l'université de Princeton

L'idée de réduire le raisonnement au calcul n'est pas nouvelle. Certains historiens des sciences voit en Raymond Lulle (1233-1316) l'initiateur de ce programme (dans son *Grand Art*, il imagine un moyen infaillible de convertir les infidèles musulmans à l'aide d'une technique de mécanisation des opérations logiques), mais il est préférable de voir en Hobbes (1588-1679) qui, dans son *Levathian*, proclame « *La raison n'est rien d'autre qu'un calcul* », et surtout en Leibniz (1646-1716) les premiers tenants d'une logique symbolique. Ce dernier envisage de créer un langage universel (*charasteristica universalis*) couplé à un calcul du raisonnement (*calculus ratiocinator*) pouvant régler toutes les disputes et tous les différents entre parties opposées (les adversaires traduisent les arguments en *characteristica* et se mettent ensuite simplement à calculer). Le travail de Leibniz est resté en grande partie non publié et son influence a été quasi nulle.

Les lois de la pensée

Le premier système logique cohérent est l'œuvre de George Boole (1815-

1864) dans son livre *Les lois de la pensée*. Boole était convaincu que l'esprit accomplit certains processus de raisonnement qui ne sont que les axiomes de la logique. Ainsi la loi « A ne peut être B et non-B en même temps » est formalisée par l'équation :

$$x(1-x)=0$$

(x est la classe des A qui sont B, $1-x$, celle des A qui ne sont pas B, 1 est la classe universelle, 0, la classe nulle).
Boole a créé une algèbre des classes et une algèbre des propositions. En voici deux exemples très simples.

Si x = {portant un chapeau} et y = {portant une cravate}, alors $x + y$ équivaut à la classe des hommes portant un chapeau ou une cravate et xy coïncide avec la classe des hommes portant à la fois un chapeau et une cravate.

Si z = {Anglais} alors $z(x + y)$ équivaut aux anglais portant un chapeau ou une cravate, soit $z(x + y) = zx + zy$.
L'algèbre de Boole possède beaucoup de similitudes avec l'algèbre « classique » mais elle s'en écarte sur un certain nombre de points ; il en est ainsi de la loi d'idempotence : $x^2 = x$ (qui n'affirme rien d'autre que : « les logiciens qui sont des logiciens sont des logiciens »).

Une proposition est soit vraie (1), soit fausse (0). Pour deux propositions x et y, le produit xy (c'est-à-dire la proposition x et y) est égal à :

si $x = 0$ et $y = 0$ alors $xy = 0$
si $x = 0$ et $y = 1$ alors $xy = 0$
si $x = 1$ et $y = 0$ alors $xy = 0$
si $x = 1$ et $y = 1$ alors $xy = 1$.

On en déduit la « loi » : « x et y » est vraie si et seulement si x et y sont vraies.
La logique de Boole souffrait d'un grave défaut : elle se limitait au calcul sur les propositions. Il fallut attendre les travaux de Frege (1848-1923) et de Peano (1858-1932) pour voir apparaître, avec l'introduction des quantificateurs « pour tout » et « il existe », les premiers systèmes de logique formelle aptes à s'appliquer à l'ensemble des mathématiques.

La grande crise

Parallèlement aux développements de la logique formelle, Georg Cantor (1845-1918) inventait la théorie des ensembles. On lui doit la découverte de l'existence de plusieurs types d'infinis, ce que n'avaient pu voir deux mille ans de spéculations philosophiques.

Deux ensembles ont le même cardinal (le même type d'infini) s'il existe une bijection entre eux (à chaque élément du premier on peut faire correspondre un et seul élément du second, et réciproquement). Il montre ainsi qu'un ensemble infini et l'ensemble de ses parties n'ont jamais le même type d'infini. Il parvient aussi à prouver que l'infini des entiers naturels, qualifié de

La civilisation progresse en augmentant le nombre d'opérations importantes pouvant être exécutées sans y penser.
Alfred N. Whitehead (1861-1947)

Bertrand Russel (1872-1970) est l'un des protagonistes de la crise des fondements née de la découverte de contradictions dans la théorie naïve des ensembles.
Lui-même a mis le doigt sur certains paradoxes comme celui-ci qui porte son nom :
Si on considère l'ensemble A = {X / X $\notin$ X}, chacune des hypothèses $A \in A$ et $A \notin A$ aboutit à une contradiction.
Il l'a vulgarisé sous la forme du paradoxe du barbier :
Dans un village, un barbier rase les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-là. Le barbier se rase-t-il lui-même ? Russel a reçu le prix Nobel de littérature en 1950.

George Boole est né à Lincoln en 1815 et mort à Balling Temple en 1864. Boole est le premier avec de Morgan à fonder la logique mathématique indépendamment de la philosophie.

dénombrable est distinct de l'infini des nombres réels, qualifié de continu, en utilisant l'argument de la diagonale (voir l'encadré). Il se pose alors la question épineuse de savoir s'il existe un infini qui s'intercale entre celui du dénombrable et celui du continu. Il ne parviendra jamais à résoudre ce problème, connu aujourd'hui sous le nom d'hypothèse du continu.

Mais ses soucis ne s'arrêtèrent pas à cela. Dans l'esprit de Cantor, la théorie des ensembles devait être le socle de tout l'édifice mathématique. Or ce socle était des plus friables. La théorie des ensembles souffrait d'un défaut rédhibitoire : elle était contradictoire ! Le premier à révéler la faille de la théorie cantorienne fut Bertrand Russell, entraînant par là-même ce que l'on a appelé depuis la crise des fondements.

Kurt Gödel est né à Brünn en 1906 et mort à Princeton en 1978. Sa pensée est avant tout métaphysique et son oeuvre mathématique se limite à la logique. En philosophie, il pense que les objets mathématiques existent par eux-mêmes, indépendamment de notre esprit. Pour lui, les mathématiques se découvrent, elles ne s'inventent pas. Il s'inscrit donc dans la logique du Platon du mythe de la caverne. Pour la petite histoire, notons qu'il semble que Gödel ait cru aux fantômes et à la possibilité du voyage dans le temps.

Cantor avait montré qu'à tout ensemble on pouvait en associer un autre « beaucoup plus gros », à savoir l'ensemble de toutes ses parties. Si on appliquait ce résultat à l'ensemble universel, l'ensemble de tous les ensembles, on devait admettre que cet ensemble devait contenir l'ensemble de ses parties, étant ainsi plus grand qu'un ensemble qui était strictement plus grand que lui !

Le premier remède fut apporté par Russell lui-même dans le monumental ouvrage *Principia Mathematica* qu'il écrivit en collaboration avec Whitehead. Outre l'appareil mathématico-logique indispensable à tout système formel, il y développe la théorie des « types » qui interdit l'existence d'ensembles qui appartiennent à eux-mêmes. (Depuis, la communauté mathématique lui a préféré un autre système axiomatique, celui de Zermelo-Fraenkel.)

Pour avoir une idée de la façon dont Russell a contourné la difficulté, suivons son exemple du « paradoxe du bibliothécaire ». Imaginons un bibliothécaire se proposant d'établir le catalogue des livres qui se citent eux-mêmes et le catalogue des livres qui ne se citent pas. Avant d'entreprendre son travail titanesque, le bibliothécaire se pose la question de savoir si le second catalogue, celui des livres qui ne font pas référence à eux-mêmes, doit se citer ou pas. S'il ne se cite pas, il doit appartenir aux livres qui ne se citent pas, et doit donc, puisque telle est sa caractéristique, se citer. S'il se cite, il doit appartenir à la catégorie des livres qui se citent, et par conséquent il ne doit pas se citer. Dans tous les cas, on aboutit à une contradiction. Pour sortir de l'impasse, Russell propose une idée très simple. Le catalogue

La diagonale de Cantor et le problème de l'arrêt

Un nombre réel est calculable s'il existe un algorithme permettant de calculer, l'un après l'autre, les chiffres de son développement décimal. Il existe, par exemple, des programmes d'ordinateurs qui calculent le nombre $\sqrt{2}$, le nombre π, le nombre e, les racines d'équations algébriques à coefficients entiers, etc.
La plupart des nombres que l'on rencontre effectivement en Analyse sont calculables. De même que les programmes qui les produisent, on peut numéroter l'ensemble de ces nombres. Autrement dit, l'ensemble des nombres calculables peut être écrit sous forme d'une suite.
Premier fait troublant : Cantor a montré que l'ensemble des réels n'est pas dénombrable !
Écrivons la liste de tous les programmes possibles : $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \ldots$ (on peut les classer comme on classe les mots dans un dictionnaire).
Sur la n-ième ligne, on écrit le nombre réel que calcule le programme p_n. Turing retient le premier chiffre après la virgule du premier nombre, le deuxième chiffre après la virgule du deuxième nombre, le troisième chiffre après la virgule du troisième nombre, et ainsi de suite. Il obtient ainsi un nombre $0{,}d_1d_2d_3d_4d_5d_6\ldots$ Il modifie alors chacun des chiffres de ce nombre ce qui donne un autre nombre $0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6\ldots$ Si ce nombre est calculable, il figure dans la liste précédente. Soit n le numéro de la ligne ou figure ce nombre. On a : $a_n = d_n$ ce qui est absurde. Le nombre obtenu n'est donc pas calculable.

Montrons maintenant que le problème de l'arrêt n'a pas de solution. Raisonnons par l'absurde. Supposons que nous disposions d'un programme universel qui permette de savoir en un nombre fini d'étapes si un programme donné s'arrête ou non. Considérons le nombre "diagonal" précédent et proposons-nous de l'évaluer. Pour déterminer le n-ième chiffre de ce nombre, on commence à exécuter le programme p_n jusqu'à ce qu'il fournisse un n-ième chiffre. Arrivé là, on modifie le chiffre. Mais il y a un problème. Que se passe-t-il si le n-ième programme ne produit jamais de n-ième chiffre et que nous restions là à attendre éternellement ? C'est impossible. En effet, le merveilleux programme universel dont nous avons supposé l'existence, a été exécuté au préalable. Il nous a prévenu sur le statut de p_n. Si p_n ne "plante" pas, on lance l'exécution de p_n et on modifie le n-ième chiffre, sinon, on n'exécute surtout pas p_n et on recommence toute la procédure précédente avec le programme suivant p_{n+1}. On obtient ainsi une procédure effective de calcul du nombre "diagonal" de Turing. Ce nombre est donc calculable. Nous aboutissons ainsi à une contradiction. Il n'existe pas d'algorithme permettant de savoir si un programme quelconque s'arrête.

et le livre ne sont pas de la même nature. Le catalogue est un « surlivre », il est d'un type différent. Au lieu de se perdre dans l'univers uniforme de l'imprimé, on crée une hiérarchie qui évite toute confusion : les livres, les catalogues, les catalogues sur les catalogues et ainsi de suite.
Mais, avant même que la crise des fondements ne soit résolue, David Hilbert (1862-1943), convaincu que « rien, ne pourra nous chasser du paradis créé par Cantor », se lançait dans une entreprise extraordinairement ambitieuse.

Hilbert et la méthode axiomatique

Le projet initial de Hilbert (Congrès des mathématiciens, Paris, 1900) était de rendre parfaitement claires les méthodes du raisonnement mathématique. Pour cela, il fallait définir un système axiomatique formel dont on pourrait déduire toutes les mathématiques. Un tel système devait comporter une liste explicite des postulats et des méthodes d'inférence ayant l'assentiment de tous les mathématiciens.

Les problèmes indécidables

L'indécidabilité d'une proposition est toujours relative à une théorie axiomatisée et à un système de démonstrations. Changer les axiomes ou ajouter des axiomes (et en supposant que le système ainsi transformé reste consistant), peut faire changer le statut d'un énoncé ; il peut très bien devenir décidable dans la nouvelle théorie.
L'hypothèse du continu est un énoncé indécidable dans le cadre de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (résultat démontré par Gödel en 1938). La négation de l'hypothèse du continu est indécidable dans le même cadre (résultat démontré par Paul Cohen en 1963). Il existe un autre type d'indécidabilité lié à la notion d'algorithme.Un problème est indécidable s'il n'existe pas de procédure effective de calcul qui donne un résultat en un nombre fini d'étapes. Ce type d'indécidabilité est de nature absolue. Considérons par exemple le problème suivant. Soit tous les programmes écrits dans un langage de programmation donné ; tous ces programmes comportent un nombre fini d'instructions conformes à la syntaxe du langage de programmation. Il se peut très bien que dans les lignes de ce programme, il existe du code inutile qui n'affecte en rien le bon fonctionnement du dit programme. Peut-on construire un algorithme qui décide en un temps fini si, pour tout programme, il existe du code inutile ? Ce problème est indécidable. Il n'existe aucun algorithme répondant à la question pour tous les programmes.
Pourquoi ne faut-il pas confondre ces deux types d'indécidabilité ? La première qui porte sur une proposition unique dépend étroitement des règles du jeu du système formel auquel elle appartient. La seconde met en jeu une infinité d'énoncés et le changement des règles n'affecte en rien la nature du problème. Ainsi dans l'exemple précédent, changer de langage de programmation ne modifie en rien le caractère indécidable du problème posé.

Hilbert spécifia qu'on était en droit d'exiger de son « programme logique » un certain nombre de caractéristiques : les deux premières étant que le système devait être consistant et complet.

« Consistant » signifie que vous ne pouvez pas prouver une assertion et son contraire. La contradiction est un péché mortel en logique. « Complet » signifie que devez pouvoir décider de la vérité de toute assertion sensée et bien définie. Autrement dit, que, soit A, soit non A doit être un théorème et que ce théorème doit être démontrable à partir des axiomes et des règles d'inférence. La consistante et la complétude semblent constituer des exigences très raisonnables. Hilbert demandait en outre de résoudre le problème de la décision (*Entscheidungsproblem*). Il s'agit de construire un algorithme permettant de décider si une quelconque assertion sensée est un théorème ou non. Cette dernière exigence paraît au premier abord démesurée et bien trop ambitieuse. Comment peut-on imaginer une procédure mécanique apte à décider, en un temps fini, de la vérité de tel ou tel théorème ? Il y a de quoi mettre au chômage tous les mathématiciens du monde.

Il est cependant très facile de montrer que, pour tout système axiomatique formel à la fois consistant et complet, il existe une telle procédure. Ce résultat époustouflant est à la fois effrayant et inacceptable. Effrayante l'idée d'une machine débitant un à un tous les théorèmes possibles et imaginables. Inacceptable l'idée que l'esprit humain puisse se réduire à une procédure mécaniste.
En fait, le projet de Hilbert s'est révélé être impossible ; en contrepartie, les conséquences d'un tel renoncement ont été extraordinaires.

Enfin, Gödel vint

Kurt Gödel a porté un coup fatal au programme de Hilbert. L'onde de choc provoqué par ses théorèmes d'incomplétude n'a pas fini d'ébranler l'édifice mathématique. Le résultat démontré par Gödel peut se résumer ainsi. Imaginons un système axiomatique formel incluant la théorie élémentaire des nombres (c'est-à-dire 0, 1, 2, 3, 4, …, les axiomes de Peano, l'addition, la multiplication). Exigeons de plus que ce système soit consistant. On l'a déjà dit, une telle demande est vraiment minimale. Il serait intolérable de pouvoir démontrer des résultats faux. Bien, ces prérequis étant acceptés, Gödel a prouvé que le système ainsi défini est obligatoirement incomplet. Il existe des propositions vraies dont on ne peut démontrer qu'elles sont vraies. De telles propositions sont dites indécidables.

La preuve de Gödel est l'un des plus grands exploits intellectuels de l'histoire de l'humanité, un incroyable tour de force qui a inauguré un nouveau type de raisonnement. Le résultat de Gödel n'avait pourtant pas totalement mit à mal l'entreprise de Hilbert. Il avait laissé la porte ouverte au problème de la procédure décisionnelle pour les « vérités accessibles ». La réponse allait être apportée par Alan Turing.

Turing apporte le coup de grâce

L'existence d'une procédure mécanique permettant de décider sans coup férir qu'une assertion est vraie ou non est d'une certaine manière une question encore plus fondamentale que celle de l'incomplétude. L'article de Turing sur le sujet, publié en 1936, fut le dernier coup de théâtre, fatal et destructeur. La réponse est définitivement non. Le rêve mécaniste a viré au cauchemar. Ce qui devait être l'acmé de deux mille ans de pensée mathématique s'achève sur un formidable constat d'échec.


Alan Turing

Le raisonnement de Turing met en jeu *la machine de Turing*, sorte d'ordinateur idéal, et repose sur l'argument de la diagonale de Cantor. (voir l'encadré « La diagonale de Cantor »). Le problème de la procédure décisionnelle de Hilbert est équivalent au problème de l'arrêt : grossièrement parlant, un programme d'ordinateur une fois lancé peut très bien bouclé indéfiniment ou ne jamais fournir de résultat ; la question de savoir si un programme quelconque s'arrête ou non est indécidable. Le problème de l'arrêt ne peut pas être résolu. Le projet de Hilbert était ainsi définitivement ruiné.

F. C.

par Hervé Lehning

Le chaos : grandeur et misère du linéaire

Au XVIIe siècle, Voltaire surnommait Dieu « le grand horloger ». Le cours des planètes semblait réglé comme par une autorité divine. Henri Poincaré a découvert que ce comportement n'était sans mystère qu'en première approximation.

Écoutons le grand mathématicien Henri Poincaré lui-même parler de sa découverte : « Il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux. Une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit… Une cause très petite qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard ».

Une cause très petite qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard.


Henri Poincaré

Chaos interplanétaire

Quand Poincaré prononce ces paroles, il s'occupe d'astronomie, le domaine même de l'absolue certitude scientifique.

De quoi est-il question ? Les corps célestes agissent les uns sur les autres : les planètes, leurs satellites, les astéroïdes, les comètes, etc. or nous ne les connaissons pas tous et notre connaissance est seulement approximative.

Nos prévisions sont donc également approximatives et l'erreur ne fait que

Henri Poincaré **est né à Nancy en 1854 et mort à Paris en 1912. Il s'agit sans doute du dernier savant universel susceptible de connaître la totalité des mathématiques de son temps.**

Il ne faut pas le confondre avec son cousin germain Raymond Poincaré (1860-1934) qui fut un homme politique important de la troisième république.
La production mathématique d'Henri Poincaré est considérable. Il publie beaucoup, souvent trop rapidement ce qui explique des articles parfois confus.

Ses positions philosophiques se devinent derrière des phrases telles que :
Une théorie est bonne lorsqu'elle est belle.
Les mathématiques sont l'art de donner le même nom à des choses différentes.
Les mathématiciens n'étudient pas des objets mais des relations entre ces objets.
Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle. Si la nature n'était pas belle, elle ne vaudrait pas la peine d'être connue, la vie ne vaudrait pas la peine d'être vécue.
Les générations futures regarderont la théorie des ensembles (de Cantor) comme une maladie dont il faut guérir.

s'amplifier avec le temps.
Depuis qu'ils disposent d'ordinateurs puissants, les astronomes ont étudié les trajectoires des planètes pour plusieurs millions d'années à venir. En ce qui concerne les grosses planètes (Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune), les résultats sont plutôt conformes à l'idée d'un grand horloger. Leurs trajectoires sont relativement stables. Par contre, les petites planètes (Mercure, Vénus, Terre et Mars) ont des orbites chaotiques.
Plus précisément, si nous estimons la position d'une planète comme la Terre à 15 mètres près, l'erreur sur 10 millions d'années n'est que de 150 mètres. Au bout de 100 millions d'années, l'erreur atteint 150 millions de kilomètres. L'échelle de temps est considérable mais force est de constater qu'une petite erreur dans la condition initiale (15 m) en produit une énorme dans le résultat final.

Un exemple simple

Il n'est pas question à ce niveau de décortiquer les équations de la mécanique pour expliquer l'origine de ce chaos.
Nous raisonnerons sur un exemple.

Remarquons simplement que le système solaire se conduit comme un système dynamique où l'état à un instant $t+1$ est entièrement déterminé par l'état à l'instant t avec une relation du type :

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

où f est une fonction et x_t l'état à l'instant t.
Très souvent, un tel système n'a pas de comportement chaotique.
Cela tient essentiellement à la configuration entre d'une part la courbe d'équation $y = f(x)$ et d'autre part la droite d'équation $y = x$ (voir encadré).

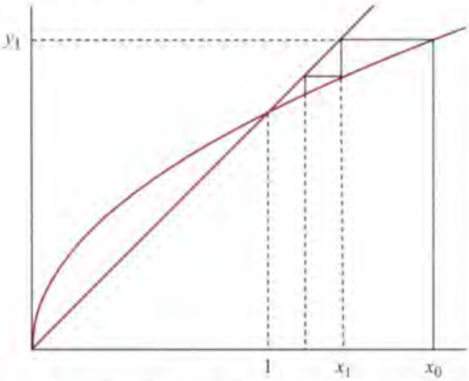
Le cas classique

Le cas classique est assez bien représenté par la suite définie par : $x_0 = a > 0$ et $x_{t+1} = \sqrt{x_t}$.La fonction f est donc définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Pour toutes les conditions initiales a, nous retrouvons le même ordre simple dans les valeurs successives de x_t.

1,414213562	1,010889286	1,000338508	1,000010576	1,000000331	1,000000011
1,189207115	1,005429901	1,000169240	1,000005288	1,000000166	1,000000006
1,090507733	1,002711275	1,000084616	1,000002644	1,000000083	1,000000003
1,044273783	1,001354720	1,000042307	1,000001322	1,000000042	1,000000002
1,021897149	1,000677131	1,000021153	1,000000661	1,000000021	1,000000001

Sans connaître la règle de formation des éléments de ce tableau, son simple examen reflète un ordre évident pour un œil mathématiquement averti. En effet, les nombres se rapprochent de 1, la distance étant divisée par 2 à chaque étape. On peut montrer que le 1 vient de $f(1) = 1$ et le 2 de $f'(1) = 1/2$.

Si $a > 1$, la figure ci-contre représentant les valeurs successives de x_t suggère également que la limite de x_t vaut 1. Ceci est en fait facile à prouver. On montre d'abord que $x_t > 1$ pour tout t. On en déduit que $x_t + 1 > 2$ et donc, puisque $x_{t+1}^2 - 1 = x_t - 1$, la double inégalité :
$0 < x_{t+1} - 1 < (x_t - 1)/2$.
On démontre alors par récurrence que
$0 < x_t - 1 < (a - 1)/2_t$
d'où l'on déduit le résultat.



Le cas $0 < a < 1$ se règle alors en remarquant que la suite $y_t = 1/x_t$ vérifie les hypothèses précédentes et donc que sa limite est 1 d'où l'on déduit que 1 est également la limite de x_t.
Ce raisonnement se généralise assez bien dès que la fonction possède un point « fixe » λ tel que $f(\lambda) = \lambda$ et $|f'(\lambda)| < 1$. Réciproquement, on démontre que si la suite x_t converge vers λ sans être stationnaire alors $f(\lambda) = \lambda$ et $|f'(\lambda)| < 1$.

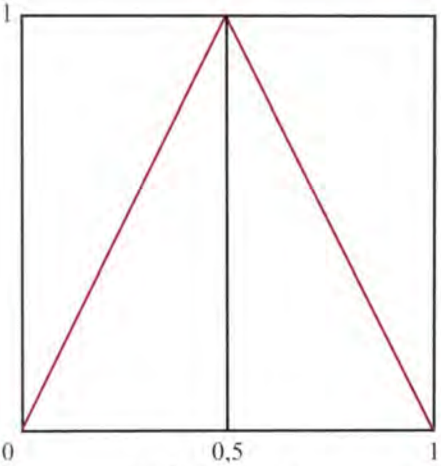
Un cas simple de chaos

Considérons la fonction tente définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 0{,}5 \\ f(x) = 2 - 2x & \text{si } 0{,}5 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Si vous essayez d'appliquer la méthode graphique de l'encadré à la suite définie
par la condition initiale $x_0 = a$ entre 0 et 1
et la formule $x_{t+1} = f(x_t)$,
vous constaterez qu'elle se comporte de façon compliquée. Il est préférable de faire une étude numérique. Pour la condition initiale $a = 0{,}2356$, nous obtenons :

0,2356	0,4712	0,9424	0,1152
0,2304	0,4608	0,9216	0,1568
0,3136	0,6272	0,7456	0,5088
0,9824	0,0352	0,0704	0,1408
0,2816	0,5632	0,8736	0,2528
0,5056	0,9888	0,0224	0,0448
0,0896	0,1792	0,3584	0,7168
0,5664	0,8672	0,2656	0,5312
0,9376	0,1248	0,2496	0,4992
0,9984	0,0032	0,0064	0,0128



La fonction tente

Une telle liste est loin de refléter l'ordre souvent rencontré dans l'étude de suites de ce type. De plus, cette suite de valeurs est extrêmement sensible à un changement même infime de la condition initiale. Prenons $a = 0{,}2357$, nous obtenons la suite de valeurs suivantes :

0,2357	0,4714	0,9428	0,1144
0,2288	0,4576	0,9152	0,1696
0,3392	0,6784	0,6432	0,7136
0,5728	0,8544	0,2912	0,5824
0,8352	0,3296	0,6592	0,6816
0,6368	0,7264	0,5472	0,9056
0,1888	0,3776	0,7552	0,4896
0,9792	0,0416	0,0832	0,1664
0,3328	0,6656	0,6688	

Vous remarquerez qu'au départ, les valeurs ne sont guère différentes mais les deux listes bifurquent très vite.

Ceci dit, les calculs sont exacts. Pour les deux conditions initiales, les suites sont formées uniquement de nombres à quatre chiffres. Il n'y a donc que 10 000 valeurs possibles. Parmi les 10 001 premiers, deux au moins sont égaux. A partir de ces deux là, la suite se répète identique. Plus précisément, si nous écrivons x_t et x_{t+T} avec $T > 0$ (le plus petit possible) ces deux valeurs, la règle de formation des valeurs de la suite implique que :

$$x_{t+T+1} = x_{t+1}, x_{t+T+2} = x_{t+2},$$

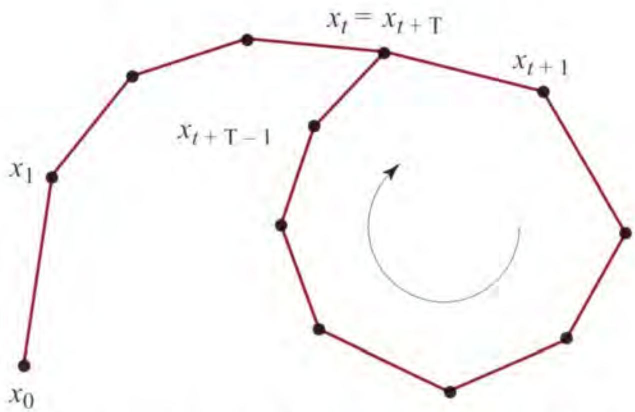
et ainsi de suite si bien que le système est périodique de période T à partir de l'instant t. La période peut être très grande. Ainsi pour $a = 0{,}2356$ comme pour $a = 0{,}2357$, elle est de 250. Elle peut être égale à 1 comme pour les conditions initiales telles que 1/2, 1/4, 3/4, etc. Pour $a = 0{,}2355$, la période est égale à 50. Mais, dans tous les cas, au milieu d'un chaos général, on retrouve un ordre valable pour certaines conditions initiales.

Une définition du chaos

La dynamique chaotique est un domaine neuf, les définitions ne sont pas encore bien fixées. Cependant, toutes mettent l'accent sur l'extrême sensibilité à la condition initiale. La plus simple est sans doute celle de Robert Devaney.

La dynamique d'une fonction f de [0,1] dans [0,1] est dite chaotique (au sens de Devaney) si elle vérifie les deux conditions suivantes :

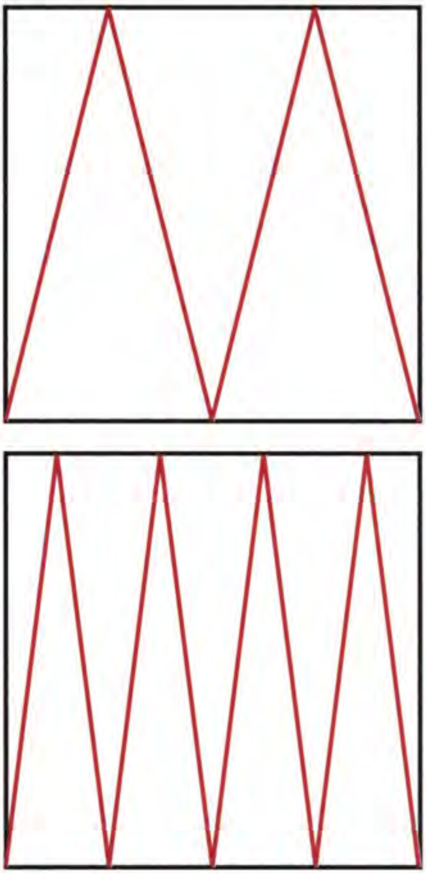
Robert Devaney est né en 1948 aux Etats Unis. Il est actuellement professeur à l'université de Berkeley en Californie. Il est connu pour son livre *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* paru en 1985. On lui doit une définition du chaos.



Quand on figure les états comme des points du plan,on comprend pourquoi xt, xt + 1, xt + T – 1 est appelé un cycle de f.

La **gestion des stocks** peut également être chaotique. Une différence infime dans les conditions initiales peut entraîner une demande importante sur un article. Pensez par exemple à la vente des parapluies. Il faut en stocker assez pour ne pas perdre de ventes éventuelles mais pas trop car celà a un coût. Il en est de même pour beaucoup de produits. De nos jours, pour éviter les frais de stockage, la plupart des hyper-marchés ainsi que les marchés d'intérêt national tel celui de Rungis fonctionnent en flux tendus. Les stocks dépassent rarement de plus de 10% les ventes journalières. Celles-ci doivent donc être évaluées de façon très précises en fonction des paramètres pertinents. Ce serait les prévisions météorologiques en ce qui concerne les parapluies, les ventes de la veille, les campagnes publicitaires ou d'autres évènements encore pour des produits différents. Dans tous les cas, les modèles utilisées sont avant tout mathématiques et tiennent compte du côté chaotique de certaines ventes.

1) Si a et b sont deux points de [0,1], il existe au moins une condition initiale x_0 aussi proche que l'on veut de a telle que la suite x_t approche aussi près que l'on veut de b.
2) Si a est un point de [0,1], il existe au moins un cycle de la suite x_t aussi proche que l'on veut de a.
Pour saisir les raisons du caractère chaotique de la dynamique de la fonction tente, l'idée essentielle est de représenter les courbes d'équations $y = f[f(x)]$, $y = f[f[f(x)]]$, etc. (voir figure). Très vite, nous obtenons un grand nombre de tentes côte à côte si bien qu'il suffit d'une différence infime sur la condition initiale pour changer de tente. Ainsi, on peut donc obtenir n'importe quelle valeur à l'indice t en question. Une démonstration précise figure en encadré. Cette preuve reste valable dès que la courbe d'équation $y = f(x)$ garde une forme similaire.



Deux premières itérées de la fonction « tente ». Nous obtenons des tentes côte à côte car nous appliquons f à nouveau sur chaque segment moitié.

Bifurcation

C'est le cas de la fonction logistique $f(x) = 4x(1 - x)$. Ce nom de logistique vient de la biologie. Il s'agit d'un modèle de croissance de population. En fait, cette fonction n'est pas la seule à être nommée ainsi. C'est le cas de toutes celles de la famille $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ pour $0 \leq \lambda \leq 4$. Elles ne sont pas toutes chaotiques. En fait, elles le sont à partir d'une certaine valeur du paramètre λ. Cette valeur est égale environ à 3,57. A ce niveau, se produit une bifurcation entre deux dynamiques très différentes.

Effet papillon

Revenons à des chaos plus naturels. Les phénomènes que nous venons de décrire sur des exemples mathématiques avaient été oubliés après Poincaré pour être redécouvert par Edward Lorenz. En 1963, il s'occupait de météorologie. Après de nombreux calculs sur ordinateur, il s'aperçut que la connaissance des lois physiques dont dépendent les phénomènes atmosphériques ne permet pas de prévoir le temps à moyen terme. Un simple battement d'aile de papillon perdu dans un coin du monde suffit pour provoquer un déplacement de l'air qui modifie la dynamique de l'atmosphère. Mais, voici ses paroles exactes :
« Au cours de notre travail, nous décidâmes d'examiner l'une des solutions de manière plus détaillée ; nous prîmes des données intermédiaires qui avaient été imprimées par l'ordinateur et les introduisîmes comme de

nouvelles données initiales. A notre retour, une heure plus tard, après que l'ordinateur eut simulé environ deux mois de temps, nous découvrîmes qu'il était en désaccord total avec la solution qu'il avait fournie antérieurement. Notre première réaction fut de suspecter une panne de machine, ce qui n'avait rien d'inhabituel, mais nous comprîmes rapidement que ces deux solutions n'émanaient pas de données identiques ; l'ordinateur faisait les calculs avec six décimales mais n'en n'imprimait que trois, si bien que les nouvelles conditions initiales étaient égales aux anciennes plus de petites perturbations. Ces perturbations s'amplifiaient, doublant tous les quatre jours du temps simulé, si bien qu'au bout de deux mois les solutions allaient chacune de son côté. J'en conclus immédiatement que si les véritables équations régissant l'atmosphère se comportaient comme ce modèle, il serait impossible de faire des prévisions météorologiques détaillées à long terme. »

Le non linéaire

Le chaos est souvent assimilé à juste titre au non linéaire. Dans l'encadré sur le cas classique, on peut voir le caractère linéaire de l'évolution du système au voisinage de son point fixe. Les dynamiques linéaires ont l'avantage de pouvoir être modélisées par une simple réduction. Vous faites une maquette au dixième ou au centième, vous faites vos mesures, multipliez par dix ou cent suivant le cas et vous avez le résultat cherché. Dans le cas du non linéaire comme pour la météorologie, une maquette ne sert à rien. Pour cette raison, les essais en soufflerie doivent être faits en vraie grandeur. De même les effets de turbulence ne sont pas linéaires, une fusée Ariane a explosé pour cette raison. Dans tous ces cas, il y a deux solutions : l'essai en vraie grandeur ce qui est assez cher ou l'utilisation d'un modèle mathématique. En fait, on commence par le modèle pour continuer par l'essai, c'est plus économique et plus sûr.

H. L.

Preuve du chaos de la fonction « tente »

Pour t assez grand, la ligne brisée d'équation $y = f[f[\ ...[f(x)]...]]$ (où le symbole f apparaît t fois) est la ligne brisée $A_{0,t}, A_{1,t}, \ldots, A_{2^t,t}$ où $A_{p,t}$ est le point d'abscisse $\dfrac{p}{2^t}$ et d'ordonnée 0 si p est pair, 1 sinon.

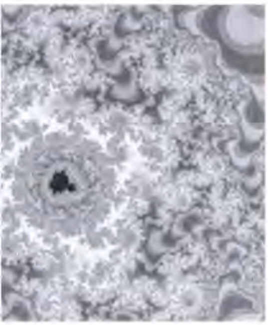
Soit $\delta > 0$, pour t assez grand, $\dfrac{1}{2^t} < \delta$ donc il existe p tel que l'intervalle $\left[\dfrac{p}{2^t}, \dfrac{p+1}{2^t}\right]$ soit contenu dans l'intervalle $]x - \delta, x + \delta[$ et donc l'image par f^t de cet intervalle est l'intervalle $[0,1]$ tout entier. La fonction f vérifie donc la condition (1).

D'autre part, la fonction continue qui à x fait correspondre $f^t(x) - x$ a des signes opposés en $\dfrac{p}{2^t}$ et $\dfrac{p+1}{2^t}$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule sur $]x - \delta, x + \delta[$. Ainsi, cet intervalle contient un élément d'un cycle de f. La fonction f vérifie donc la condition (2).

par Hervé Lehning

Géométrie fractale

Au delà des structures très régulières comme les trajectoires des planètes, la géométrie classique ne permet pas de modéliser correctement les phénomènes naturels complexes. La géométrie fractale est un nouvel outil pour étudier ces structures.



La nature est complexe. Les objets que l'on y rencontre ne se laissent pas modéliser par les figures usuelles de la géométrie classique. Les montagnes ne sont pas des cônes, les nuages ne sont pas des sphères. Et que dire de notre système vasculaire ou des branches d'un arbre, de la surface des matériaux ou de la Terre ?

Comment modéliser ?

Prenons un chou-fleur. En détachant un bouquet, nous obtenons un petit chou-fleur très semblable au chou-fleur initial. Sans faire de biologie, nous pouvons nous douter que cette structure vient de la formation même du légume. Cette similitude du local et du global se retrouve dans bien des objets naturels : côte rocheuse, flocons de neige, alvéoles pulmonaires, etc.
Cette idée de similitude du microscopique et du macroscopique est à l'origine de la création des objets curieux que Benoît Mandelbrot a baptisés fractals à la fin des années 1960. L'exemple le plus simple a été inventé bien plus tôt par Helge von Koch au début du XX^{e} siècle. Sa courbe se construit à partir d'un simple triangle équilatéral (voir ci-dessous).
En reproduisant ainsi divers motifs, nous pouvons créer bien d'autres formes telle celle représentée ci-contre. Les dessins obtenus sont souvent très beaux.

Le monde d'application des fractales est donc immense même si nous pouvons y voir un effet de mode.

Un exemple simple

Les objets de la géométrie classique sont classés suivant leur dimension ce qui permet éventuellement de les mesurer. Les objets de dimension 1 sont les lignes ou courbes, ceux de dimension 2 les surfaces et ceux de dimension 3 les solides. Aux objets de dimension 1, on associe une longueur, à ceux de dimension 2 une aire et à ceux de dimension 3 un volume.

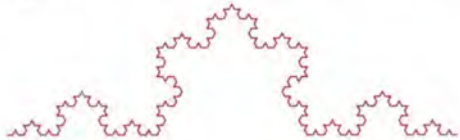
Formation de la courbe de von Koch

La courbe floconneuse représentée ci-dessous est un exemple classique de courbe fractale. Elle est obtenue par reproduction de même motif simple indéfiniment.

Première étape : *un simple motif triangulaire*

Deuxième étape : *on répète ce motif sur chaque segment*

Troisième étape : *et on recommence*



Quatrième étape : *et on recommence indéfiniment. L'empilement final est incompréhensible sans rechercher chacun des triangles*

En première analyse, la courbe de von Koch ou la côte de Bretagne semblent être des lignes. Elles ont donc une longueur. Quelle est celle de la côte bretonne ?

Prenez une carte de France à l'échelle 1 :1 000 000. Mesurez en n'oubliant aucun recoin. Refaites le calcul avec une carte au 1 : 250 000 puis au 1 : 100 000. Si vous êtes très courageux, recommencez avec des cartes au 1 : 50 000. Si vous trouvez le même résultat, vous avez triché. En effet, quand la précision de la carte est meilleure, de petites criques se découvrent et elles ont une longueur que vous n'aviez pas comptée quand vous utilisiez une carte plus grossière.

Il en est de même de la courbe de Koch. Lors de sa construction, chaque fois que l'on ajoute un triangle, on augmente sa longueur du tiers. Ainsi, après n étapes, nous obtenons une longueur égale à $(4/3)^n$. On en déduit que la longueur de la courbe est infinie. Si on veut mesurer son aire, on trouve 0.

En fait, ni la longueur ni l'aire ne sont la bonne mesure d'un tel objet. En utilisant, une généralisation de la notion de dimension proposée par Felix Hausdorff, la courbe de Koch a une dimension non entière. Plus précisément, elle est égale à

$$2\,\frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

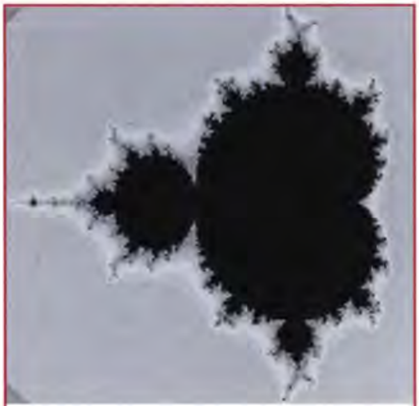
Helge von Koch est né à Stockholm en 1870 et mort dans la même ville en 1924.

Benoît Mandelbrot est né en 1924 à Varsovie. Sa famille a émigré en France en 1936. Depuis la fin des années 50, il travaille aux Etats Unis.

À quoi ça sert ?

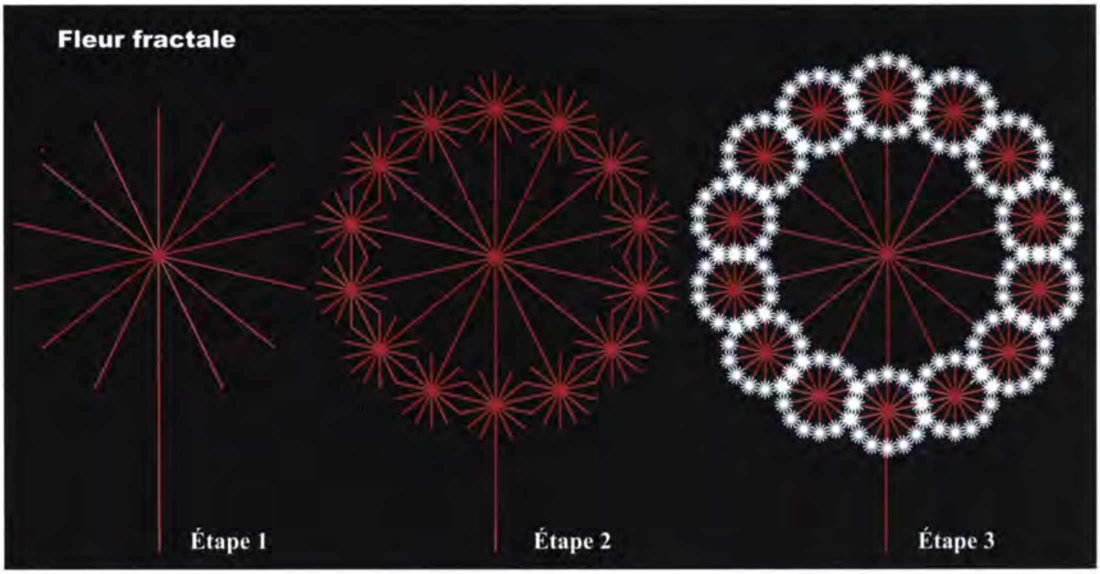
C'est la rançon du succès, le mot « fractal » est devenu porteur. L'utiliser pour faire moderne est visiblement tentant. Fouillez l'internet. Vous trouverez bien des emplois de ce mot dans lesquels Mandelbrot ne reconnaîtrait pas sa création. Méfiez-vous donc si un enseignement se dit « fractal ». Il est possible que cela ne soit qu'un mot pour faire « à la pointe » du progrès. Dans un autre domaine, nous ne prendrons pas position sur ce que l'on peut (ou ne peut pas) appeler peinture ou musique fractale.

Ces remarques faites, les fractales fournissent un modèle plus adapté à certaines réalités que la géométrie usuelle. Nous retrouverons donc les fractales dans l'étude de la surface des matériaux, en biologie (système vasculaires), en géologie (sédimentation), en astronomie, etc. En mathématiques appliquées à l'informatique, on les retrouve dans des techniques de compression d'images. En économie, elles servent également dans l'étude des marchés financiers, dans la vente où elles permettent de reconstituer les attentes des clients potentiels et la gestion où elles proposent un nouveau type d'organisation de l'entreprise. Le monde d'application des fractales est donc immense, même si nous pouvons y voir aussi un effet de mode.



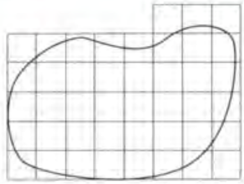
L'ensemble de Mandelbrot est lié à l'étude de l'itération des polynômes complexes du second degré. C'est compliqué mais n'est-ce pas beau et fascinant ?

H. L.



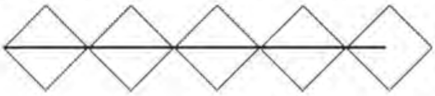
Une dimension non entière

Kolmogorov (1903-1987) a proposé une notion qui, a priori vient de l'idée de mesure. Partant d'un domaine borné A du plan, il compte le nombre minimal N (r) de carrés de côtés $r > 0$ nécessaires pour le recouvrir :



Recouvrement d'une partie bornée par des carrés de côtés r.

Et il définit sa dimension comme étant : la borne inférieure des nombres $d > 0$ tels que r^d N (r) soit borné au voisinage de zéro. Par exemple, pour un segment de longueur a, il est facile de trouver le recouvrement optimal :

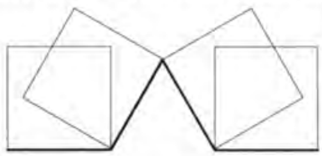


Recouvrement optimal d'un segment.

On en déduit que : $\frac{a}{r\sqrt{2}} - 1 \leq N(r) \leq \frac{a}{r\sqrt{2}}$ donc r^d N (r) tend vers 0 quand r tend vers 0 si $d > 1$ vers $+\infty$ si $d < 1$ et vers $\frac{a}{\sqrt{2}}$ si $d = 1$. La dimension est donc égale à 1. On trouve de même la dimension 1 pour les courbes usuelles et 2 pour les surfaces.

Pour calculer la dimension de la courbe de von Koch, nous affinons notre méthode. Nous commençons en fait par utiliser des carrés de longueurs particulières : celles des côtés de l'étape n de la construction de von Koch. Par exemple, examinons le recouvrement suivant, valable à l'étape numéro 1 :

Recouvrement de la courbe de von Koch



On démontre assez facilement que les étapes successives restent englobées dans ces carrés construits sur les côtés des triangles. On peut donc itérer le processus. Ainsi, il nous reste à calculer le nombre cn et la longueur rn des côtés à l'étape n. Ces deux suites vérifient les relations de récurrence :

$$\begin{cases} r_{n+1} = \dfrac{r_n}{3} \\ c_{n+1} = 4c_n \end{cases}$$

En tenant compte des valeurs pour n = 0, cela donne : $r_n = \frac{a}{3^n}$ et $c_n = 3.4^n$ d'où l'on conclut que :

$N(r_n) \geq 3.4^n$.

D'autre part, du fait de leurs distances mutuelles, un carré de l'étape n ne peut contenir plus de deux sommets de cette même étape. Le nombre de sommets étant égale au nombre de côtés, . Pour conclure, il suffit de remarquer que, comme la suite (rn) est décroissante et tend vers zéro, pour tout r > 0, il existe n tel que : rn+1 £ r £ rn et donc, puisque la fonction N est décroissante :

$$\frac{3}{2}.\frac{a^d}{3^d}\left(\frac{4}{3^d}\right)^n \leq r^d N(r) \leq 12a^d\left(\frac{4}{3^d}\right)^n$$

On en déduit que la dimension de la courbe de von Koch est égale à $\frac{\ln 4}{\ln 3}$ =2 $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ c'est-à-dire 1,26 à 10^{-2} près. a notion de dimension fractale permet donc l'existence de dimensions non entières.

par Jean-Christophe Novelli

Les automates : maths avant tout

Les automates permettent aux hommes de se consacrer à des tâches plus nobles que serrer les mêmes boulons toute la journée. Imiter la machine qu'est notre cerveau est une toute autre affaire.

Un des premiers ordinateurs : l'ENIAC.

Depuis très longtemps, les hommes cherchent à construire des machines intelligentes qui puissent alléger leur travail. Quel bonheur ce serait de ne plus aller à l'usine ou au bureau tous les jours en se faisant remplacer par une machine !

Construire une machine qui sache serrer des boulons toute la journée n'est pas le plus difficile, et on sait le faire depuis quelques temps. Plus généralement, on sait créer des machines qui font des mouvements répétitifs (des horloges par exemple, qui ont aussi le mérite de les faire de façon régulière) et qui n'utilisent aucune intelligence.
Alors, comment faire « comme le cerveau », cette gigantesque machinerie ? Comment s'y prendre pour faire, avec des moyens simples, la même chose que nos chères synapses ?

Comment s'y prendre pour faire, avec des moyens simples, la même chose que nos chères synapses ?

La préhistoire des automates

Prenons le problème à rebours. Descartes, en son temps, comparait le comportement des animaux, et celui, pour une large part, des humains à celui d'automates. En effet, les animaux réagissent à des stimuli et réagissent toujours de la même façon lorsqu'ils sont soumis aux mêmes conditions. Ceci ressemble à l'intuition que l'on a d'un automate : un objet qui répète les mêmes mouvements lorsqu'on lui donne les mêmes consignes.

A l'époque de Descartes, on n'avait pas d'automate à disposition et le meilleur moyen qu'on avait pour soulager l'humain de ses lourdes tâches était l'utilisation d'outils.
A la fin du siècle dernier, on a construit des automates pour remplacer les humains dans les tâches les plus ingrates. Mais là-dedans, aucune intelligence, aucun raisonnement. Alors, bien sûr, on avait aussi construit des automates soi-disant intelligents, comme celui qui avait joué aux échecs contre Napoléon (et qui l'avait battu !), mais ceux-là n'étaient que des farces destinées à mystifier le public : des humains les manipulaient discrètement, comme des marionnettistes.

L'avènement de l'informatique

La situation allait radicalement changer avec l'avènement d'une révolution technologique : l'informatique. Peu avant, de brillants mathématiciens, précurseurs dans l'âme, avaient commencé à travailler sur les questions théoriques soulevées par les automates. On venait de passer de l'ère des marionnettes aux objets conceptuels et ce progrès allait être décisif : on allait d'un objet qu'on essayait de « bricoler » à la main à un objet que l'on définissait. Ainsi, construire une maison sans plan est à peu près possible mais construire un édifice important sans étude théorique préalable est proprement irréalisable.

Construire une machine sans fixer de cadre autour l'est tout aussi peu et c'est ce cadre que les mathématiciens allaient apporter sans tarder à ces assemblages d'électronique. De grands noms, tels ceux de Turing, Gödel, Kleene et Shannon (pour ne citer que les plus célèbres) allaient s'illustrer dans ces recherches d'où allait naître l'informatique contemporaine dont la théorie des automates est un des thèmes.

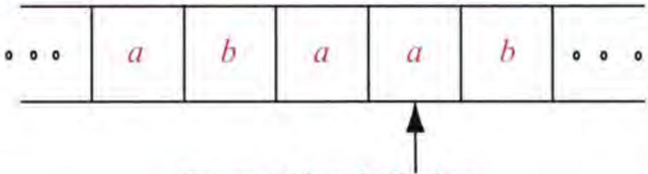
Alan Turing est né à Londres en 1912 et mort à Wilmslow en 1954. Pendant la seconde guerre mondiale, il travailla pour lees armées britanniques et américaines au service de décodage. Il contribua ainsi de façon essentielle au décryptage des messages de l'armée allemande. Ainsi, au cours de la bataille d'Angleterre, l'aviation britannique connaissait à l'avance les cibles de la Luftwaffe. Ses avions de chasse furent toujours au rendez vous des bombardiers allemands.

Machines de Turing

Turing a proposé dès 1936 le principe d'une machine (appelée aujourd'hui machine de Turing) comme suit. On imagine un ruban infini divisé en petites cases dans lesquels on peut inscrire un symbole pris dans une liste finie. Un mécanisme, baptisé tête, lit le contenu d'une case, modifie éventuellement son contenu en écrivant dedans puis se déplace soit sur la case immédiatement à droite, soit sur la case immédiatement à gauche. Décrivons le

Pourquoi ordinateur ?

Le français est la seule langue où l'on dit « ordinateur », et non « calculateur ». Ce mot, qui se trouve dans *Le Littré* comme adjectif désignant « Dieu qui met de l'ordre dans le monde » a été proposé non par un scientifique, mais par le philologue Jacques Perret, en 1955, à IBM France, et a été retenu contre l'anglicisme computeur.
Le choix de ce qualificatif divin n'est sans doute pas innocent et trahi l'image de l'ordinateur dans les mentalités de l'époque.

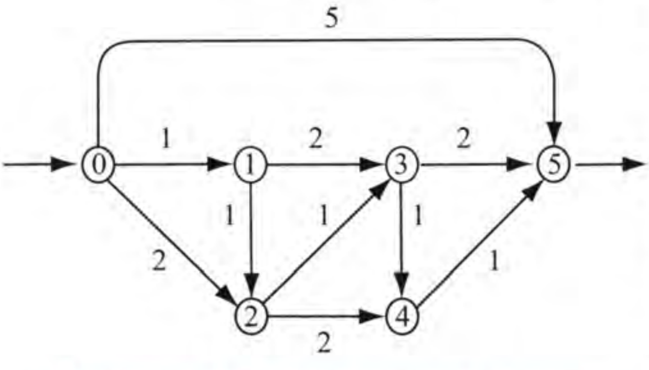


Une machine de Turing

mécanisme dans son ensemble : la tête se trouve dans un certain « état » interne. Lorsqu'elle lit un symbole, elle peut accomplir une action (écrire un symbole), puis changer d'état interne puis se déplacer dans une direction. Autrement dit, une machine de Turing est décrite par un nombre fini de suites de la forme {2, 6, 3, 5, D} qui se lisent : si la machine est dans l'état 2 et lit le sixième symbole, elle écrit le troisième symbole, se met dans l'état 5 et se déplace vers la droite. L'idée des machines de Turing est tout à fait passionnante car elle contient dans son germe tous les principes des ordinateurs d'aujourd'hui. Elle contient aussi l'idée des automates, même s'il est revenu à Kleene d'en présenter le premier une vision limpide.

Qu'est-ce qu'un automate ?

Un automate, au sens mathématique (ou plutôt informatique) du terme, est un objet composé d'états qui représentent des situations (je possède un euro, je possède quatre euros) et de transitions qui représentent les évolutions entre situations (si j'ai un euro et qu'on m'en donne trois, j'en possède alors quatre). Certains états sont dits initiaux, c'est-à-dire que l'on commence toujours dans ces états. Certains états sont dits terminaux, c'est-à-dire que l'on a accompli son travail quand on est dans un tel état.



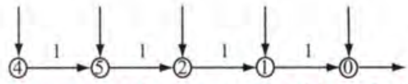
L'automate d'un distributeur de boissons.

Examinons des conséquences pratiques de cette formulation abstraite. Un distributeur délivre une cannette de Orancolmaid moyennant le paiement de la somme de 50 centimes. Il accepte les pièces de 10, 20 et 50 centimes. Pour déterminer, si elle a reçue une somme suffisante, la machine dispose de 6 états, notés 0, 1, 2, 3, 4 et 5 dont le nom correspond à la somme déjà perçue. La machine change d'état en fonction de chaque nouvelle pièce qu'on lui donne et de la somme qu'elle a déja perçue. Graphiquement, on représente les états par des ronds contenant leur numéro et on représente les transitions par des flèches allant d'un état à un autre. Par exemple, la flèche allant du rond marqué 1 au rond marqué 3, et portant un 2, signifie que la machine compte bien (!) : si elle a 10 centimes (état de départ) et si l'utilisateur met une pièce de 20 centimes (transition), elle a, après cette opération 30 centimes (état d'arrivée).

La flèche tout à gauche du dessin et ne venant de nulle part est une convention pour noter un état initial. Ici, il est bien clair que le seul état de départ est celui où la machine est vide (sauf si le client précédent a laissé de l'argent dedans mais le phénomène est assez rare). La flèche tout à droite du dessin et n'allant nulle part est une convention pour noter un état terminal. En effet, si la machine arrive dans cet état, elle doit nous donner notre boisson ! Elle quitte donc ce circuit pour accomplir une action mécanique.

Question : en suivant le même principe, pourriez-vous dessiner un automate qui rend le minimum de monnaie sur des sommes allant de 1 à 2 euros pour des articles valant 50 centimes ?

A ce sujet, une anecdote amusante s'est produite au moment de l'introduction (il y a maintenant quelques années de cela) des distributeurs de billets de banque : l'utilisateur tapait la somme voulue (en francs à l'époque), puis la machine lui donnait un billet de 100 F et regardait si le solde était nul. Si celui-ci n'etait pas nul, elle lui redonnait un billet et testait si le nouveau solde était nul, etc. Ceci se modélise très bien à l'aide de l'automate ci-dessous.



Comment dévaliser cette billeterie ? (L'unité est la centaine de francs.)

La faille d'un automate

Voyez-vous la faille d'un tel automate ? Bien sûr, il suffisait de demander 0 F et on vidait le coffre !!
Depuis, cette petite plaisanterie a été réglée et on ne peut plus vider de banque aussi facilement !
D'ailleurs, quelle était l'erreur des concepteurs ? Ils ont oublié qu'il existait une transition partant de l'état 0 et aboutissant à l'état -100. Celui-ci aboutissant lui-même à l'état -200, etc. Naturellement, en faisant d'abord le test du solde puis le versement d'un billet de 100 F, on évitait la petite plaisanterie mais on était loin d'un automate sachant rendre correctement la monnaie.
L'enseignement qu'on peut tirer de cette histoire est qu'avant de se servir d'un objet utilisant un procédé automatique, il vaut mieux s'assurer qu'on arrive toujours, au bout d'un nombre fini d'étapes, dans un état terminal.
Autrement dit, ne pas mettre en route un projet avant d'avoir fait un automate complet.

Conclusion

Depuis les années 40-50, de très nombreuses recherches ont été menées sur les automates, qui sont devenus des objets centraux de l'informatique théorique. Ils fournissent des descriptions très visuelles et par conséquent très pratiques à utiliser.
La profondeur d'un tel objet mathématique vient, comme souvent, de son extrême simplicité et de son caractère universel : on peut réellement tout décrire à l'aide d'automates, que ce soit les systèmes de réservations de billets SNCF, des chaînes de montages en usine ou des organisations de sites Web. De grands et beaux théorèmes ont été démontrés sur les automates, sur les suites d'actions qui permettent de passer d'un état initial à un état terminal mais ceci est une autre histoire...

J.-C. N.

Claude Shannon est né en 1916 à Gaylord (Etats Unis). Il est à l'origine de la théorie mathématique de l'information.

La joueuse de Tympanon

Vue interne du mécanisme et vue d'ensemble.
Cet automate est exposé au musée des arts et métiers à Paris.
La joueuse de tympanon fut la contemporaine et la favorite de Marie-Antoinette (1785).
Réalisée par l'horloger P. Kintzing et l'ébéniste D. Roentgen.

Les carrés magiques en trois questions

On a longtemps attribué une vertu magique aux carrés du même nom.
De nos jours, il nous reste un jeu mathématique.

On considère un carré constitué des n^2 premiers nombres rangés en lignes et colonnes. Un tel carré est dit un carré magique d'ordre n si les sommes des lignes, des colonnes et des diagonales sont toutes égales.
L'exemple ci-dessous est un carré magique d'ordre trois. Il est intéressant de considérer la somme S des lignes, des colonnes et des diagonales. Le nombre S est égal à la somme des nombres de 1 à n^2 divisée par n.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

1. Ordre deux

Montrer que, s'il existe un carré magique d'ordre deux alors S est égale à 5. En déduire qu'il n'existe pas de carré magique d'ordre deux.

2. Ordre trois

Montrer que, s'il existe un carré magique d'ordre trois alors S est égale à 15.
Montrer que le nombre 5 est au centre puis que 1 est au centre d'un côté.
En déduire que les carrés magiques d'ordre trois sont au nombre de huit et qu'il se déduise tous par rotation et symétrie du carré donné en exemple.
La situtation se complique à partir de l'ordre quatre. On a dénombré 880 carrés magiques d'ordre quatre, ensuite on ne sait pas combien il en existe.

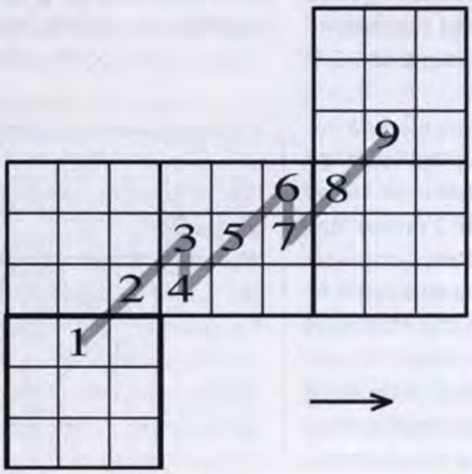
3. Ordre quatre

Compléter le carré suivant de façon à obtenir un carré magique :

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

4.

À la fin du XVIIe siècle (1693), De La Loubère, après un voyage au Siam, publia une méthode apparentée à celle de Bachet, quoique différente. Cette méthode consiste à partir de la case du milieu de la première ligne, puis à monter en diagonale, de 1 à n (1 à 3 sur l'exemple 3 3 représenté ci-contre), à des cendre verticalement d'une case, puis à reprendre la marche en diagonale montante de n+1 à 2n, etc... On ramène ensuite les nombres écrits à l'extérieur du carré de départ dans ce carré par des translations (ce qui revient à considérer le carré de départ comme un tore, les deux bords horizontaux étant confondus, de même que les deux bords verticaux). Pour l'ordre 3, la méthode de La Loubère donne évidemment le même carré que la méthode de Bachet, puisque ce carré est unique. Par contre, pour l'ordre 5, vous obtiendrez un carré différent de celui de Bachet. Construisez ce carré.

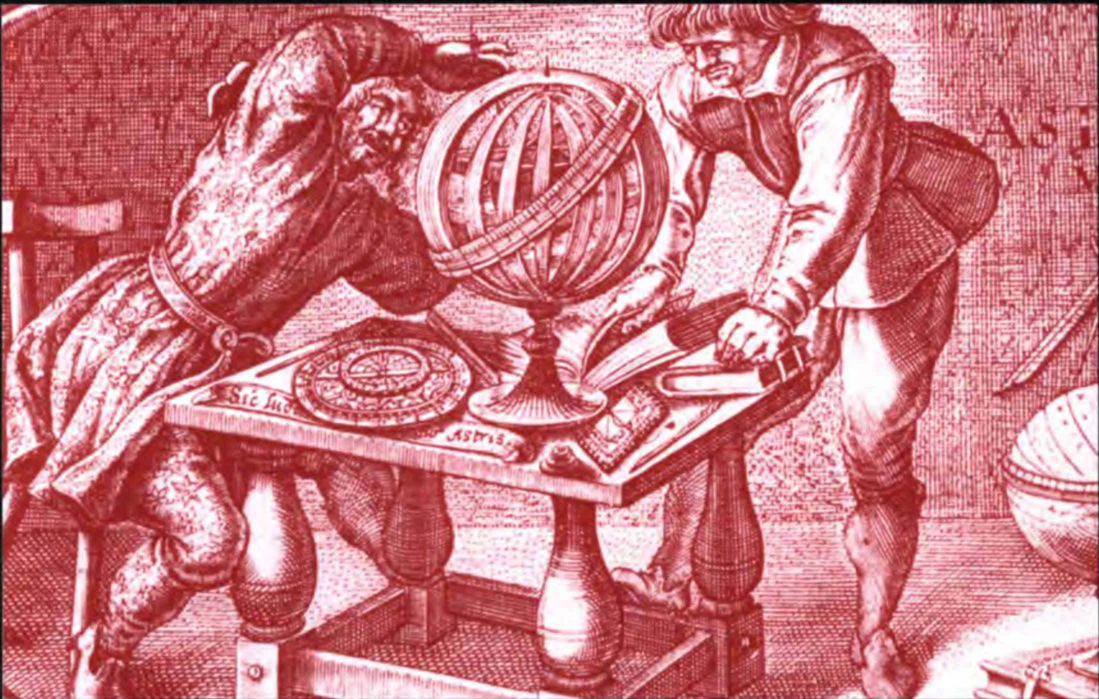


→

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Solutions p.144

Évolution des techniques

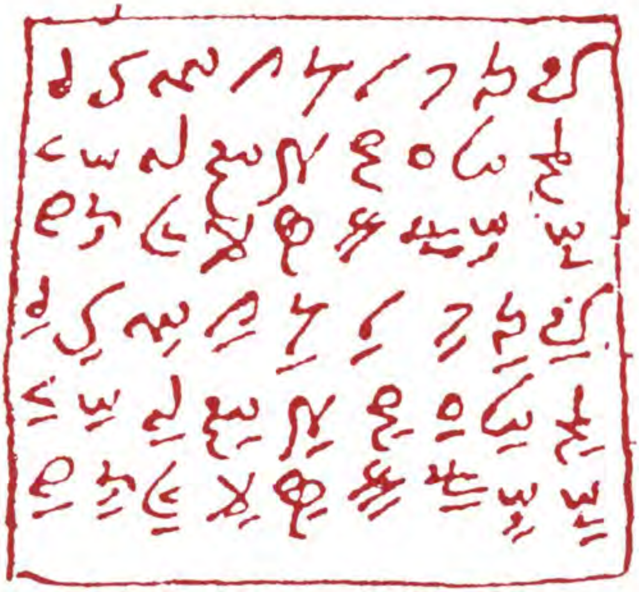


Pratique, rapide, efficace : notre système actuel de numération cumule bien des avantages. Il est le fait d'une lente maturation depuis les Arabes jusqu'au Moyen-Age. Cette étape était nécessaire avant de commencer à calculer avec des lettres, à faire de l'algèbre. En inventant les repères qui portent son nom, Descartes a ensuite ramené la géométrie à l'algèbre.
Les mathématiques sont en partie l'art de pratiquer les calculs. Le métier du mathématicien est de les éviter, les réduire ou les simplifier. Il est plus facile d'additionner que de multiplier : les logarithmes sont nés de ce constat.
Les logiciels de calcul symbolique prennent en charge certains des calculs longtemps effectués « à la main ». Vont-ils pour autant remplacer l'activité mathématique humaine ?

par Ahmed Djebbar

Symbolisme et mathématiques arabes

Les Arabes du Moyen-Age sont reconnus pour avoir transmis l'héritage mathématique de l'antiquité grecque. Ce point essentiel ne doit pas faire oublier qu'ils l'ont repensé et perfectionné en particulier au niveau du symbolisme.



Chiffres de Fès

Le symbolisme est apparu dans les mathématiques arabes d'abord avec les différentes représentations des chiffres et des nombres entiers : numération alphabétique en astronomie, numération *rûmî* (dite aussi de Fès) dans les services de comptabilité de l'Occident musulman et, bien sûr, numération indienne en calcul qui admet deux variantes régionales (voir l'encadré « *Les chiffres arabes* »).

Calcul sur les polynômes

Le développement de l'algèbre a ensuite entraîné la généralisation de la notion d'équation et l'extension des opérations arithmétiques aux nouveaux objets : monômes et polynômes abstraits. Il était alors devenu nécessaire d'introduire un symbolisme permettant de répondre à la complexité des calculs en rendant leur présentation plus claire et en automatisant les opérations élémentaires. C'est ainsi qu'apparut, en Orient, le symbolisme des tableaux. Cela a consisté à assigner à chaque monôme de degré n la n-ième colonne puis à représenter un polynôme par ses seuls coefficients en mettant le coefficient associé à x^n dans la n-ième colonne. On obtient ainsi une série de nombres placés dans les colonnes correspondantes. Comme de plus, les mathématiciens arabes de l'époque avaient énoncé la règle des signes :

$$(+)(-) = - \qquad (-)(+) = -$$
$$(-)(-) = + \qquad (+)(+) = +$$

et la règle des puissances :

$$x^n \,.\, x^m = x^{n+m},$$

les opérations arithmétiques sur les polynômes devenaient alors presque automatiques, comme on peut le voir sur l'exemple suivant. Pour multiplier

$$3x^3 - 5x^2 + 7x - 1 + 2x^{-1} + 6x^{-2}$$

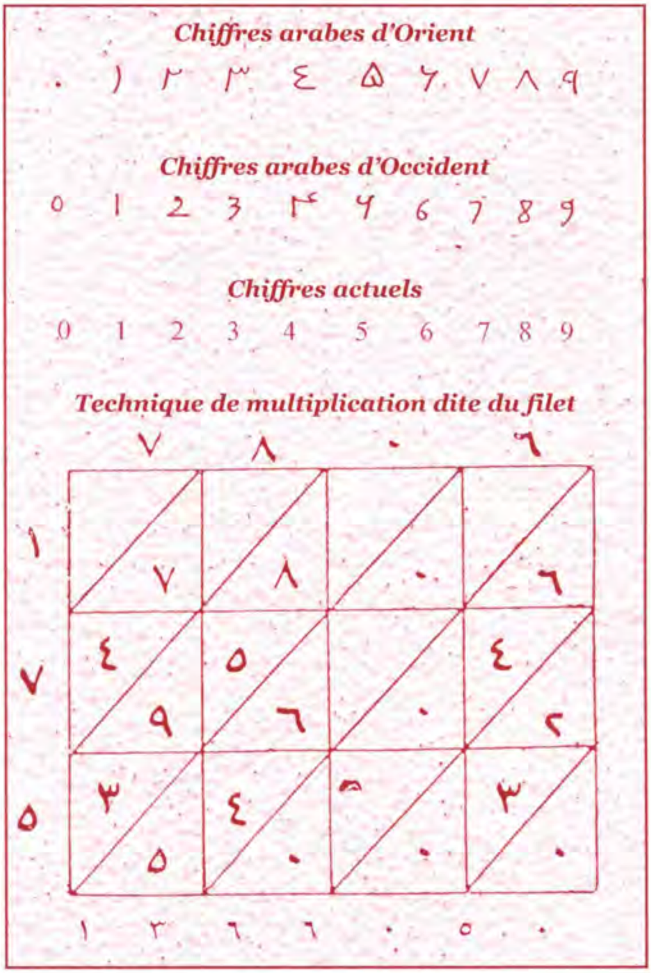
par

$$11x^2 - 9x + 4 - 3x^{-3},$$

on utilise le tableau de la page ci-contre. Le produit des deux polynômes est donc :

$$33x^5 - 82x^4 + 134x^3 - 94x^2 + 59x + 35 - 31x^{-1} + 3x^{-2} + 3x^{-3} - 6x^{-4} - 18x^{-5}$$

Ce symbolisme est utilisé pour la première fois par le mathématicien as-Samaw'al (mort en 1175), savant juif d'origine maghrébine converti tardivement à l'Islam, né et ayant vécu à Bagdad.



De nouveaux symboles

A peu près à la même époque, apparaissent de nouveaux symboles dans des ouvrages de calcul d'Espagne et du Maghreb, comme le *Livre de la démonstration et de la remémoration* d'al-Hassâr (XIIe siècle). Ces symboles ont permis de supprimer les ambiguïtés dans l'écriture des différents nombres irrationnels s'exprimant à l'aide des racines ainsi que des différents types de fractions (simples, composées, liées). Comme les fractions étaient abondamment manipulées non seulement par les enseignants et leurs élèves mais aussi et surtout par les spécialistes chargés de la répartition des héritages, le symbolisme a rendu le travail plus aisé. Parmi les symboles introduits, il y avait la fameuse barre de fraction et la lettre arabe *j* qui, lorsqu'elle surmonte un nombre signifie qu'on prend la racine de ce nombre. Cette lettre est d'ailleurs la première du mot arabe *jidhr* qui signifie « racine » (voir l'encadré).

Le symbolisme des fractions va être rapidement diffusé en Europe, en par-

Parmi les symboles introduits, il y avait la fameuse barre de fraction et la lettre arabe j qui, lorsqu'elle surmonte un nombre signifie qu'on prend la racine de ce nombre.

D'où vient le mot algorithme ?

Al-Khwarizmi

Malgré son petit air grec, ce mot, comme beaucoup commençant par al (comme alcool), vient de l'arabe. Al-khwarizmi est un mathématicien du IX^{e} siècle, originaire de la région du Khwarezm (actuellement en Ouzbékistan), d'où son nom. L'un de ses livres d'arithmétique a été traduit en latin sous le nom de liber algorismi (livre d'Al-khwarizmi). Du coup, on a désigné par algorismus le système de numération décimal, puis c'est devenu en français « algorithme » avec un sens plus général, par l'influence du mot arithmos (« nombre » en grec) et de « logarithme » qui en est un anagramme.

ticulier à travers le Liber Abaci, un des ouvrages du grand mathématicien italien du XIII^{e} siècle, Léonard de Pise (Fibonacci). C'est d'ailleurs lui qui dit, dans l'introduction de son livre, qu'il a appris les premièrs éléments du calcul à Bougie, une ville du Maghreb Central qui était alors un centre scientifique dynamique.

Fraction simple : $\frac{2}{3}$

Fraction liée :

$$\frac{352}{867} = \frac{2}{7} + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{7}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{1}{7}\right)\right)$$

Fraction non liée :

$$\frac{3}{8}\bigg|\frac{5}{6}\bigg|\frac{2}{7}\left(= \frac{3}{8} + \frac{5}{6} + \frac{2}{7}\right).$$

x^5	x^4	x^3	x^2	x	1	x^{-1}	x^{-2}	x^{-3}	x^{-4}	x^{-5}
		3	−5	7	−1	2	6			
			11	−9	4	0	0	−3		
33	−27	12	0	0	−9					
	−55	45	−20	0	0	15				
		77	−63	28	0	0	−21			
			−11	9	−4	0	0	3		
				22	−18	8	0	0	−6	
					66	−54	24	0	0	−18
33	−82	134	−94	59	35	−31	3	3	−6	−18

Multiplication de deux polynomes

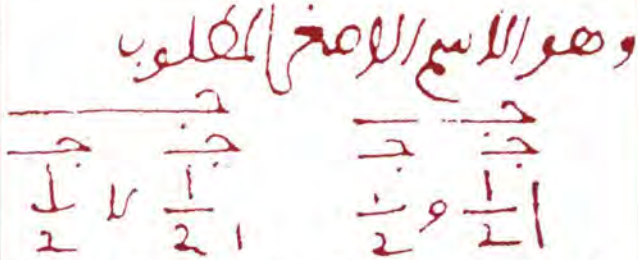
Symbolisme algébrique

Quant au symbolisme algébrique proprement dit, il apparaît, pour la première fois à notre connaissance, dans un ouvrage mathématique maghrébin du XII^{e} siècle, le *Livre de la fécondation des esprits sur l'utilisation des chiffres de poussière*, d'Ibn al-Yâsamîn (mort en 1204). Comme cet auteur ne s'attribue pas cette invention, on ne sait toujours pas qui en a eu l'idée le premier et dans quelle ville de l'Espagne ou du Maghreb. Nous constatons aussi que son utilisation dans les manuels et dans l'enseignement ne s'est vraiment étendue qu'à partir du XIV^{e} siècle, tout en restant d'abord limitée au Maghreb puis en se diffusant vers l'Égypte à partir du XV^{e} siècle.

En plus des chiffres, ce symbolisme utilise des lettres de l'alphabet qui sont les premières ou les dernières de certains mots : la lettre *sh*, qui est la première lettre du mot *Shay'* (chose), désigne l'inconnue, la lettre *m*, qui est la première du mot *mâl* (le bien, la fortune), désigne le carré de l'inconnue, la lettre *k*, qui est la première du mot *ka^{c}b* (cube), désigne le cube de l'inconnue, la lettre *l*, qui est la dernière lettre du mot *^{c}adala* (égaler), est le signe de l'égalité dans l'équation. Puis, à partir de la puissance quatrième, on utilise des combinaisons des lettres *m* et k : *mm* pour la quatrième puissance, *mk* pour la cinquième, *mmk* pour la septième, etc. Ces abréviations sont alors utilisées de la manière suivante : pour représenter, par exemple, le monôme « 3 carrés-cubes » (c'est à dire $3x^5$), on écrit le chiffre 3 et on met au dessus de lui les lettres *mk*. Pour représenter un polynôme on procède de la même manière en introduisant un nouveau symbole qui est le mot *lâ* ou le mot *illâ* (signifiant « moins ») pour retrancher deux monômes, et un vide ou la lettre *wâw* (= et) pour représenter la somme de deux monômes.

Rôle du symbolisme

Quant au rôle de ce symbolisme dans le cadre de la pratique mathématique quotidienne, il semble avoir évolué d'une fonction de simple support de la pensée, comme l'a été la notation alphabétique dans les textes et dans les figures géométriques, à un instrument de calcul et de résolution des équations ayant le même statut et la même fonction que le symbolisme actuel. D'une manière plus précise, on découvre, dans les manuels qui ont été publiés entre le XII^e et le XV^e siècle, quatre formes d'interventions différentes. Il y a des résolutions de problèmes où l'écriture symbolique accompagne l'expression verbale du calcul ou du raisonnement et en résume les étapes essentielles. Dans ce cas, l'écriture symbolique n'est pas indispensable au texte et elle n'est pas compréhensible sans lui. Dans d'autres problèmes, l'écriture symbolique est indispensable à la compréhension du texte qui expose la méthode et formule les étapes du calcul. Une troisième forme d'intervention est celle où le texte, qui est considérablement réduit, ne fait qu'annoncer ou définir les opérations écrites en symboles. La dernière forme est celle où le texte est pratiquement absent remplacé par une succession d'opérations exprimées symboliquement et séparées par des mots de liaisons. On trouve cette forme dans des manuels tardifs, parfois en marge du texte comme pour le résumer en écriture symbolique et pour tester la validité de ses résultats.

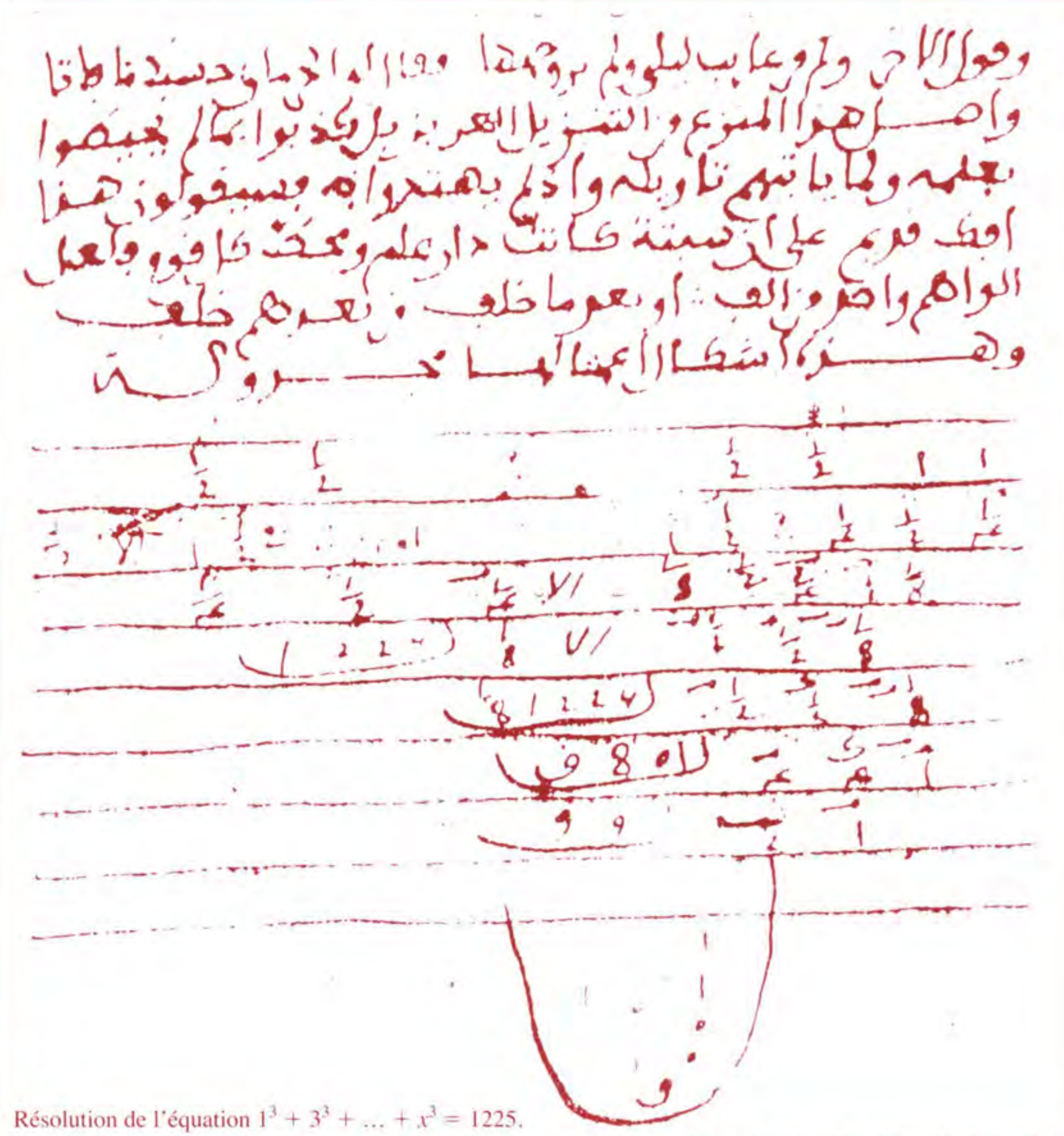


Symbole des racines carrées et barre de fraction. (à lire de droite à gauche, les + ne sont pas toujours notés)

En conclusion, il faut dire que malgré le caractère performant du double symbolisme (arithmétique et algébrique) qui vient d'être décrit, il n'a pas été un moteur dans le développement des mathématiques arabes. Il semble que la raison ne soit pas liée à la nature de ce symbolisme mais au fait qu'il soit arrivé trop tard, c'est à dire à une époque où les activités

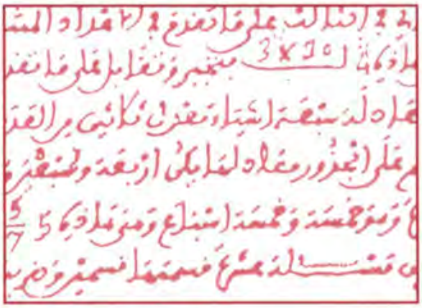
Et le mot algèbre ?

Encore un mot d'origine arabe, commençant par *al* (« le » en arabe). Il provient de la première partie du titre d'un livre du mathématicien Al-khwarizmi, dont nous venons de parler : *Al jabr wa l-muqâbalah*, signifiant « la restauration et la comparaison ». La restauration (qui signifie aussi la remise en place) en question est le passage des éléments négatifs d'une équation de l'autre côté du signe égal pour les rendre positifs : voilà le point de départ de l'algèbre. Vous pourrez d'ailleurs voir dans un dictionnaire espagnol que algebrista ne signifie pas « algébriste », mais « rebouteux » : en effet, celui-ci remet en place les membres luxés !



Résolution de l'équation $1^3 + 3^3 + \ldots + x^3 = 1225$.
Ibn Ghazi ramène d'abord cette équation à une équation du quatrième degré en utilisant la formule donnant la somme des cubes des n premiers entiers impairs d'où l'équation $2n^4 - n^2 = 1225$ (avec $x = 2n - 1$)

L'équation $4x = 30 - 3x$ dans un manuscrit



mathématiques arabes commençaient à connaître un phénomène de ralentissement dont les causes profondes étaient extérieures aux milieux scientifiques de l'époque, de sorte qu'aucune innovation technique n'était suffisante, à elle seule, à redynamiser la recherche en mathématique.

A. D.

Soyons logique

Dans le style des paradoxes de Russell , voici quelques casse-tête plus profonds qu'il ne paraît.

Le paradoxe du mensonge

À la frontière de Bordurie, les soldats demandent à chaque visiteur :
— Pourquoi venez-vous ici ?
Si le voyageur dit la vérité tout va bien, sinon il est pendu.
Un jour, un voyageur répond :
— Je viens ici pour être pendu.
En quoi cette réponse est judicieuse ?

Nous irons tous au paradis

Un homme qui vient de mourir arrive dans une salle où se trouvent deux portes. L'une mène au paradis, l'autre en enfer. Devant chaque porte se trouve un gardien. L'homme sait qu'un des deux gardiens ment toujours et que l'autre dit toujours la vérité. Mais il ne sait pas lequel ment et lequel dit la vérité. Ayant droit à une seule question, **que doit-il demander à l'un des deux gardiens afin de trouver la porte du paradis ?**

Solutions p.144

Guillaume François Antoine de l'Hospital

Guillaume François Antoine de l'Hospital (1661-1704), comte d'Autremont, marquis de Saint-Mesme renonça à sa carrière d'officier de cavalerie pour se consacrer aux mathématiques. Il fit éditer en 1696 le premier traité de calcul différentiel et intégral : *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Il est prouvé aujourd'hui que l'essentiel des résultats présentés dans cet ouvrage est dû au mathématicien suisse Jean Bernoulli. On a en effet retrouvé une lettre du Marquis de l'Hospital proposant à Bernoulli de lui acheter les droits de toutes ses découvertes mathématiques. En particulier, on doit attribuer la paternité de la célèbre règle de l'Hospital à Jean Bernoulli (1694).

Règle de l'Hospital : Soient f et g deux fonctions continues sur un voisinage V de x_0, dérivables sur V (sauf éventuellement en x_0). On suppose de plus que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et que g' est non nulle sur V (sauf éventuellement en x_0).

Si $\frac{f'}{g'}$ admet une limite en x_0 alors $\frac{f}{g}$ admet la même limite en ce point.

De l'Hospital, faussaire ou mathématicien de premier plan ? Fervent prosélyte du tout nouveau calcul infinitésimal pour le moins, propagateur talentueux des idées de ses contemporains de génie (Leibniz, Jacob et Jean Bernoulli), sûrement. De l'Hospital démontra ses talents mathématiques en résolvant le problème du *brachistochrone*, conjointement à Leibniz et Newton, à la suite d'un défi lancé par le mathématicien Johann. (Il s'agissait de trouver la courbe décrite par une bille pour aller d'un point à un autre dans le temps le plus court possible, en partant du repos, en n'étant soumise qu'à la force de la pesanteur, et en négligeant les frottements. La solution est un arc de cycloïde.)

 par Benoît Rittaud

Moyen-Âge :

la numérotation décimale s'impose

Pratique, rapide, efficace : notre système actuel de numération cumule beaucoup d'avantages. Il est le fait d'une lente maturation.

Fibonacci

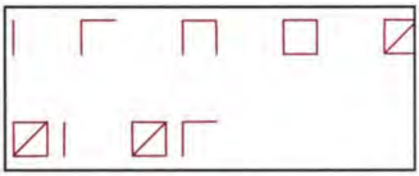
C'est au tournant du millénaire qu'un changement capital a lieu dans les mathématiques occidentales : l'apparition de la numération décimale.

Invention hindoue du premier millénaire, on parle le plus souvent de « chiffres arabes » pour désigner notre système actuel de numération. La raison en est que c'est par l'intermédiaire de l'Islam que les savants européens médiévaux en ont eu connaissance.

Une structure de données

Avant l'avènement de ce système de numération, dite « de position », les calculateurs occidentaux utilisaient encore les chiffres romains, un système particulièrement inefficace pour réaliser des opérations arithmétiques, même la plus élémentaire d'entre elles : l'addition.

Tout système de numération constitue ce qu'on appelle, depuis l'apparition de l'informatique, une structure de données. Pour représenter des nombres, il existe plusieurs structures de données, chacune étant plus ou moins adaptée à l'usage qu'on veut en faire. Par exemple, la « numération électorale » consiste à représenter les nombres de voix de chacun des candidats de la façon suivante :



Cette structure de donnée est plus efficace dans le contexte d'un dépouillement que la numération qui nous est habituelle : en utilisant cette dernière, il faut, à chaque nouveau bulletin, barrer le dernier chiffre écrit, puis marquer le suivant.

L'exemple précédent est certes un cas très isolé où la numération arabe n'est pas la plus performante. Dans la plupart des autres contextes, où les nombres doivent être ajoutés, soustraits ou même simplement écrits, la numération décimale est la plus efficace, car elle constitue une structure de données que l'on peut très bien exploiter pour la réalisation d'opérations (ou algorithmes) telles que l'addition ou la multiplication.

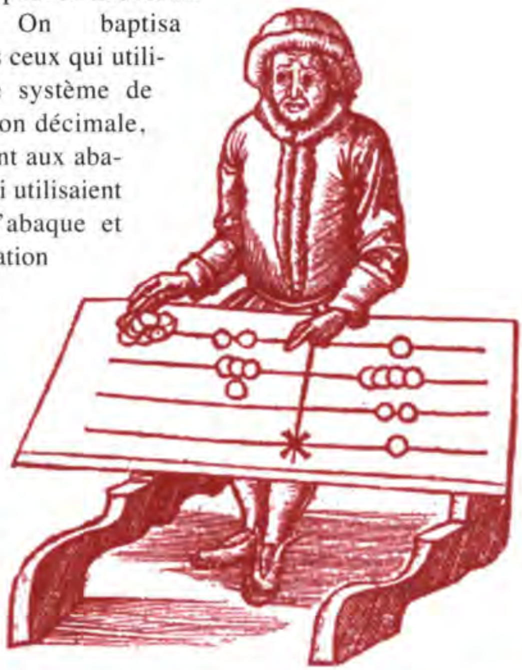
L'innovation du pape

Le premier à avoir importé la numération indo-arabe en occident est un certain Gerbert d'Aurillac, qui devint pape par la suite, le pape de l'an mil, sous le nom de Sylvestre II. Le système introduit par Gerbert devait permettre une modernisation des méthodes de calcul alors employées : à l'époque, on comptait encore à l'aide de ses doigts, mais aussi à l'aide d'une table à calcul appelée abaque, constituée d'une rangée de compartiments représentants les unités, les dizaines, les centaines, et ainsi de suite, dans lesquels étaient disposés des jetons. Par exemple, pour représenter le nombre 324, on disposait 4 jetons dans le compartiment des unités, 2 dans celui des dizaines et 3 dans celui des centaines. L'innovation de Gerbert d'Aurillac aurait été l'apice, ou jeton marqué, qui, dans notre exemple, remplaçait les trois jetons du compartiment des centaines par un jeton unique sur lequel était marqué la valeur trois. C'est la naissance de l'abacisme, qui n'utilise pas encore un élément qui se révélera par la suite essentiel au bon fonctionnement du système de numération qui est le nôtre : le zéro.

Le zéro est l'expression d'un vide, d'une absence, c'est-à-dire de quelque chose qui semble intrinsèquement différent d'un nombre « ordinaire ». Pourtant, comme chacun sait, son emploi ne peut être évité dans notre système de numération.

Le chiffre zéro

Il est pour nous extrêmement banal d'utiliser le signe 0 pour désigner une valeur nulle. Pourtant, à voir le temps que l'on a mis avant de l'utiliser, il semble bien qu'il y ait là une démarche intellectuelle difficile à mener à bien. Le zéro est l'expression d'un vide, d'une absence, c'est-à-dire de quelque chose qui semble intrinsèquement différent d'un nombre « ordinaire ». Pourtant, comme chacun sait, son emploi ne peut être évité dans notre système de numération. Le zéro était connu en Inde au moins depuis le neuvième siècle. On baptisa algoristes ceux qui utilisèrent le système de numération décimale, s'opposant aux abacistes, qui utilisaient encore l'abaque et la numération romaine.



L'abaque est en quelque sorte l'ancêtre de notre machine à calculer. Comparable au boulier, elle consiste en groupes de jetons représentant les ordres de grandeur (unités, dizaines, etc). L'addition se fait en groupant les jetons représentant le même ordre de grandeur, et en remplaçant tout groupe de dix jetons par un seul jeton d'un ordre supérieur (comme pour nos « retenues »). La soustraction se réalise de manière analogue.

Septante, octante et nonante.

Ce sont nos soixante-dix, quatre-vingts et quatre-vingt-dix pour les Suisses et les Belges, issus des mots latins septuaginta, octoginta, nonaginta.
Il s'agit d'un archaïsme issu du gaulois, langue celte, comme le breton. Le système vigésimal a cours en breton où 20 se dit *ugent*, 40 *daou-ugent*, 60 *tri-ugent*, 70 *dek ha tri-ugent* (c'est-à dire 10 plus 3 fois 20) etc. Cela proviendrait de langues pré-indo-européennes utilisant un système vigésimal que nous retrouvons en basque et en danois par exemple.
On trouve aussi une trace de base 20 dans le nom du très célèbre hospice des « Quinze-Vingts » datant de 1254, ainsi nommé pour loger 300 vétérans aveugles.

L'hégémonie francilienne a imposé récemment ces archaïsmes à toute la France. Les Suisses et les Belges (dont les dialectes ne connaissent pas la base 20) ont résisté !

Les algoristes l'emportèrent, notamment sous l'impulsion du Français Alexandre de Villedieu et de l'Anglais John d'Halifax (aussi connu sous le nom de Jean de Sacrobosco). Mais tout cela prendra du temps : ces deux auteurs sont du treizième siècle.

Fibonacci

Un autre auteur du treizième siècle se fera l'ardent promoteur du système de numération décimal : le célèbre Léonard de Pise, plus connu sous le nom de Fibonacci. En 1202, il composa son livre le plus connu, intitulé *Liber abaci* (Livre de l'abaque), dans lequel il expose longuement la méthode de numération de position.

En fait, bien qu'aujourd'hui le nom de Fibonacci soit de loin le plus connu parmi ceux des mathématiciens de son temps (dont il fut le plus brillant représentant), son influence ne fut pas très grande au treizième siècle. Le Liber abaci, son principal ouvrage, était en fait trop compliqué pour les mathématiciens d'alors. Ce n'est que bien plus tard qu'on accordera à Fibonacci la place de choix qui lui revient dans l'histoire des mathématiques.

B. R.

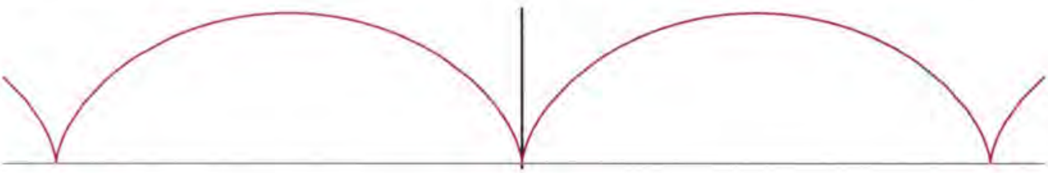
Leonardo Fibonacci

Né et mort à Pise probablement en 1170 et 1250 respectivement.
Aujourd'hui, le nom de **Fibonacci** reste attaché au problème suivant, posé dans le Liber abaci : « Combien de couples de lapins obtiendrions-nous à la fin d'une année si, commençant avec un couple, chacun des couples produisait chaque mois un nouveau couple lequel deviendrait productif au second mois de son existence ? ».
Nous avons là ce qui semble être la toute première modélisation mathématique d'une évolution démographique. La suite de Fibonacci définie par le problème s'est révélée porteuse de nombreuses propriétés, notamment celle d'être reliée au nombre d'or, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

L'aube du calcul intégral

L'inventeur de la balance qui porte toujours son nom, **Roberval** (1602-1675) était passé maître dans l'art des quadratures (calculs d'aire).
C'est en pesant un arc de cycloïde découpé dans du métal qu'il conjectura l'aire de celle-ci avant de prouver son résultat rigoureusement.

Galilée avait effectué cette pesée auparavant mais n'avait conjecturé qu'un résultat approximatif.
Roberval était professeur au Collège Royal (devenu depuis Collège de France). À cette époque, le poste était remis au concours tous les trois ans sur une question posée par l'homme en place.
Roberval avait donc l'habitude de ne pas publier tous ses résultats pour avoir un avantage sur ses concurrents. Ceci explique que sa découverte fut d'abord publiée par Torricelli (1608-1647).



Aire de la cycloïde

Solutions p.144

La cycloïde est la courbe engendrée par un point d'un cercle roulant sans glisser sur une droite . Si R est le rayon du cercle, le point mobile M(t) engendrant la cycloïde a pour coordonnées :

$$x = \mathrm{R}\,t - \mathrm{R}\sin t \quad y = \mathrm{R} - \mathrm{R}\cos t$$

Un arc est obtenu pour t variant de 0 à 2π (ce qui correspond à un choix de la vitesse).
Soit A(t) l'aire de l'arc de cycloïde limitée par la droite verticale passant par M(t) et l'axe des x. D'autre part, soit dt un "petit" accroissement de t.
Pourquoi peut-on dire de la différence $\mathrm{A}(t + \mathrm{d}t) - \mathrm{A}(t)$ qu'elle est sensiblement égale à $\mathrm{R}^2 (1 - \cos t)^2\, \mathrm{d}t$?

Soit $\mathrm{B}(t) = (3/2)\, t + (\sin 2t)/4 - 2 \sin t$. Calculer la différence $\mathrm{B}(t + \mathrm{d}t) - \mathrm{B}(t)$, montrer qu'elle est également sensiblement égale à $\mathrm{R}^2 (1 - \cos t)^2\, \mathrm{d}t$.
Soit C = B − A, montrer que le rapport de la différence $\mathrm{C}(t + \mathrm{d}t) - \mathrm{C}(t)$ à dt tends vers 0.

En déduire que la fonction C est constante égale à 0 puis la valeur de A(t). **En conclure que l'aire de l'arc de cycloïde est le triple de celle du cercle qui l'engendre**.

par Jean-Paul Guicard

Viète : la naissance du calcul littéral

Calculer avec des nombres, c'est vieux comme le monde. Calculer avec un nombre inconnu, Diophante l'a fait le premier. Ne calculer qu'avec des lettres, c'est somme toute très récent. Ce fut alors un progrès rapide et considérable des sciences et des mathématiques.

François Viète est né à Fontenay-le-Comte en 1540 et mort à Paris en 1603. Il vécut donc au temps des guerres de religion. Juriste, il fut conseiller à la cour des rois de France. Sa position ne fut pas toujours facile car il fréquentait le milieu (était ?) protestant.

L'acte de naissance du calcul littéral date de l'an 1591. À cette date François Viète publie à Tours un petit ouvrage en latin de 18 pages. Ce livre intitulé *L'Algèbre nouvelle* va révolutionner la pratique des mathématiques.

Un calcul nouveau

Le contenu de ce livre est un calcul entièrement nouveau. Il n'utilise que des lettres, des majuscules. Viète utilise des voyelles : A, E, I, O, U, Y pour les grandeurs cherchées, et des consonnes B, D, F,..., Z, pour les grandeurs connues.

Le but de ce nouveau calcul n'est pas mince puisqu'il s'agit de la résolution de tout problème. « Résoudre tout problème » est d'ailleurs la dernière phrase de son ouvrage. Cet ouvrage paraît dans le contexte de la Renaissance et de la culture humaniste. On redécouvre les œuvres des grands savants grecs : Euclide, Apollonius, Archimède, Ptolémée, Pappus, Diophante. Parfois incomplètes, elles livrent des foules de résultats, mais aussi des problèmes non résolus, et aucune indication sur la méthode, appelée analyse, pour trouver ces résultats. D'autre part, les traités d'Algèbre se développent, la nécessité de notations se fait sentir : on assiste à leur foisonnement, mais les méthodes de résolution des problèmes et des équations ne sont données que sur des exemples numériques.

La résolution générale des problèmes

Pour illustrer sa nouvelle algèbre, Viète publie, en même temps que son Introduction, un recueil de problèmes : *Les Recherches*. Il emprunte une grosse partie de ces problèmes au livre de Diophante : *Les Arithmétiques*. Il veut ainsi faire apprécier au lecteur la profondeur du changement apporté par son nouveau calcul. Étudions le premier problème :

« Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur différence ».

Diophante traite le problème sur un exemple, comme le font les contemporains de Viète. Il prend 100 pour somme et 40 pour différence. En désignant comme inconnue le plus petit des deux nombres cherchés, il trouve 30 et 70.

Que fait Viète ? Il utilise la même démarche de résolution, mais note B la différence, D la somme, A le plus petit nombre cherché, et E le plus grand.

Il trouve A égal à $\dfrac{\mathrm{D} - \mathrm{B}}{2}$

et E égal à $\dfrac{\mathrm{D} + \mathrm{B}}{2}$.

Puis il énonce le résultat sous forme d'une règle générale et termine par une application numérique. Devinez quels nombres il choisit ? Ceux de Diophante ! Pour tous les problèmes Viète reprend le même schéma : résolution générale avec un calcul sur des lettres, énoncé d'une règle ou d'un théorème, application numérique.
Ainsi on garde trace des données de départ : les formules trouvées donnent

D'où viennent les parenthèses ?

Le besoin d'une notation ne s'est fait sentir que vers la fin du XV^{e} siècle pour l'écriture des expressions contenant des radicaux. La plus courante jusqu'au XVIII^{e} siècle a été le surlignage, qui a été supplanté par nos parenthèses, apparues chez Bombelli, pour des raisons de typographie. Mais elle a survécu dans l'écriture des racines. Viète, quant à lui, utilisait des accolades.

D'où vient le symbole = ?

Viète utilise = pour désigner la différence arithmétique : $a = b$ signifie $|a - b|$. Mais ce même symbole = signifie le parallélisme de deux droites chez Dulaurens (1667). C'est l'Anglais Recorde, en 1557, qui l'a utilisé le premier pour désigner l'égalité. Mais cet usage ne se généralisera qu'au début du XVIII^{e} siècle grâce à Leibniz.

D'où vient le symbole des radicaux ?

Ce symbole tel que nous le connaissons est dû à l'Allemand Christoff Rudolff en 1525, dans son ouvrage *die Coss*. C'est probablement un *r* minuscule déformé, initiale de « racine » (*radix* en latin). Voir aussi l'article sur les symbolisme dans les mathématiques arabes. Viète utilise un l du mot latin *latus*.

D'où vient le symbole d'intégration ?

Ce symbole est dû à Gottfried Wilhem Leibniz (1646-1716). C'est un S allongé, car une intégrale est une somme (*summa* en latin).

D'où vient le symbole de l'infini ∞ ?

Ce symbole est dû à John Wallis qui l'a introduit en 1655 ; il se trace comme un 8 couché mais son origine n'est pas le symbole 8. Il y a deux hypothèses plausibles :
- soit ce sont deux zéros accolés, peut-être parce que les Romains notaient 1000 « oo ».
- soit il est issu de la lettre grecque « ω », car c'est la dernière de l'alphabet grec.

Frontispice de la traduction en français par Vasset de l'Algèbre nouvelle de Viète (1630). Le personnage de gauche figure Apollonius, et celui de droite Viète, l'Apollonius français, celui qui a résolu le problème des quatre cercles tangents qu'évoque la figure sous ses pieds. Viète tient dans sa main gauche un bandeau sur lequel est écrit B + D, symbolisant sa création du calcul littéral.

le lien entre les grandeurs cherchées et les grandeurs données. Le problème est résolu dans toute sa généralité. Pour les cas particuliers, il n'y a plus qu'à faire une application numérique. C'est une démarche devenue classique que l'on retrouve par exemple couramment en physique. Alors que dans le cas de Diophante, de nouveaux nombres obligent à recommencer les calculs.

Le rôle des formules

Jusqu'à Viète, les formules de calcul, comme les identités remarquables, sont établies géométriquement.
L'algèbre littérale de Viète permet pour la première fois de démontrer formules et théorèmes par le calcul, d'en créer à volonté, et de s'en servir. Ce qui permet de mettre en œuvre de nouvelles méthodes pour résoudre les problèmes.

Étudions le problème 4 du livre 2 de ses Recherches : « Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit ».
C'est un problème classique que l'on trouve chez Diophante, mais aussi chez les Babyloniens. Pour le résoudre, Viète ne suit pas du tout la démarche de Diophante, mais va utiliser une formule reliant $x + y$, xy et $x - y$ pour ramener ce problème au précédent. Voyons sa méthode avec nos notations actuelles.
Traduction littérale : trouver x et y sachant que
$x + y = \text{S}$ et $xy = \text{P}$.
Or on sait que :

$$(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2,$$

donc on peut calculer $x - y$ en fonction de S et P. Connaissant $x + y$ et $x - y$, on en déduit x et y (premier problème).
Viète termine bien sûr par une application numérique : $\text{S} = 12$, $\text{P} = 20$, donc $(x - y)^2 = 64$, et vous laisse achever le calcul.
L'utilisation des identités remarquables, et d'identités obtenues à partir d'elles permet ainsi de résoudre simplement tout un ensemble de systèmes de deux équations à deux inconnues.
Cette méthode permet aussi de résoudre toute équation du second degré.
Voici comment : on écrit l'équation sous la forme $x^2 + ax = d$, puis sous la forme d'un produit constant $x(x + a) = d$. En posant $y = x + a$, on est ramené à trouver x et y tels que $y - x = a$ et $xy = d$. On peut alors opérer comme pour le problème précédent.

La méthode algébrique

Jusqu'à Viète, les méthodes de résolution des équations sont établies et justifiées par la géométrie. En particulier pour les équations du second degré, il faut savoir transformer un rectangle en carré : un des outils clé est une figure en équerre nommée gnomon. De plus ces équations ne sont résolues que sur des exemples numériques.
Voyons comment Viète, dans son *Traité des Équations*, résout de façon littérale et avec une méthode purement algébrique une équation du type $x^2 + ax = d$ en utilisant, pour simplifier, nos notations.
Il écrit le coefficient a sous la forme $2b$, et pose $y = x + b$. Il en déduit $y^2 = d + b^2$, et donc que
$x = \sqrt{d + b^2} - b$.
Suit, bien sûr, une application numérique : $b = 1$, $d = 20$, donc $x = \sqrt{21} - 1$. On remarquera que Viète « oublie » une solution :

$$x = -\sqrt{d + b^2} - b.$$

Mais ce n'est pas un oubli. Pour Viète n'existent que des grandeurs positives. On pourra vérifier que si d et b sont positifs, $x = \sqrt{d + b^2} - b$ est positif puisque $\sqrt{d + b^2} > b$. C'est néanmoins la manipulation des équations et du calcul littéral qui amènera, petit à petit, les mathématiciens à accepter nombres négatifs et nombres imaginaires.

On voit là, à l'œuvre, l'esprit de l'algèbre nouvelle. Au lieu de transformer des figures géométriques, on transforme des expressions algébriques, au lieu du gnomon, on utilise le changement de variable. Pourquoi Viète pose-t-il $a = 2b$ et $y = x + b$? Parce qu'il veut ramener son équation à la forme « pure » $y^2 = a$, et qu'il connaît bien la formule

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

qui permet de transformer des sommes en carrés.

La loi des homogènes

Dans l'équation précédente nous avons écrit d pour la constante, ce que n'aurait jamais fait Viète, car x^2 est homogène à l'aire d'un carré, ax à celle d'un rectangle, donc d est homogène à une aire : pour l'indiquer Viète rajoute à toute constante de dimension supérieure à 1 l'indication de sa dimension. Ici il noterait d plan.
Vérifions-le en regardant la résolution de l'équation

$$x^2 - ax = d,$$

qui suit celle que nous venons d'étudier, et qui dans le texte même de Viète est notée

Acarré - Bfois A doublé
soit égal à Zplan.

Nous pouvons remarquer que ses notations sont loin d'être les nôtres : pas de signe =, mais le verbe être ou égaler, pas d'exposant pour les puissances, mais un adjectif, *quadratus* (carré), des accolades pour parenthèses, un l, première lettre de *latus* (côté du carré), pour la racine carrée, *in* pour x, *bis* pour 2 fois. Il faudra attendre 50 ans pour que Descartes les fixe à peu près toutes, et élimine la loi des homogènes. On sait cependant son intérêt pour la vérification des calculs. On la retrouve par exemple en physique sous la forme de ce qu'on appelle l'équation aux dimensions.

Adriaan van Roomen (dit Adrien Romain) était ami de **Ludolph van Ceulen** (1540-1610), célèbre pour avoir calculé 35 décimales du nombre π en utilisant un polygône à 2^{62} côtés. Lui-même en avait calculé 16 en utilisant un polygône à 2^{30} côtés. Ces recherches expliquent qu'il ait considéré la division d'un angle en 45 parties égales.

À chaque problème son équation

L'une des anecdotes les plus célèbres à propos de la vie de Viète est sa résolution, en 1595, d'une équation du 45e degré qui avait été proposé par un mathématicien belge, Adrien Romain, en défi à tous les mathématiciens de la Terre. Comment a-t-il pu, aussitôt lu, l'avoir résolu, comme il le dit lui-même (*ut legi, ut solvi*) dans sa réponse à Adrien Romain, alors qu'à l'époque les équations ne dépassaient guère le degré 2 ou 3 ? C'est qu'il avait essayé d'utiliser sa nouvelle algèbre pour résoudre les célèbres problèmes irrésolus : trisection de l'angle, construction de l'heptagone. À chaque problème il associe une équation liant la grandeur cherchée aux grandeurs données. Et pour les angles, il s'est vite rendu compte que diviser un angle en n parties égales revient à résoudre une équation de degré n. Donc l'équation d'Adrien Romain devait correspondre à la division d'un angle en 45 parties égales, ce qui était bien le cas.

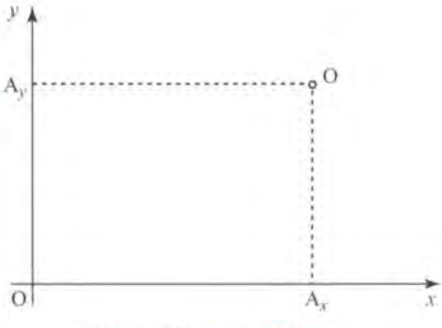
J.-P. G.

Le repère de Descartes

En inventant les repères qui portent son nom, Descartes a ramené la géométrie à l'algèbre. Il pensait en déduire la résolution de tous les problèmes géométriques.

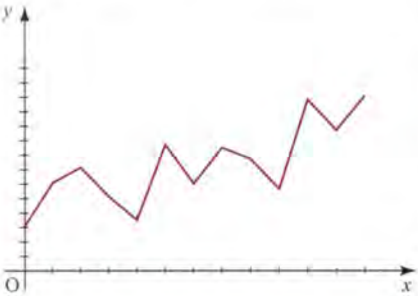
René Descartes est né à La Haye (en Touraine) en 1596 et mort à Stockholm en 1650. Sa méthode consiste avant tout à douter de tout à commencer par sa propre existence. Son *je pense donc je suis* est resté célèbre. Il est typique de sa méthode pour sortir de la spirale dans lequel le doute aurait pu l'enfermer. Mais comment faire autrement, puisque nous ne pouvons raisonner qu'à partir d'éléments premiers considérés comme évidents ?

Nous savons tous ce qu'est une courbe représentative d'une certaine grandeur en fonction d'une autre. Le principe consiste à se fixer deux droites appelées axes de coordonnées, qui servent de référence. Le plus souvent, on prend ces axes perpendiculaires. Chacun des axes est orienté et muni d'une unité de mesure : généralement, lorsqu'on représente des grandeurs géométriques, on choisit la même unité pour chacun des axes, et l'on parle alors de repère orthonormé. On appelle O le point de rencontre des axes (c'est l'origine), (Ox) et (Oy) les axes. Tout point A du plan est alors identifié par ses deux coordonnées, abscisse et ordonnée, qui sont par définition les mesures algébriques des segments [OA_x] et [OA_y], où A_x est la projection du point A sur l'axe (Ox) parallèlement à (O_x) et A_y la projection de A sur (Oy) parallèlement à (Ox).



Un repère cartésien.

Ce repérage des points permet notamment de représenter graphiquement la façon dont une grandeur est fonction d'une autre. C'est ainsi que l'on voit régulièrement, dans les journaux, divers types de courbe avec, par exemple, en abscisse les derniers mois écoulés et en ordonnée les chiffres du chômage, ou de la consommation, ou encore des cours de la bourse.

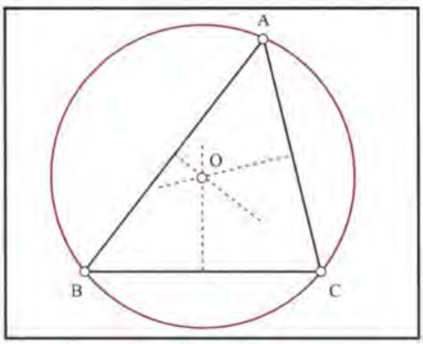


Evolution du cours de la bourse : les mois sont en abscisse, la valeur en ordonnée

Géométrie grecque

Cela semble un procédé si naturel et si efficace qu'on a peine à imaginer comment les choses se passaient avant l'invention de ce qu'on appelle le repère cartésien, ossature de la figure précédente. Sachant que Descartes a vécu au dix-septième siècle, on a tout autant de difficulté à imaginer que personne parmi tous les grands esprits de la Grèce antique, de l'Inde ou de l'Islam médiéval n'ait eu l'idée de quelque chose de ressemblant.
Ces deux problèmes sont bien différents. Pour comprendre le premier, il faut se replacer dans le contexte mathématique que nous a légué l'Antiquité. Les mathématiques, à l'époque, se confondent pratiquement avec la géométrie. C'est ainsi qu'il faut comprendre la célèbre sentence qui figurait, selon ce qu'on en dit, au fronton de l'Académie de Platon : « Nul n'entre ici s'il n'est géomètre ».
Les questions de géométrie que se posaient les Grecs concernaient tout naturellement des figures, matière de base d'une immense variété de problèmes. L'un des plus simples et des plus anciens d'entre ces problèmes consiste, trois points non alignés étant donnés, à trouver un quatrième point équidistant des trois autres : c'est le problème du centre du cercle circonscrit à un triangle.

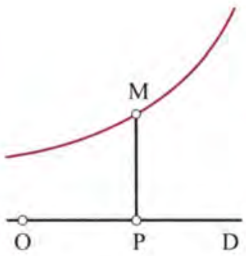
Pour répondre à cette question, on trace les trois segments reliant les trois points, puis les médiatrices des segments. Un raisonnement géométrique classique montre alors que ces médiatrices sont concourantes, en un point équidistant des trois sommets du triangle (c'est le centre du cercle circonscrit).



Pour ce problème, comme pour la plupart de ceux que se sont posés les Grecs, il n'est absolument pas nécessaire de se servir d'un repère cartésien. C'est une première explication à l'inexistence de cette notion avant le deuxième millénaire : les mathématiques qui se faisaient avant n'avaient tout simplement pas besoin de cet outil.

Le pastiche d'Hervé Lehning de la page 87 montre de façon humoristique les forces et les faiblesses de Descartes

Pourquoi une abscisse, une ordonnée ?



Ces deux noms sont des adjectifs substantivés, abréviations de « ligne abscisse (c'est-à-dire coupée, voir le mot « scission ») et ligne ordonnée ». Historiquement, l'ordonnée est apparue avant l'abscisse ; étant donnée une courbe décrite par un point M et une droite D, les ordonnées étaient les segments [*MP*] où *P* est le projeté de M sur D; ces segments « régulièrement » (*ordinatim* en latin) disposés, ont été appelés « ordinatim applicatae » en latin, puis *ordonnées* en français.

Étant donné un point O sur D, les abscisses étaient les segments [OP], qui sont bien des « lignes coupées ».

Le mot « ordonnée » serait apparu en premier sous la plume de Pascal en 1658 et le mot « abscisse » en 1694 dans le *Dictionnaire des Arts et des Sciences* de Thomas Corneille (frère de Pierre).

Euler est le premier à remarquer l'équivalence des deux axes du repère cartésien.

Une inversion de perspective

Autre aspect, complémentaire du premier : l'idée sous-jacente au repère cartésien consiste en une traduction d'une figure géométrique en une expression algébrique. Par exemple, une droite dans un repère cartésien est définie à partir d'une équation du type $y = ax + b$.

Et ça, ça n'a l'air de rien, mais c'est un renversement complet.

Comme nous l'avons dit, depuis toujours, les mathématiques se confondaient plus ou moins avec la géométrie. C'est cette dernière qui était considérée comme formant le fondement des mathématiques : ainsi peut-on s'expliquer qu'on n'ait pas cherché à remplacer les droites, les cercles et autres coniques de la géométrie plane classique par les autres outils que sont les relations entre variables. À cette époque, on aurait probablement considéré que cette opération était analogue à celle consistant à faire reposer les fondations d'un édifice sur son premier étage au lieu du contraire !

Autre obstacle entre l'Antiquité et le repère cartésien : la notion même d'équation, qui n'a acquis son autonomie que tardivement sur la scène des mathématiques. Écrire $y = 2x - 3$ comme équation d'une droite est lourd de contenu : cela suppose qu'une quantité inconnue (ici, x) puisse être multipliée par deux, et qu'on puisse soustraire 3 au résultat, autrement dit on s'autorise à manipuler une quantité inconnue en lui appliquant les mêmes règles algébriques qu'aux quantités connues (la théorie des équations est notamment l'œuvre d'Al-Khwarizmi, au neuvième siècle).

Géométrie analytique

Le repère cartésien est le point de départ de la branche des mathématiques qu'on appelle la géométrie analytique. Celle-ci a pu exister à partir de la réunion de trois idées : d'abord, il faut accepter que des relations entre inconnues puissent représenter une situation géométrique. C'est ce que nous exprimons lorsque nous disons que l'équation d'une droite est $y = ax + b$. Mais, bien entendu, il faut aussi avoir le bon outil pour pouvoir faire le transfert entre la figure géométrique (la droite) et son expression en terme de relation entre variables ($y = ax + b$) : c'est ce que permet le repère cartésien. Une fois ces deux idées réunies, on peut traduire en termes algébriques des énoncés géométriques : par exemple, dans une situation donnée, on peut montrer le parallélisme de deux droites en établissant l'égalité de leur coefficient directeur (si $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont les équations des deux droites, alors ces droites sont parallèles si et seulement si $a = a'$ et, dans ce dernier cas, elles sont confondues si et seulement si $b = b'$).

Un précurseur

Mais il y a davantage : le repère cartésien permet également la représentation graphique d'autres choses que des grandeurs géométriques. Dans l'une de nos courbes représentées plus haut, en abscisse figurait le temps et en ordonnée les cours de la bourse : tout sauf des grandeurs géométriques. Le repère cartésien ne se limite donc pas à une représentation algébrique commode de données géométriques, il permet également de matérialiser des fonctions, même lorsque ces fonctions mettent en jeu des quantités numériques n'ayant aucun rapport direct avec la géométrie. Au quatorzième siècle déjà, Nicole Oresme proposait de représenter des situations non géométriques de cette manière. S'aidant de la longitude et de la latitude dont on se servait en cartographie, il imaginait quelque chose de proche du repère que l'on connaît aujourd'hui.

On a aujourd'hui un peu oublié le nom de Nicole Oresme, alors même qu'il s'agit d'un brillant homme de science, qui a eu de nombreuses idées visionnaires dans plusieurs domaines : dans la représentation analytique comme nous l'avons dit, mais également en physique (il eut, deux siècles et demi avant Galilée, l'intuition du principe de l'inertie, allant jusqu'à parler de mouvement de la Terre, sans toutefois aller au bout de ses idées), ou en théorie des probabilités sur des ensembles continus (affirmant qu'en tirant un nombre au hasard, il y avait beaucoup plus de chances d'obtenir un irrationnel qu'un rationnel, un pressentiment qui ne sera tiré au clair qu'au début du vingtième siècle). Peut-être Oresme serait-il resté plus célèbre s'il avait pu être davantage qu'un précurseur génial. En son temps toutefois, ses représentations graphiques (qu'il étendit à l'espace, et même quasiment à une quatrième dimension) eurent un grand succès.

Et dans tout ça, que devient Descartes ? Si son nom est attaché au concept de repère, c'est moins pour ce repère lui-même que pour ce qu'il en faisait : il a unifié les idées alors dispa-

Nicole Oresme

Né à Allemagne (en France) en 1323 et mort à Lisieux en 1382. Il a inventé les systèmes de coordonnées longtemps avant Descartes. Charles V (époque de la guerre de cent ans et de Du Guesclin) utilisait ses conseils en matière d'administration. Théologien, il est le premier à utiliser la métaphore du monde horloge et de son grand horloger. Dans cette question comme dans d'autres, il aura été un précurseur génial.

Nikolai Lobachevsky

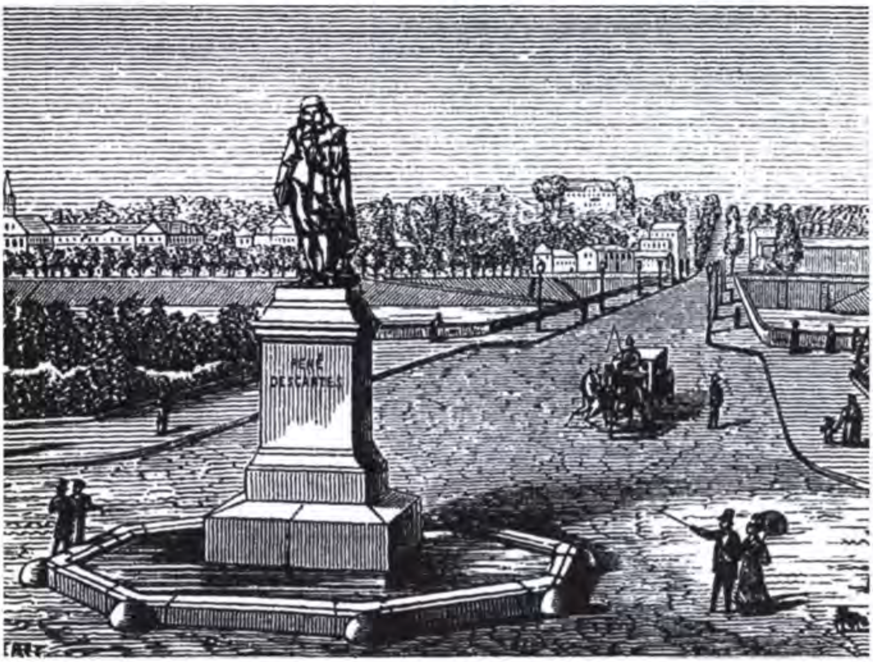
(1792-1856). Véritable inventeur des géométries non euclidiennes qui nient le postulat d'Euclide selon lequel par un point il passe une et une seule parallèle à une droite donnée. Ce postulat doit en fait être pris comme un axiome indépendant des autres.

rates de la géométrie analytique. C'est en 1637 qu'il publie un ouvrage, simplement intitulé *Géométrie*, dans lequel il expose ses idées, qui consistent à représenter algébriquement, à l'aide de relations entre variables, des courbes géométriques. En fait, le repère de Descartes n'est pas encore cartésien : Descartes ne considère lui qu'un seul axe, celui des abscisses. Le second est négligé, au profit d'une simple direction qui détermine ce que nous appellerions, nous, l'ordonnée.

Tout n'est pas nouveau dans ce que dit Descartes. Toutefois, à partir de lui, le monde des courbes s'enrichit considérablement, puisqu'acquièrent droit de cité toutes celles qui peuvent se décrire par des équations algébriques, c'est-à-dire des relations entre abscisse et ordonnée faisant intervenir n'importe quel exposant entier. Descartes est le premier à avoir franchi ce pas important qui consistait à accepter de nouvelles courbes dans le champ des investigations mathématiques. Il faudra tout de même attendre encore un peu avant que l'on intègre dans le giron des courbes les graphes représentant autre chose que des fonctions algébriques, comme les sinusoïdes. La notion de fonction finira alors par prendre le pas sur celle de courbe géométrique.

Les bons vieux dessins de courbes ne seront ainsi plus rien d'autre qu'une aide à la compréhension d'une réalité mathématique beaucoup plus abstraite.

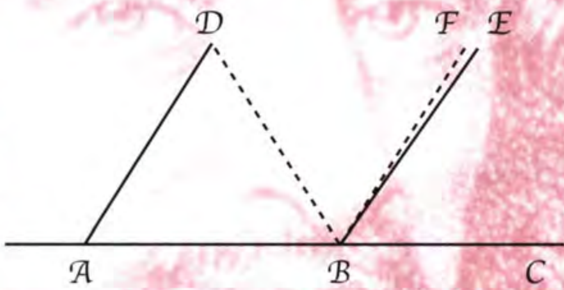
B. R.



Monsieur,

J'ai lu soigneusement le livre que vous avez pris la peine de m'envoyer, et je vous en remercie. L'auteur témoigne être homme de bon esprit et je ferai miens sans peine la plupart des bons principes qu'il y exprime. Ainsi, par exemple, je ne puis qu'approuver son refus de tenir pour vrai ce qu'il n'a au préalable véritablement démontré. J'admire la résolution qu'il prends de s'en tenir aux véritables axiomes et donc de refuser toutes les demandes d'Euclide.

Je crains seulement qu'ayant voulu écarter une demande clairement posée, il n'ait fait entrer en sa Géométrie une autre bien subtilement dissimulée. Je n'ai su avoir la patience de lire tout du long sa démonstration, et je veux croire qu'elle est toute vraie. J'ai seulement remarqué que tout découlait de sa construction d'une ligne droite restant à égale distance de la donnée. Je confesse que je ne vois point comment il infère de ses axiomes une telle construction. Il me semble bien plutôt que ce sont ses sens qui lui dictent cette idée et je pense qu'en ce domaine, comme dans tout ceux qui relèvent de la science, on doit s'accoutumer à douter de tout et principalement des choses corporelles.



En essayant moi aussi de démontrer le postulatum, je crois avoir découvert une autre voie de recherche. Toutefois, le temps qui m'est compté ne m'a point permis de la poursuivre jusqu'au plein succès. Je considère ici une ligne droite ABC et un point D hors de celle-ci. Je trace les lignes droites BE et BF de sorte que les angles BAD et CBE d'une part, ADB et DBF d'autre part soient égaux.

Si le postulatum est vrai, BE et BF seront parallèles à AD et donc confondues. J'en déduis que la somme des angles du triangle ABD fera deux droits d'où il s'ensuivra qu'il en sera de même pour tout triangle. Si le postulatum est faux, il en ira autrement. En fait, il se trouvera deux possibilités. La première est que les angles CBE et DBF se recouvrent, la seconde qu'ils ne se recouvrent point. Selon le cas, la somme des angles d'un triangle se trouvera inférieure ou supérieure à deux droits. Nous en déduisons alors des propriétés si étranges des parallèles qu'il est véritablement impossible qu'elles fussent. Nul doute qu'en continuant ainsi, j'établirai une propriété absurde avec les axiomes et la démonstration du postulatum s'en déduira. Mais comme je vous le disais, le temps me manque pour me perdre en futiles recherches car j'ai résolu de n'employer celui qui me reste à vivre à autre chose que d'acquérir quelques connaissances que je puisse appliquer à la pratique de quelque art. Néanmoins, si en utilisant les excellents principes que je vous ai exposés, votre auteur finissait ma démonstration, je vous serais reconnaissant de vous donner la peine de me l'envoyer. Pour l'heure, je vous remercie encore de votre attention obligeante. Je suis, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

Descartes

par Norbert Verdier

Des logarithmes au logarithme

Les mathématiques sont en partie l'art de pratiquer les calculs. Le métier du mathématicien est donc de les éviter, les réduire ou les simplifier. Il est plus facile d'additionner que de multiplier. Les logarithmes sont nés de ce constat.

Joost Bürgi
Né à Lichtensteig (Suisse) en 1552 et mort à Kassel en 1632. Il fut le fabricant d'horloge le plus réputé de sont temps. Il inventa les logarithmes à la même époque et de façon indépendante à Napier.

Les mathématiques, n'en déplaise à leurs détracteurs, évitent à tout prix les calculs. L'histoire des logarithmes, où l'on rencontrera, entre autres, un horloger suisse et un baron écossais, fait partie de cette quête d'économie que recherchaient les savants du XVII^e siècle. 200 ans plus tard, le marquis et néanmoins mathématicien Pierre Simon de Laplace (1749-1827) affirmait que les logarithmes, en réduisant les calculs ont doublé la durée de vie des astronomes. C'est dire s'ils méritent qu'on s'y attardent !

Des calculs, encore des calculs

Au début du XVII^e siècle, à Prague, les astronomes Tycho Brahé (1546-1601) et Johannes Kepler (1571-1630) ont pour assistant un horloger suisse, Joost Bürgi (1552-1632). Bürgi s'était fait remarquer en concevant des horloges d'une précision remarquable, grâce auxquelles Kepler a pu établir sa théorie du système solaire, synthétisée sous la forme des fameuses lois qui portent son nom. Comme tous ceux qui étaient confrontés à des observations astronomiques, Bürgi butait sur de nombreux calculs issus de considérations trigonométriques. Pour les simplifier, il « inventa » ce qu'on devait appeler plus tard les logarithmes. Sous l'insistance de Kepler, Bürgi publia ses travaux en 1620. Trop tard ! Entre temps, un baron écossais les avait découverts (indépendamment de Bürgi) et avait publié ses recherches. Exit Bürgi. L'Histoire est parsemée de trappes !

Le baron de Merchiston, plus connu sous le nom de Neper ou Napier (bien que de son vivant, il n'ait jamais porté ce dernier nom) publia en 1614, à Edimbourg, un travail au sous titre éloquent : *Description des merveilleuses règles des logarithmes et de leur usage dans l'une et l'autre trigonométrie, aussi bien que dans tout calcul mathématique*. Avec l'explication la plus large, la plus facile et la plus dégagée de complications. Pourtant Neper n'était pas mathématicien mais s'adonnait, à ses heures perdues, aux mathématiques. Heureux temps, où l'amateur éclairé pouvait faire progresser la science. Riche propriétaire terrien, protestant convaincu, Neper a laissé son nom à une notion mathématique qui s'est avérée capitale.

John Napier (francisé en Néper) est né à Edimbourg en 1550 et mort en 1617 dans la même ville. A son époque, Napier fut plus connu comme théologien que comme mathématicien et son oeuvre la plus célèbre (rééditée trente fois !) fut *Plaine Discovery of the Whole Revelation of St. John* qui est une condamnation du catholicisme romain dans laquelle il faut lire également une défense de la liberté.

Les merveilleuses règles des logarithmes

L'opuscule de Neper comprend 56 pages. Des définitions, des explications et des tables. Rien que des tables. En s'appuyant sur des considérations mécaniques de points en mouvement, il établit une table des logarithmes des sinus d'un angle. Nous n'allons pas entrer dans les détails historiques du travail de Neper, d'ailleurs sa définition du logarithme n'est pas celle qui est restée. Seule compte l'idée sous-jacente. Il explique ainsi dans sa préface qu'il cherche à mettre au point un procédé de calcul transformant automatiquement des produits de nombres et des extractions de nombres en des sommes et des divisions d'autres nombres. Ces autres nombres furent qualifiés d'artificiels ou encore de logarithmes, mot formé sur les racines grecques « logos » (signifiant « raison » ou « rapport ») et « arithmos » (signifiant « nombre »). L'idée de Neper est là, toute simple : transformer les multiplications en additions et les extractions de racines en divisions.

Des multiplications aux additions

Partons d'une suite de nombres obtenue en multipliant toujours par le même nombre, par exemple 10. Si le premier nombre est 1, on obtient :

$$1 \quad 10 \quad 10^2 \quad 10^3 \quad 10^4 \quad 10^5 \quad 10^6 \quad 10^7 \ldots$$

Oublions les « dix », pour ne garder que les exposants :

$$0 \; 1 \; 2 \; 3 \; 4 \; 5 \; 6 \; 7 \; 8 \; \ldots$$

Plus généralement, on posera que n est le logarithme en base dix de 10^n et on écrira (notation actuelle) :

$$\log(10^n) = n.$$

Grâce à ce logarithme, on a transformé une progression (ou suite) géométrique en une progression (ou suite) arithmétique. La première est obtenue en passant d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre appelé raison, la seconde en passant d'un terme au suivant en additionnant toujours le même nombre appelé également raison. En l'occurrence on est passé d'une suite géométrique de raison 10 (et de premier terme 1) à une suite arithmétique de raison 1 (et de premier terme 0). Le logarithme (ici en base dix appelé aussi *logarithme*

Henry Briggs est né à Warley Wood en 1561 et mort à Oxford en 1630. Très vite convaincu de l'utilité des logarithmes, il en publie une table avec huit décimales en 1617. C'est Briggs qui introduit les mots *mantisse* et *caractéristique*.

Extrait de la table de Bouvart & Ratinet encore utilisée dans les années 1970.

décimal, mais nommé autrefois logarithme vulgaire ou encore de Briggs) transforme une suite de multiplications en une suite d'additions. Et alors ? Et alors, l'intérêt est patent ! Sur mon exemple, si je prends deux nombres de la suite a et b, il est aisé de voir que « le logarithme (décimal) de a fois b est égal au logarithme de a plus le logarithme de b » ce qui s'écrit :

$$\log (ab) = \log a + \log b$$

Cette relation est vraie pour n'importe quels nombres a et b strictement positifs et pas seulement pour ceux qui font partie de la suite posée initialement. En effet, on a défini le logarithme des puissances entières de dix, mais on peut adapter aisément pour n'importe quelle puissance (strictement positive). Par exemple :

$$\log (10^{3/2}) = 3/2.$$

Le fait que le logarithme transforme un produit en somme est primordial. Ainsi, si je veux calculer un produit $a\ b$, je l'oublie provisoirement, je cherche la valeur de $\log a$ et de $\log b$ dans une table, j'ajoute ces deux nombres, je cherche dans la table le nombre ayant pour logarithme : $\log a + \log b$. Ce nombre, c'est le produit de a par b. Notons au passage que les "nouveaux" nombres $\log a$ et $\log b$ méritent bien leur qualificatif d'"artificiel" car au final, ils disparaissent. Ils sont des intermédiaires. Seulement des intermédiaires.

L'usage du logarithme consiste à contourner l'obstacle (ici le calcul d'un produit). Le chemin peut paraître long mais les chemins les plus courts ne sont pas toujours les meilleurs ! Comme l'explique cet exemple, cette nouvelle démarche de calculs nécessite la construction de tables de calculs, d'où le travail de Neper et ses successeurs à construire des tables de calculs. Bénéficiant de ces tables de calculs, les descendants de Neper ont pu plus facilement multiplier entre eux de très grands nombres.

Remarquons que dans la formule précédente, en prenant $a = b$, il vient :

$$\log a^2 = 2 \log a$$

et plus généralement :

$$\log a^n = n \log a$$

Calculer la puissance n-ième d'un nombre devient aisé. Connaissant son logarithme, on le multiplie par n, puis on cherche le nombre dont il est logarithme. Le nombre obtenu représente a^n. Il reste à voir comment les logarithmes permettent d'extraire facilement des racines.

Des extractions aux divisions

La "racine carrée d'un nombre positif a" est le nombre positif qui élevé au carré donne a. Sous forme d'équation cela s'écrit : $x^2 = a$. En prenant le logarithme de x^2 et de a, on a : $\log x^2 = \log a$ mais $\log x^2 = 2 \log x$ (en vertu de la propriété qu'on vient de mentionner sur les puissances), ainsi $2 \log x = \log a$ soit

$$\log x = \frac{1}{2} \log a.$$

Avec une phrase, cela devient : le logarithme de la racine carrée d'un nombre est égal à la moitié du logarithme de ce nombre. Autrement dit, extraire une racine revient à diviser par deux, après passage au logarithme. On tient là, une méthode facile pour extraire les racines : si je veux la racine carré de a, je considère $\log a$, je divise par 2, je cherche le nombre dont le logarithme vaut $(1/2)\log a$: c'est la racine carrée de a. De même, la racine cubique se ramène à une division par 3, la racine quatrième à une division par 4, et ainsi de suite. L'avènement du logarithme est un hymne à l'addition et à la division (par des entiers). Napier entre deux prises de position en faveur des protestants, aidé de son ami, le mathématicien anglais, Henri Briggs (1561-1630), élabore patiemment les indispensables tables de calculs.

Un logarithme, des logarithmes

Ayant conçu la notion de logarithme en base dix, il est manifeste qu'on peut la généraliser à d'autres nombres que 10. Si on considère une suite géométrique de raison a (un nombre strictement positif distinct de 1) et de premier terme 1, on a :

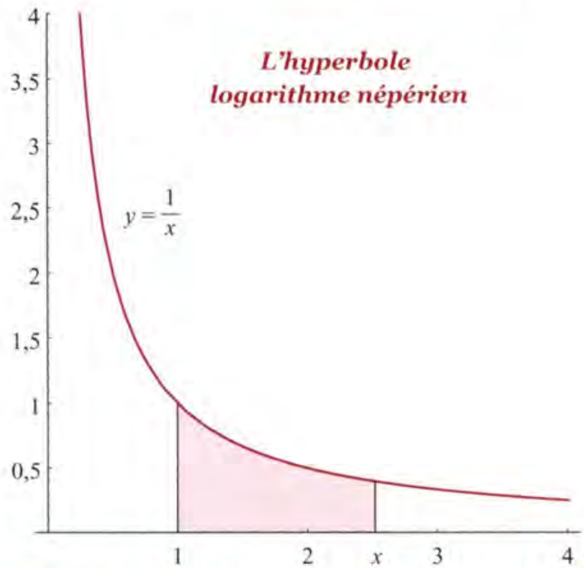
$$1 \quad a \quad a^2 \quad a^3 \quad a^4 \quad a^5 \quad a^6 \quad a^7 \quad \ldots$$

On dira que 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... sont les logarithmes (en base a) de $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, \ldots$ et on transforme ainsi, là encore, une suite géométrique en une suite arithmétique. Le logarithme (en base a) vérifie la propriété fondamentale du logarithme décimal : il transforme les multiplications en additions. Les propriétés qui en découlent sont évidemment conservées. Seules les tables de valeurs changent ! Ces tables, ont servi pendant plusieurs siècles à effectuer rapidement des multiplications et surtout à extraire des racines. Pour la petite histoire, encore, il y a quelques années, les lycéens, muni de leur tables de logarithmes comme celle représentée ci-contre calculaient produits et racines à la manière des mathématiciens du XVII^e^ siècle. Aujourd'hui, depuis l'avènement des calculatrices, les tables de logarithmes ont disparu. Pourtant, les logarithmes sont restés sur le devant de la scène mathématique.

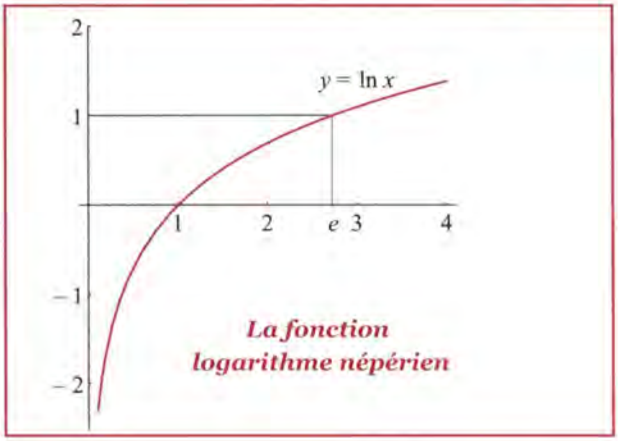
Le logarithme

Si Bürgi, Neper ou Briggs assistait à un cours actuel sur les logarithmes, ils ne reconnaîtraient pas leurs créations. Et pour cause. Pour eux, les logarithmes sont des nombres (qu'on a qualifié d'artificiels) ou au mieux des procédés de calcul permettant de calculer facilement des produits et des extractions de racines en s'aidant de tables patiemment élaborées. Aujourd'hui, on présente les logarithmes comme des fonctions. Ce ne sont ni des nombres, ni des techniques opératoires, ce sont des *fonctions* ! Le XVIII^e^ siècle – mettant au centre des mathématiques la notion de fonction – a apporté un éclairage nouveau sur les logarithmes de Neper et alii. Soit la courbe d'équation $y = 1/x$ pour $x > 0$. On appelle cette courbe hyperbole équilatère. L'aire hachurée sous la courbe compris entre les droites verticales d'abscisses 1 et x (voir la figure) dépend de x : c'est une fonction de x et on démontre que cette fonction est un

Johannes Kepler est né à Leonberg en 1571 et mort à Regensburg en 1630. Il est surtout connu pour sa découverte des trois lois régissant le mouvement des planètes. La découverte des logarithmes par Napier le réjouit car ils facilitent les calculs astronomiques.



L'hyperbole logarithme népérien



La fonction logarithme népérien

logarithme. Plus précisément, c'est le logarithme de base e où est un nombre appelé jadis le nombre de Neper et dont la valeur est 2,71 et des poussières. Ce nombre, correspond à l'abscisse pour laquelle l'aire limitée par l'axe des abscisses, la courbe, et les deux droites verticales d'équations $x = 1$ et $x = e$ vaut l'unité. La fonction logarithme ainsi définie est appelé logarithme népérien (depuis les travaux de Sylvestre François Lacroix (1765-1843) publiés dans son traité d'analyse), par hommage à Neper. Elle fut aussi appelée logarithme naturel ou encore logarithme hyperbolique par référence à son interprétation en terme d'aire limitée par une hyperbole mais la désignation de Lacroix a fini par l'emporter. Le logarithme népérien est noté ln mais on l'a longtemps noté Log (et il est encore ainsi noté dans certains pays comme aux Etats-Unis) et Lacroix le désignait par l'. Désormais, on centralisera notre étude sur ce logarithme car tous les autres sont liés à lui dans un rapport de proportionnalité. Ainsi, en convenant de désigner le logarithme de base a par $\log_a$, on a :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

En particulier $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Le logarithme (népérien) a fait entrer dans l'arène mathématique le nombre e qui a désormais rejoint une célébrité comme π.

Le nombre *e*

Pour avoir une représentation moins abstraite de e, lisons un passage du *Théorème du Perroquet* de Denis Guedj : « Suppose qu'il y a un an tu aies amassé un beau pécule qui nous permettra de payer notre voyage pour Manaus. Soit P, ce pécule. Tu l'as placé en attendant. Coup de bol, ton banquier t'a proposé un taux d'intérêt mirobolant : 100 % ! Ne rigole pas, ça s'est vu. Pas avec les pauvres, mais avec les riches. Rêve ! Calcule ! Au bout d'un an, tu aurais eu P + P = 2P. Tu aurais doublé ton pécule. Si au lieu de toucher les intérêts à la fin de l'année, tu les avais touchés tous les six mois et que tu les aies replacés, au bout d'un an ça t'aurait fait $P\,(1 + 1/2)^2$. Calcule ! Tu aurais plus que doublé ton pécule : tu aurais 2,25P.
Si au lieu de toucher les intérêts tous les six mois, tu les avais touchés tous les trimestres et que tu les aies replacés, au bout de l'année, ça t'aurait fait $P(1+ 1/4)^4$. Calcule ! Tu aurais gagné encore plus : 2,441P. Si tu les avais touchés tous les mois et que tu les aies replacés, ça t'aurait fait $P(1 + 1/12)^{12}$. Calcule ! 2, 596. Encore plus ! Puis, tous les jours : $P(1 + 1/365)^{365}$. Encore plus ! Toutes les secondes, encore plus ! Et puis, tous les riens du tout, "en continu". Tu n'en peux plus, tu t'envoles, tu planes, tu te dis que c'est Byzance, que ton pécule pécuple, qu'il va quadrupler, décupler, centupler, millionupler, milliardupler, […] Tes

intérêts composés, ils ont beau se décomposer, eh bien, à l'arrivée, tu n'a même pas le triple de ton pécule, ni même 2,9 fois plus, ni même 2,8 fois plus, ni même 2,75 fois plus, ni même 2,72 fois plus… Tu as seulement 2, 71 828 1828 !… Mon pauvre John, après toute cette richesse, te voilà seulement *e* fois moins pauvre qu'au départ ! »

Les logarithmes aujourd'hui

Ce ne sont ni des nombres ni des procédés opératoires, ils forment une famille de fonctions qui sont toutes proportionnelles à la fonction logarithme népérien souvent appelée logarithme par abus de langage. Le logarithme permet de calculer l'aire sous une hyperbole équilatère. Cette fonction, outre le fait qu'elle constitue l'un des pivots du programme du baccalauréat, est omniprésente dans de nombreuses modélisations scientifiques. Les lois physiques les plus simples sont les lois de proportionnalité (Exemple : la loi de Newton peut s'interpréter en disant que la force d'attraction entre deux masses est proportionnelle à leurs masses) mais les lois d'inverse proportionnalité sont aussi légions (Exemple : la loi de Newton dit aussi que la force d'attraction entre deux masses est inversement proportionnelle à la distance (au carré) qui les sépare). Etant donnée l'étroite relation entre le logarithme et la fonction qui à x associe $1/x$ (c'est-à-dire la fonction qui traduit l'inverse proportionnalité), il n'est pas surprenant que le logarithme intervient dans de nombreuses lois scientifiques (des lois acoustiques régissant la propagation d'un son dans l'air aux lois physiologiques dites de Fechner). Terminons par une petite fiction, écrite en parodiant Denis Guedj, montrant au quotidien l'utilisation du logarithme :
« Imagine ! Ton banquier trouve que *e* fois ta mise, c'est trop. Et de te proposer un taux de 10 %. Pas plus ! Pas moins ! Pas si mal, par les temps qui courent ! Histoire de voir, tu te demandes quand tu vas doubler ta mise. Au bout d'un an, (1,1)P (Calcule !), de 2 ans , 1,21P (Recalcule !) de trois … Attends ! Arrête de tâtonner ! Et les logs, c'est pas pour les chiens ! Ou du moins si, pour les savants ! Dans n ans, t'auras $(1,1)^n$P. Si tu veux doubler, tu dois avoir $(1,1)^n\text{P} \geqslant 2\text{P}$ soit $(1,1)^n \geqslant 2$. Comment trouver n ? Passe au log, mon pote !
$n \ln(1,1) \geqslant \ln 2$ (Cherche pourquoi !)
Si tu prends ta calculette ou "la table de logs" de tes parents, tu trouves qu'au bout de 8 ans, ta mise est doublée quelle que soit ta mise de départ. »

N. V.

Le **Théorème du Perroquet** de Denis Guedj a e mérite de montrer que les mathématiques sont faites par des êtres humains et ont une histoire. Il aura fallu bien du temps pour redécouvrir qu'elles ne sont pas sorties un beau jour des années trente achevées et définitives du cerveau pluriel de **Nicolas Bourbaki**.
La respiration naturelle des mathématiques fait succéder des époques de mises en ordre aux périodes de découvertes.
Euler est l'exemple parfait des mathématiciens intuitifs et inventifs. La rigueur n'est pas sa préocupation essentielle. Ses outils, dans des mains moins adroites, produisent bien des erreurs. C'est pourquoi, à de tels découvreurs succèdent des périodes de mises en ordre. Cauchy et Bourbaki sont les meilleurs exemples de ces mathématiciens rigoureux. Le revers de la médaille est une tendance à la stérilité.

 par Henri Lemberg

Calcul symbolique : avenir des mathématiques ?

Les logiciels de calcul symbolique prennent en charge certains des calculs longtemps effectués « à la main ». Vont-ils pour autant remplacer l'activité mathématique humaine ?

Simon Plouffe

A la manière de M. Jourdain, vous effectuez des calculs symboliques « tous les jours » ; par exemple, trouver les racines de l'équation

$$ax = b$$

correspond à une manipulation formelle de l'équation du premier degré, au contraire de la résolution de $6x = 2$, qui, elle, en est une manipulation numérique
(on trouve $x = b/a$, si a n'est pas nul).

Un logiciel de calcul symbolique (on dit aussi formel ou algébrique) n'est rien d'autre qu'un programme informatique capable de réaliser de telles manipulations dans des domaines variés de l'activité mathématique : l'algèbre (résolution d'équations, opérations sur les polynômes, etc.) et l'analyse (dérivation, intégration, etc.).

Les mathématiques, qui sont une sorte de paradigme de l'activité humaine, ne peuvent être réduites à un calcul.

Ces mêmes manipulations qui se trouvent sur les désormais célèbres calculatrices formelles ne sont que la partie émergeante d'un iceberg beaucoup plus important que vous ne l'imaginez.

Le calcul formel, c'est quoi exactement ?

Un logiciel de calcul formel doit être capable – dans l'absolu – d'effectuer le travail mathématique d'un être humain. Malheureusement cette définition montre rapidement ses limites : si $1 + 0$ se réduit à 1, est-on sûr que $(1 + x - 1)/x$ se réduise, quelque soit x, à 1 ? Ici intervient déjà la notion de contexte (x est-il nul ou non ?) que le logiciel aura du mal à prendre en compte. Plus encore, vous vous êtes sûrement déjà heurtés à certaines manipulations qui dépendent du contexte ou du résultat souhaité : quand faut-il factoriser, quand faut-il développer ?

Que vaut-il mieux écrire :

$$\cos^2 x \text{ ou } \frac{\cos(2x) + 1}{2} \text{ ?}$$

$$\ln(9) \text{ ou } 2\ln(3) \text{ ?}$$
$$\ln(xy) \text{ ou } \ln(x) + \ln(y) \text{ ?}$$

Et peut-on toujours écrire avec exactitude que $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$? Si certains calculs sont purement automatiques et donc automatisables (la dérivation d'une fonction en est un excellent exemple), beaucoup d'autres requièrent l'intelligence humaine (l'opposé de la dérivation qui est le calcul intégral fournit le meilleur exemple possible). Or aucune machine ne saura dépasser l'homme, car il lui manque un corps, condition nécessaire d'existence intelligente. Un robot parviendra au mieux à copier l'activité mécanique humaine, mais non à réagir comme l'homme. Les mathématiques, qui sont une sorte de paradigme de l'activité humaine, ne peuvent être réduites à un calcul. Dans ce sens, elles ne pourront être remplacées par une machine. Elles ne consistent pas à effectuer d'interminables exercices répétitifs de manipulation, d'apprentissage et d'utilisation d'algorithmes ; elles consistent à résoudre des problèmes en utilisant logique et raisonnement, à découvrir des liens entre différents concepts, à raisonner à partir de données pour construire des modèles. Le calcul et les manipulations ne sont que les outils qui permettent de faire des mathématiques et ne seront jamais une fin en eux mêmes. Nous devons donc rester plus modestes quant à notre exigence vis à vis du calcul algébrique.

Posons alors : un logiciel de calcul formel doit être capable d'aider le travail mathématique d'un être humain. On peut ainsi considérer que les programmes actuels, qu'ils fonctionnent sur calculatrices ou sur ordinateurs, répondent assez bien à cette exigence et lorsqu'on sait ce que l'on cherche et si l'on sait les piloter, ils offrent une aide exceptionnelle à la découverte et à la compréhension mathématique.

Srinivasa Ramanujan est né à Erode (Inde) en 1887 et mort à Kumbakonam en 1920. Il s'agit de l'un des mathématiciens les plus étonnants qui ait jamais existé.
Il a consigné dans des carnets des formules aussi (ou même plus) étonnantes que celle de Plouffe. Il les a intuitées sans l'aide d'un ordinateur bien entendu mais il ne donnait aucune démonstration de ses résultats.

Godfrey Hardy est né Cranleigh en 1877 et mort à Cambridge en 1947. Ses livres *Inequalities* et *An Introduction to the theory of numbers* parus en 1934 et 1938 sont toujours incontournables pour aborder les sujets évoqués.
Indépendamment de ses recherches personnelles, il eut le grand mérite de reconnaître le talent de Ramanujan.

La formule de Bayley, Borwein et Plouffe

Voici la formule permettant de trouver directement la n-ième décimale de π sans calculer les décimales précédentes (les instructions utilisent le logiciel Maple) :

```
> Sum(1/16^k*(4/(8*k+1)-2/(8*k+4)-1/(8*k+5)-1/(8*k+6)),k=0..infinity)= Pi:

> Int(x^(q-1)/(1-x^8),x=0..1/sqrt(2))=Int(Sum(x^(q-
1+8*k),k=0..infinity),x=0..1/sqrt(2)):

> assume(k>0,q>1):Int(Sum(x^(q-1+8*k),k=0..infinity),x=0..1/sqrt(2))=
Sum(int(x^(q-1+8*k),x=0..1/sqrt(2)),k=0..infinity):

> Sum(1/16^k*(4/(8*k+1)-2/(8*k+4)-1/(8*k+5)-1/(8*k+6)),k=0..infinity)
=Int((4*sqrt(2)-8*x^3-4*sqrt(2)*x^4-8*x^5)/(1-x^8),x=0..1/sqrt(2)):

> int((4*sqrt(2)-8*x^3-4*sqrt(2)*x^4-8*x^5)/(1-x^8),x=0..1/sqrt(2)):

> evalf(%);
3.141592655
```

Les mathématiques expérimentales

On dit souvent : les sciences physiques sont une science expérimentale, alors que les mathématiques ne reposent que sur le raisonnement intellectuel. Les logiciels de calcul formel vont peut être renverser cette idée. Pourtant les mathématiques expérimentales ne sont pas un nouveau concept. L'exemple historique le plus célèbre est celui d'Euler qui évalua grossièrement la valeur de la somme infinie :

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$$

y reconnut une valeur approchée de $\pi^2/6$, puis démontra ce résultat de manière exacte. L'expérimentation est par ailleurs une excellente méthode de résolution, lorsqu'on ne sait par quel bout aborder un problème. Les moyens informatiques actuels et futurs suggèrent de reprendre et d'approfondir cette conception des mathématiques. Les logiciels de calcul formel permettent d'« intuiter », voire de démontrer à l'aide de démonstrateurs automatiques de théorèmes qui mécanisent une partie du raisonnement, de nouvelles vérités mathématiques.

Prenons l'exemple du calcul direct de la n-ième décimale de π sans calcul des décimales précédentes (Bailey, Borwein et Plouffe). L'essentiel de cette découverte n'est pas tant dans la formule elle-même, qui n'est pas très compliquée (les auteurs allant jusqu'à se demander pourquoi Euler ne l'a pas trouvée !) mais parce qu'elle fut trouvée par un ordinateur. Depuis, d'autres formules du même type ont été déterminées de la même façon. Il paraît évident qu'avec le progrès des ordinateurs, d'autres résultats seront obtenus, résultats tellement compliqués que leur démonstration demandera trop de temps pour être réellement accessible et qu'ils échapperont à la dénomination « théorème mathématique » pour être rangés dans une catégorie « théorème expérimental ». Verra-t-on ainsi naître une nouvelle mathématique ?

Le calcul symbolique dans l'enseignement

L'apparition récente des calculatrices symboliques à un prix raisonnable et d'utilisation quasi immédiate – donc accessible à la majorité des élèves – soulève de nombreuses questions quant à leur utilisation en classe et dans les examens. Ces machines remettent en cause le contenu des programmes de mathématiques et des compétences à exiger ! En effet, ces petits ordinateurs sont capables d'effectuer les opérations algébriques demandées au lycée beaucoup plus rapidement qu'un être humain et quasiment sans erreurs. Ils sont capable de tracer le graphe de n'importe quelle fonction, de dériver une expression, de calculer de nombreuses intégrales (mais pas toutes), d'étudier certaines suites ou équations différentielles. Ils sont capables d'obtenir 15 ou plus au Bac, série S.

Alors pourquoi continuer à apprendre et faire ce travail au crayon et sur papier ? Pour répondre à cette question épineuse, il faudrait savoir différencier les compétences nécessaire à l'apprentissage des mathématiques de celles qui ne sont qu'accessoires : qui penserait (qui sait) aujourd'hui extraire une racine carrée à la main ? Pourtant cet algorithme était encore enseigné il y a 30 ans, mais a disparu avec l'arrivée des calculatrices dans les années 1970. Était-il nécessaire à la compréhension des mathématiques ? Sûrement pas ; mais qu'en est-il des identités remarquables, de la résolution des équations du second degré, des formules trigonométriques, voire de l'apprentissage des tables de multiplication, de l'addition ou de la division ?

La progression dans la résolution d'une question mathématique demande un effort de mémorisation et ne saurait être entravée ou ralentie par des lacunes dans ces connaissances de base. Alors, quelles sont ces notions fondamentales que tout élève doit connaître ? Sont-ce celles que l'on retrouvera dans les autres sciences (physique, chimie, biologie, économie, etc.) ? Nous ne risquerons pas de réponse car en donner une demanderait une connaissance beaucoup plus avancée des processus psychologiques de l'apprentissage et du raisonnement. Il faut néanmoins noter l'effort de l'Éducation Nationale pour intégrer le calcul formel dans les programmes officiels. Mais sur le terrain la plus grande confusion règne : les enseignants sont encore une infime minorité à l'utiliser comme outil d'enseignement et les élèves en font une utilisation sauvage, comme « machine à donner des résultats » sans aucune compréhension ni regard critique sur les résultats fournis.

Pour conclure, n'oublions pas que si les mathématiciens utilisent le calcul formel, celui-ci leur rend la pareille en soulevant de nombreux et intéressants problèmes de recherche : la mise au point de nouveaux algorithmes a permis une percée dans différents domaines de l'algèbre (par exemple en cryptographie), ou le problème du contrôle de la taille et de l'évaluation des temps de calcul qui sont à l'origine de la théorie de la complexité.

H. L.

Nous allons enfin nous débarasser des mathématiciens !

La machine peut-elle démontrer ?

Pour trouver leur formule, Bayley, Borwein et Plouffe utilisèrent un logiciel de calcul symbolique et donc un ordinateur. Cependant, une fois trouvée, il est facile de vérifier leur formule "à la main". Autrement dit, si la machine est utile dans la phase de recherche, elle ne l'est plus pour prouver le résultat. Ce type d'utilisation de la machine ne gêne aucun mathématicien. Il en est différemment quand elle intervient au niveau de la démonstration.

Les quatre couleurs

En 1976, deux mathématiciens américains - Kenneth Appel et Wolfgang Haken - achevaient la démonstration du théorème des quatre couleurs. Ce théorème s'énonce ainsi : « quatre couleurs suffisent pour colorier une carte de sorte que deux pays ayant une frontière commune soient coloriés différemment ». Ce résultat était expérimentalement connu par les cartographes depuis fort longtemps, mais tous les essais de preuve avaient échoués. Pour le prouver, Appel et Haken ont d'abord réduit - par une preuve « classique » - les cas à examiner à un nombre fini et « raisonnable », 1025 en l'occurrence. Puis, ils ont examiné ces 1025 cas en s'aidant d'un ordinateur, suivant un algorithme dont ils ont prouvé « classiquement » la correction.

Réticences

Quand Appel et Haken ont présenté leur démonstration du théorème des quatre couleurs, les mathématiciens se sont sentis un peu troublés. Certains d'entre eux ont même rejeté cette preuve. Ils ont fait valoir que Appel et Haken n'avaient pas prouvé que l'unité centrale fonctionnait bien !

Cet argument peut sembler abusif. Si les ordinateurs ne marchaient pas, ça se saurait depuis le temps que l'on compte sur eux pour tout calculer. Quelques années plus tard, un autre professeur de mathématiques – Thomas Nicely (voir page 84) – trouva une erreur dans un microprocesseur et montra ainsi que ces réticences n'étaient pas injustifiées. La démonstration du théorème reste cependant admise puisqu'elle a fonctionné sur divers types d'ordinateurs. Pour beaucoup de mathématiciens, l'essentiel est qu'une preuve soit reproductible par son lecteur. la question du non-fonctionnement d'une unité centrale est-elle plus préoccupante que celle du bon fonctionnement d'un cerveau ?

Un exemple

Voici un petit exercice d'arithmétique en guise d'exemple élémentaire :

Trouver tous les nombres égaux à la somme des cubes de leurs chiffres.

Ce problème de niveau élémentaire admet une démonstration par ordinateur du même type que le théorème des quatre couleurs.

On démontre d'abord de façon classique (voir encadré) qu'une solution a au plus trois chiffres puis on essaye en utilisant un ordinateur tous les nombres de 0 à 999. La machine donne 0, 1, 153, 370, 371 et 407. Vous pouvez essayer avec votre logiciel favori, ça marche. Que pensez-vous de ce type de preuve ?

Si $a_n a_{n-1} \ldots a_0$ est un nombre égal à la somme des cubes de ses chiffres, on a :

$$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_0 = a_n^3 + a_{n-1}^3 + \ldots + a_0^3$$

Donc, puisque $a_i \leqslant 9$ pour tout i et $a_n \neq 1$, nous avons : $10^n \leqslant (n+1)\,9^3$

Nous montrons alors que la suite $10^n / (n+1)$ est croissante. Comme $10^3 / 4 \geqslant 9^3$, nous en déduisons que $n \leqslant 2$. Donc, toute solution a au plus trois chiffres.

Problèmes historiques

Le problème de Sylvester

En 1893, James Sylvester (1814-1897) posa le problème suivant. **Soit un ensemble fini E de *n* points tel que toute droite passant par deux des *n* points passe au moins par un troisième point de E. Les *n* points de E sont-ils obligatoirement tous alignés ?**

Solution.

La réponse est oui.
Pour le démontrer, supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Considérons toutes les droites passant pas au moins deux points de l'ensemble de points et une droite. L'ensemble des points et celui des droites étant finis, il existe une distance non nulle plus petite que toutes les autres. Soit (*d*) une droite et A un point n'appartenant pas à (*d*) qui réalise cette distance minimale. Désignons par H le pied de la hauteur abaissée de A sur (*d*). La droite (*d*), d'après notre hypothèse, contient au moins trois points de l'ensemble. Il y en a donc au moins deux situés d'un même côté par rapport à H (l'un de ces deux points pouvant d'ailleurs être confondu avec H). On peut alors dire que la distance de B à (AC) est strictement inférieure à la distance AH, ce qui contredit l'hypothèse de minimalité faite sur AH. Cette contradiction entraîne que les points de l'ensemble sont obligatoirement tous alignés.
Ce problème, posé en 1893, n'a été résolu que beaucoup plus tard par Gallaï, puis de façon élémentaire par L. M. Kelly en 1948.

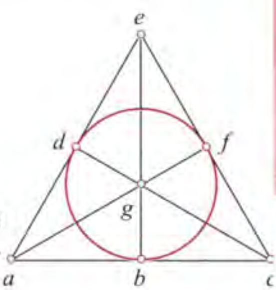
Le problème de Jacob Steiner

Une femme du monde souhaite inviter sept amis à dîner. Mais elle ne peut recevoir que 3 personnes à la fois ; elle organisera donc plusieurs diners. De plus elle voudrait que chaque paire de ses amis se rencontre à sa table exactement une fois. Comment doit-elle procéder ?

dîner n°	1	2	3	4	5	6	7
1er invité	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*c*	*c*
2e invité	*b*	*d*	*f*	*d*	*e*	*d*	*e*
3e invité	*c*	*e*	*g*	*f*	*g*	*g*	*f*

Solution.

Cette solution peut être représentée par la figure ci-contre, qui aussi une représentation d'un plan projectif à 7 points.



par Paul Louis Hennequin

Les tables de mortalité aux XVII^e et XVIII^e siècles

Les tables de mortalité servent de nos jours à déterminer les primes d'assurance vie. C'est dans le même souci qu'elles ont été créées au XVII^e siècle. Il s'agissait alors d'établir le montant des rentes viagères.

TABLE DE MORTALITÉ
De Duvillard.

AGES.	VIVANTS.	AGES.	VIVANTS.	AGES.	VIVANTS.	AGES.	VIVANTS.
0	1 000 000	28	451 635	56	248 782	84	15 175
1	767 525	29	444 932	57	240 214	85	11 886
2	671 834	30	438 183	58	231 488	86	9 224
3	624 668	31	431 398	59	222 605	87	7 165
4	598 713	32	424 583	60	213 567	88	5 670
5	583 151	33	417 744	61	204 380	89	4 686
6	573 025	34	410 886	62	195 054	90	3 830
7	565 838	35	404 012	63	185 600	91	3 093
8	560 245	36	397 123	64	176 035	92	2 466
9	555 486	37	390 219	65	166 377	93	1 938
10	551 122	38	383 300	66	156 651	94	1 499
11	546 888	39	376 363	67	146 882	95	1 140
12	542 630	40	369 404	68	137 102	96	850
13	538 255	41	362 419	69	127 347	97	621
14	533 711	42	355 400	70	117 656	98	442
15	528 969	43	348 342	71	108 070	99	307
16	524 020	44	341 235	72	98 637	100	207
17	518 863	45	334 072	73	89 404	101	135
18	513 502	46	326 843	74	80 423	102	84
19	507 949	47	319 539	75	71 745	103	51
20	502 216	48	312 148	76	63 424	104	29
21	496 317	49	304 662	77	55 511	105	16
22	490 267	50	297 070	78	48 057	106	8
23	484 083	51	289 361	79	41 107	107	4
24	477 777	52	281 527	80	34 705	108	2
25	471 366	53	273 560	81	28 886	109	1
26	464 863	54	265 450	82	23 680	110	0
27	458 282	55	257 193	83	19 106		
28	451 635	56	248 782	84	15 175		

Une table des mortalité publiée en 1797

Bien que les jeux de hasard soient pratiqués depuis la plus haute antiquité, on fait remonter la théorie des probabilités au XVI^e siècle avec Lucas Paccioli (1445-1514), Nicolas Tartaglia (1500-1537), Jérôme Cardan (1501-1576) mais surtout au XVII^e avec Pierre de Fermat (1601-65), Blaise Pascal (1623-1662), Christiaan Huygens (1629-1695) et Jacques Bernoulli (1654-1705) qui, le premier, énonce une loi des grands nombres permettant d'évaluer des probabilités à partir de relevés statistiques.

De même, hormis l'usage de recensements et de compilations chez les Égyptiens et les Romains et quelques rudiments chez Ulpianus et Cardan, c'est au XVII^e en Angleterre qu'apparaissent les premiers travaux de démographie.

John Graunt (1620-74) puis William Petty (1623-67) travaillent sur les *Bills of Mortality* qui publient chaque semaine à partir de 1592 et durant plus

de 60 ans l'état de santé à Londres afin de permettre à la haute société de s'éloigner à la campagne quand sévit une épidémie.
Huygens reprend ces données dans sa correspondance en 1671.
La même année, Jean de Witt (1625-1672) publie à La Haye un traité sur les rentes viagères que Nicolas Struyck (1687-1769) republiera en 1740 en insistant sur le fait qu'en moyenne les femmes vivent plus que les hommes. Edmond Halley (1656-1742), connu surtout comme astronome, publie en 1693 des tables relatives à la population de Breslau, capitale de la Prusse Orientale (actuelle Wroslaw en Pologne) qui lui parait beaucoup plus stable que celle de Londres.
Abraham de Moivre (1667-1754) republiera ces tables en 1726 en vue du calcul des rentes viagères.

En 1746, Antoine Deparcieux (1703-1768) reprend dans un in quarto de 154 pages, *Essai sur les probabilités de la vie humaine*, les tables de Halley, celles de Thomas Simpson (1710-1761) relatives aux rentes viagères calculées à partir d'études de John Smart en 1726 sur les registres mortuaires de Londres, ainsi que celles établies en 1743 par William Kerseboom (1651-1771) en Hollande. Il les compare à ses propres tables concernant les rentiers et diverses communautés parisiennes de religieux et religieuses.

Mentionnons encore la publication en 1760 par Leonhard Euler (1707-1783) de deux mémoires à l'Académie de Berlin, l'un sur la mortalité et la multiplication du genre humain, l'autre sur les rentes viagères où il utilise les tables de Kerseboom. Pierre Simon de Laplace (1749-1827) consacre en 1812 un chapitre de son monumental *Traité analytique des probabilités* à la durée de vie d'un couple ou d'une association.

Edmond Halley est né à Londres en 1656 et mort à Greenwich en 1742. Il est plus connu comme astronome que comme mathématicien. Auteur du premier catalogue des étoiles du ciel austral (1679), il observa en 1681-1682 la comète à laquelle son nom est restée ; attaché, avant et après son passage au périphélie ; il calcula son orbite et prèdit son retour pour 1758, annonçant pour la première fois le retour au périphélie des comètes périodiques (confirmation de la théorie de Newton). Il découvrit l'amas d'Hercule (1715) et mit en évidence le mouvement propre des étoiles (1718) en montrant que certaines s'étaient déplacées depuis Ptolémée.

Qu'est-ce qu'une table de mortalité ?

Une table de mortalité est relative à un ensemble d'individus décédés, classés suivant la durée de leur vie, c'est-à-dire l'âge à leur décès.
Cet ensemble correspond à une aire géographique et à une période pour lesquels des registres sont disponibles complets et exacts.

Pour $0 \leqslant n \leqslant m$, la table donne M_n, nombre d'individus morts à l'âge n, c'est à dire dont la durée de vie appartient à l'intervalle $[n, n+1]$; la table s'arrête à l'âge m, âge extrême atteint par au moins un des individus. On a donc $M_m > 0$ et $M_n \geqslant 0$ pour $0 \leqslant n \leqslant m$.

Définissons maintenant la suite $\{S_n\}_{0 \leqslant n \leqslant m}$ où nous notons S_n le nombre de ceux qui ont atteint l'âge n et S_0 l'effectif total de la population : on a $S_m = M_m$, et, pour $0 \leqslant n < m$:

$$S_n = M_n + S_{n+1} = \sum_{k=n}^{m} M_k.$$

La suite $\{S_n\}$ est décroissante, les suites $\{M_n\}$ et $\{S_n\}$ se déduisent aisément l'une de l'autre ; certaines tables (voir ci-dessus) donnent directement la suite $\{S_n\}$ et choisissent pour S_0 une puissance de 10 (1000, 10000, 1000000) pour faciliter les comparaisons.

Pour un individu tiré au hasard dans la population, l'âge au décès est n avec une probabilité $\frac{M_n}{S_0}$.

La probabilité d'avoir atteint l'âge n est $\frac{S_n}{S_0}$.

Pour un individu tiré au hasard parmi ceux qui ont atteint l'âge n, la probabilité d'être décédé à l'âge p (avec $n \leqslant p < m$) est $\frac{M_p}{S_n}$.

Celle d'avoir atteint l'âge p est $\frac{S_p}{S_n}$.

Celle de ne pas dépasser n est $\frac{M_n}{S_n}$.

Vie probable

À partir de la table de $\{S_n\}$, on peut déterminer par un calcul trés simple la vie probable à partir de n, notée V_n ; en gros, il s'agit du nombre d'années nécessaire pour que la population soit divisée par deux, précisément, c'est la médiane de la survie de ceux qui ont atteint l'âge n, c'est à dire que V_n est égal à p si on a la double inégalité :

$$\frac{S_{n+p}}{S_n} \geqslant \frac{1}{2} > \frac{S_{n+p+1}}{S_n}$$

ou $S_{n+p} \geqslant \frac{S_n}{2} > S_{n+p+1}$.

La décroissance de la suite $\{S_n\}$ assure qu'il n'y a qu'un seul p satisfaisant cette double inégalité ; V_n se détermine donc en calculant $\frac{S_n}{2}$ et en lisant dans la table l' âge le plus grand $n+p$ tel que :

$$S_{n+p} \geqslant \frac{S_n}{2}.$$

Remarquons que, si $V_n = p$ et $V_{n+1} = q$, on a :

$$S_{n+p} \geqslant \frac{S_n}{2} \geqslant \frac{S_{n+1}}{2} > S_{n+1+q}.$$

qui implique : $n + 1 + q > n + p$, vue la décroissance de $\{S_n\}$, et puisque p et q sont entiers, $q \geqslant p - 2$, donc $V_n \geqslant V_{n+1} - 2$.
Remarquons aussi qu'on a $S_{n+p} > 0$, donc $n + p \leqslant m$ ou $V_n \leqslant m - n$.

Espérance de vie

Définissons maintenant la durée moyenne ou espérance de survie à âge n, et notons-la E_n.
Ce concept a été introduit en 1709 par Nicolas Bernoulli (1687-1759) : parmi

les S_n individus qui ont atteint l'âge n, les M_{n+j} décédés à l'âge $n + j$, donc entre $n + j$ et $n + j + 1$, ont survécu en moyenne $j + 1/2$; on pose donc :

$$E_n = \sum_{j=0}^{m-n}\left(j + \frac{1}{2}\right)\frac{M_{n+j}}{S_n}.$$

Comme $M_{n+j} = S_{n+j} - S_{n+j+1}$, et

$$\sum_{j=0}^{m-n} M_{n+j} = S_n,$$

on a :

$$E_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{S_n}\sum_{j=1}^{m-n} j(S_{n+j} - S_{n+j+1})$$

or

$$\sum_{j=1}^{m-n} j(S_{n+j} - S_{n+j+1}) =$$

$$(S_{n+1} - S_{n+2}) + 2(S_{n+2} - S_{n+3})$$

$$+ \ldots$$

$$+ (m-n-1)(S_{m-1} - S_m) + (m-n)S_m.$$

On en déduit : $E_m = \dfrac{1}{2}$, et pour $0 \leqslant n < m$:

$$E_n = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{m-n}\frac{S_{n+j}}{S_n} > \frac{1}{2}$$

ou : $S_n\left(E_n - \dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m-n} S_{n+j}$

$$= \sum_{i=n+1}^{m} S_i,$$

de même $S_{n+1}\left(E_{n+1} - \dfrac{1}{2}\right) =$

$\displaystyle\sum_{i=n+2}^{m} S_i$ et, en retranchant,

$$S_n\left(E_n - \frac{1}{2}\right) - S_{n+1}\left(E_{n+1} - \frac{1}{2}\right) = S_{n+1}$$

ou

$$S_n\left(E_n - \frac{1}{2}\right) = S_{n+1}\left(E_{n+1} + \frac{1}{2}\right)$$

qui permet de calculer les E_n de proche en proche à partir des S_n et de $E_m = 1/2$.

La suite $\{S_n\}$ est décroissante.

On a donc $S_n \leqslant S_{n+1}$, qui équivaut à

$$E_n - \frac{1}{2} \leqslant E_{n+1} + \frac{1}{2}$$

ou $E_n \leqslant E_{n+1} + 1$

ce que l'on peut écrire :

$$E_n + n \leqslant E_{n+1} + n + 1$$

La suite $\{E_n + n\}$ est donc croissante.

Connaissant S_m, on peut déterminer la

Bills of mortality
de John Graunt pour Londres et ses environs l'année 1624.

The Total of all the Burials in the places aforesaid, is 12 210

Whereof, of the Plague, 11

Christned in all the aforesaid places this Year, 8299

Parishes clear of the Plague, 116

Parishes that have been Infected this Year, 6

Sur cet extrait, on voit que l'un des buts principaux de ce type de statistiques était de suivre les avancées de la peste.

suite $\{S_n\}$ à partir de la suite $\{E_n\}$ par :

$$S_n = S_{n+1}\frac{1 + 2E_{n+1}}{-1 + 2E_n}$$

pour $0 \leq n \leq m - 1$.
Donnons maintenant une interprétation géométrique de E_n.
Peprésentons $\{S_n\}$ par la suite $\{P_n\}$ des points P_n de coordonnées (n, S_n).

Notons Q_n le point de coordonnées $(n, 0)$.
Pour $0 \leq n \leq m+1$, écrivons :

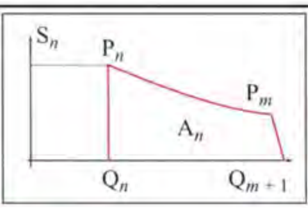
$$E_n = \frac{1}{S_n}\{\frac{1}{2}S_m + \frac{1}{2}(S_m + S_{m-1}) + \frac{1}{2}(S_{m-1} + S_{m-2}) + \dots + \frac{1}{2}(S_{k+1} + S_k) + \dots + \frac{1}{2}(S_{n+1} + S_n)\}$$

$\frac{1}{2}S_m$ est l'aire du triangle $Q_mP_mQ_{m+1}$,

$\frac{1}{2}(S_{k+1} + S_k)$, l'aire du trapèze $Q_kP_kP_{k+1}Q_{k+1}$, de sorte que

$$E_n = \frac{A_n}{S_n},$$

où nous notons A_n l'aire délimitée par l'axe des abscisses, la ligne brisée $P_nP_{n+1}\dots P_kP_{k+1}\dots P_mQ_{m+1}$ et la parallèle à l'axe des ordonnées d'abscisse n.



Interprétation géométrique de l'espérance de vie : il s'agit du quotient de l'aire indiquée et de la longueur du premier segment vertical QnPn.

Usage des tables

La question de la validité d'une table ne se pose pas tant qu'on la considère comme le compte-rendu d'une certaine réalité : l'âge au décés des individus de la population tabulée et qu'on est sûr des informations .

Mais en général, on veut utiliser les tables pour les appliquer à d'autres populations comportant des individus encore en vie ; il peut s'agir d'une utilisation collective (assurances, rentes) qui intéresse à la fois les organismes financiers et leurs clients, ou plus personnelle, chacun d'entre nous se demandant ce que la table peut lui apprendre sur sa propre vie.
Or la mortalité dépend de nombreux facteurs autres que l'âge : géographiques (climat), sociaux (niveau de vie), sanitaires (épidémies, découvertes médicales), politiques (guerre) et varie beaucoup d'un siècle au suivant, d'un pays à l'autre et selon le sexe (voir l'encadré).

Même à une époque et dans un pays fixés, son application à un individu donné suppose qu'il est raisonnable de calculer sa probabilité de survie comme celle d'un individu tiré au hasard parmi ceux qui ont servi à construire la table.

Compte tenu de la rapidité des évolutions, on ne peut pas utiliser directement aujourd'hui des tables du passé relatives à des populations éteintes, mais on doit construire par extrapolation une table plus réaliste, ce qui n'est possible qu'après une analyse fine des causes de décès et de leur évolution prévisible.

P. L. H.

Les grands problèmes

Pourquoi les Grecs ont-ils privilégié la règle et le compas pour la construction des courbes ? Quelle qu'en soit la raison véritable, ce choix a marqué les mathématiques jusqu'à nos jours. En particulier, il a fait l'impossibilité de la quadrature du cercle. Elle consiste pourtant simplement à calculer le nombre π dont on connaît aujourd'hui plusieurs milliards de décimales.
Autre héritage des Grecs, l'arithmétique ne verra son véritable avènement qu'avec Pierre de Fermat, qui restera célèbre grâce aux problèmes qu'il résolut mais aussi et surtout grâce à celui qui n'a pu être démontré que récemment et qui porte son nom.

par Elisabeth Busser

Constructions à la règle et au compas

Pourquoi les Grecs ont-ils privilégié la règle et le compas pour la construction des courbes ? Quelle qu'en soit la raison véritable, ce choix a marqué les mathématiques jusqu'à nos jours.

Droite, d'un grave port, pleine de majesté,
Inflexible et surtout observant l'équité,...

Telle est la règle, décrite par le conteur du XVII^e siècle Charles Perrault. Il lui associe, comme le faisaient déjà les Anciens, le compas, à qui il semble prêter une certaine désinvolture :

Son frère le compas fut pourvu seulement
De jambes et de tête, et marche justement,
Tournant de tous côtés par ordre et par mesure,
Et toujours de ses pas traçant quelque figure.

À eux deux, ces instruments mythiques de l'architecture grecque, referont le monde de la géométrie, et leur usage défiera longtemps les mathématiciens.

On peut évidemment se demander pourquoi les Grecs, ces grands bâtisseurs, inventeurs de nombreux et ingénieux moyens mécaniques pour tracer des courbes, ont à ce point privilégié ces deux instruments simples que sont la règle et le compas, refusant à tous les autres le statut géométrique que la pratique leur conférait. Il n'y avait, disait déjà Platon de vraie construction

Lorenzo Mascheroni est né à Bergame en 1750 et mort à Paris en 1800. Il a dédié son livre *La géométrie du compas* (1797) à Napoléon Bonaparte. Dans ce travail, il montra que toute construction à la règle et au compas peut être faite avec le compas seul. En fait, ce résultat avait déjà été établi un siècle auparavant par un mathématicien danois dont il ignorait l'existence, Georg Mohr (1640-1697). L'un de ses problèmes est connu sous le nom de problème de Napoléon. Il s'agit de retrouver le centre perdu d'un cercle.

Jean Poncelet est né à Metz en 1788 et mort à Paris en 1867. Inspiré par Mascheroni, il montra que la règle suffisait pour les constructions à la règle et au compas à condition de disposer d'un

cercle et de son centre (théoréme de Poncelet-Steiner) . Lui aussi a un lien avec Napoléon Bonaparte. Il fut laissé pour mort pendant la retraite de la campagne de Russie à laquelle il participait en tant que lieutenant du génie.

qu'à la règle et au compas. Eux seuls étaient capables de produire un mouvement « vrai et élémentaire », selon Théon de Smyrne, « pur » comme aurait dit le philosophe du mythe de la Caverne. C'est pourquoi, depuis l'Antiquité grecque, qui a marqué de son sceau toute la géométrie jusqu'au XVIII^{e} siècle, et laisse encore des traces dans celle qu'on enseigne à l'école aujourd'hui, on ne tient pour géométriquement valables que les constructions réductibles à la circonférence et à la droite. Bien pire, dès lors qu'un énoncé demande de « construire », il sous-entend automatiquement « à la règle et au compas » ; vous bannirez d'office règle graduée, équerre, ou tout autre instrument.

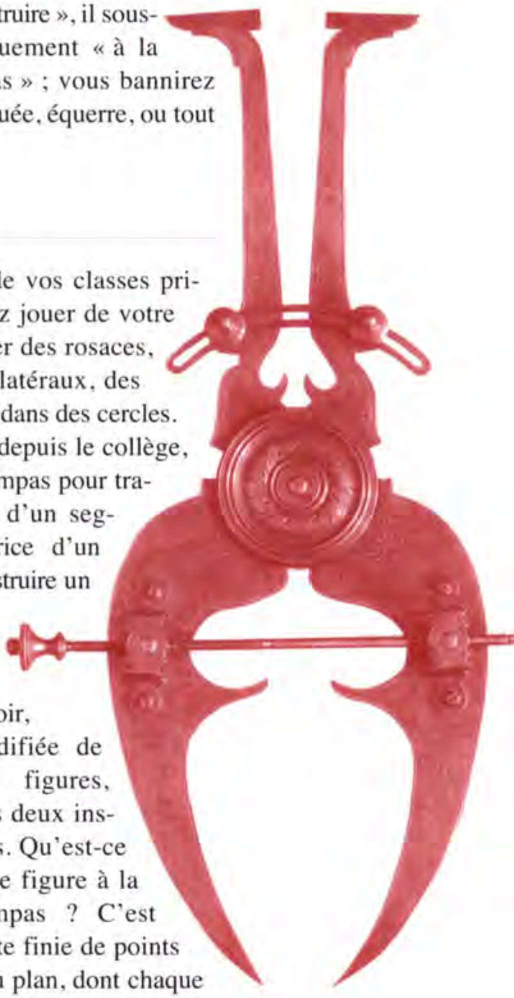
Un jeu d'enfant

Depuis le début de vos classes primaires, vous savez jouer de votre compas pour tracer des rosaces, des triangles équilatéraux, des hexagones inscrits dans des cercles. Vous savez aussi, depuis le collège, utiliser règle et compas pour tracer la médiatrice d'un segment, la bissectrice d'un angle, ou pour construire un angle droit.

Vous utilisez, parfois sans le savoir, une méthode codifiée de construction de figures, n'utilisant que les deux instruments autorisés. Qu'est-ce que construire une figure à la règle et au compas ? C'est construire une suite finie de points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ du plan, dont chaque point est obtenu à partir des précédents par l'une des constructions élémentaires suivantes : tracé d'une droite passant par deux points donnés, ou tracé d'un cercle de centre un point donné, et de rayon obtenu à partir de points connus.

Dans les trois premières constructions ci-contre, la règle sert bien évidemment à tracer des droites, mais le compas sert plus à reporter des longueurs qu'à tracer véritablement des cercles. On pourra ainsi utiliser ces deux seuls instruments pour reproduire un angle, ou pour construire des droites parallèles.

Pour reproduire un angle, l'idée de base est en choisissant un nouveau



Un compas ancien (XVI^{e} siècle)

sommet O′, de construire d'abord un triangle isocèle AOB, puis de construire un triangle isométrique A′O′B′ , en reportant les longueurs des trois côtés (voir ci-contre où l'angle de droite est une reproduction de celui de gauche).

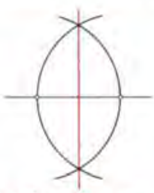
Une droite *d* étant donnée (en bas sur le dessin), pour mener par O (voir la croix) la parallèle à *d*, on utilise une sécante quelconque (OA), et on reproduit en O l'angle que fait (OA) avec *d* suivant la technique décrite dans le dessin précédent. Nous obtenons la droite cherchée.

Ces cinq constructions sont tellement fondamentales qu'elles font partie du bagage indispensable à tout géomètre. Elles ouvrent la voie à des tracés plus compliqués comme ceux des polygones réguliers.

Les polygones constructibles

Un polygone régulier, de *n* côtés, est dit constructible à la règle et au compas si l'angle de mesure $2\pi/n$ radians est lui-même constructible.

Quelques constructions simples



Médiatrice d'un segment

Perpendiculaire à une droite passant par un point donné

Bissectrice d'un angle

Reproduction d'un angle

Pour le triangle équilatéral, c'est facile.
Pour construire un carré de côté [AB] donné, on peut par exemple construire le symétrique A′ de A par rapport à B, puis la médiatrice de [AA′], qui donne le côté [BC]. La construction de la médiatrice de [AC], dont on connaît déjà un point, B, donne non seulement le centre du cercle inscrit, mais en plus le quatrième sommet.

Pour le pentagone, de nombreuses constructions ont été proposées au fil des âges. L'une des plus simples consiste, pour inscrire dans un cercle donné de centre O et de rayon *r*, un pentagone régulier, à tracer d'abord deux diamètres perpendiculaires [AA′] et [BB′] puis, à partir du milieu I de [OA], le point E de [IA′] tel que IE = IB.

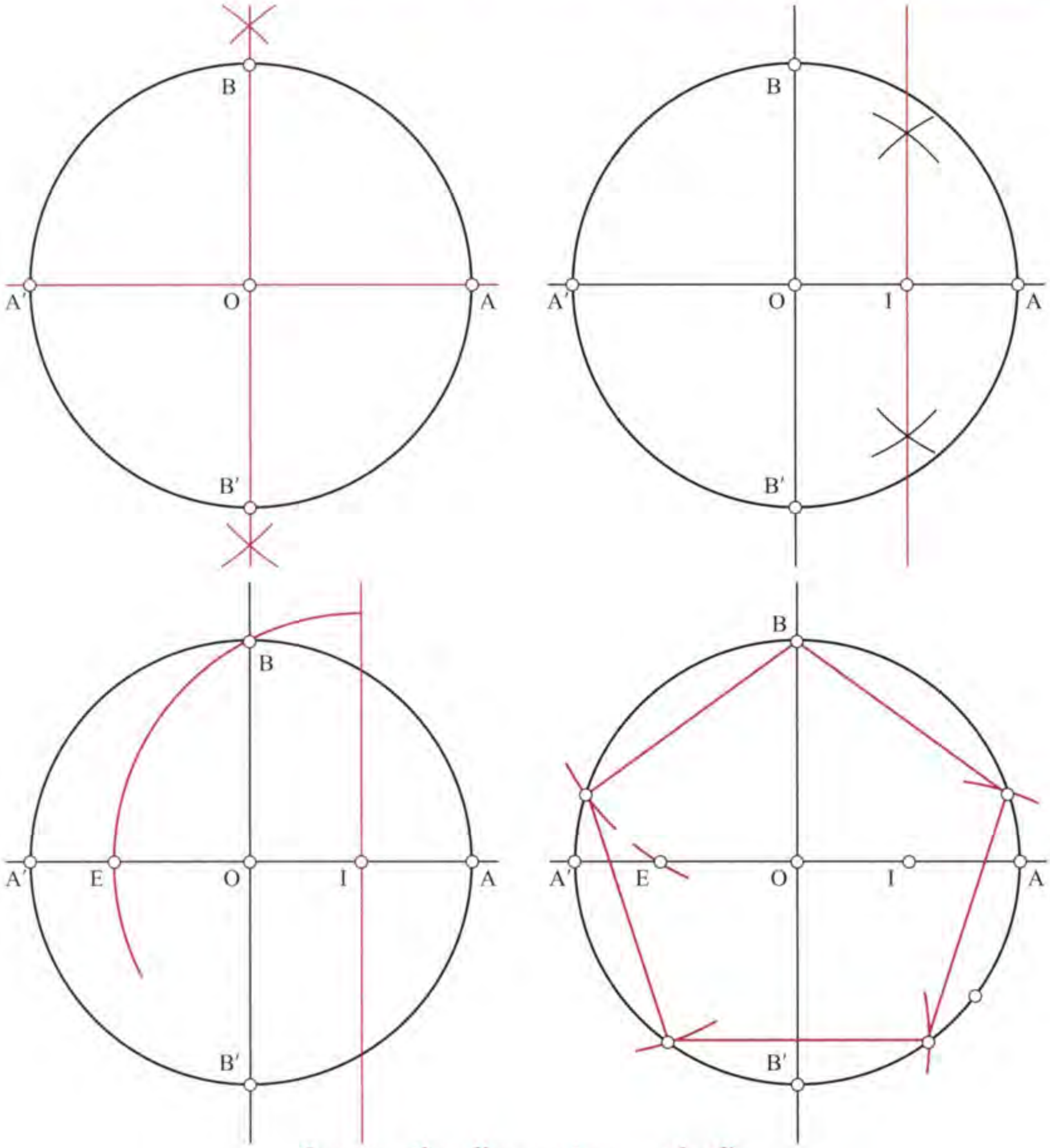
On peut alors vérifier que la distance BE vaut exactement :

$$r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

qui est le côté du pentagone régulier inscrit dans le cercle de rayon *r*. Il suffit alors de reporter celui-ci avec le compas quatre fois à partir d'un point du cercle.

Notons au passage qu'on retrouve ici le fameux nombre d'or $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, puisque $BE = r\sqrt{3-\varphi}$.

Après le pentagone, l'hexagone, sur lequel il est inutile de s'étendre tant sa construction vous est familière, mais l'heptagone ? Figurez-vous que le polygone régulier à 7 côtés n'est pas constructible à la règle et au compas. C'est Gauss lui-même qui l'a dit :



Construction d'un pentagone régulier

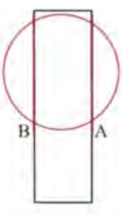
Un polygone régulier à n côtés n'est constructible à la règle et au compas que si n est de la forme $2^r p_1 p_2 \ldots p_s$ où les p_i sont des nombres premiers de Fermat distincts (c'est-à-dire qu'ils s'écrivent sous la forme $2^{(2^n)} + 1$).
D'après ce théorème, les polygones à 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17 ou 20 côtés sont constructibles, mais effectivement pas l'heptagone !

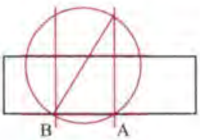
Et si on jetait règle ou compas ?

Plus difficile maintenant : essayons de nous passer de l'un des deux instruments. Il est prouvé (théorème de Mohr-Mascheroni, 1672) que toute construction à la règle et au compas est possible avec le compas seul.
On peut donc, par exemple, construire, dans un cercle donné, sans règle, le

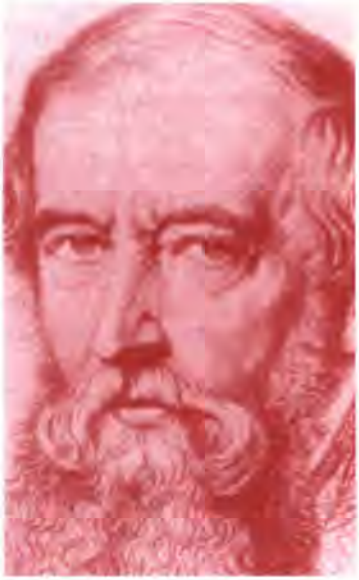
point diamétralement opposé à un point A : il suffit d'inscrire dans ce cercle un demi-hexagone dont l'un des sommets est A. On peut aussi, c'est un peu plus délicat, retrouver à l'aide du seul compas, le centre perdu d'un cercle *c*. D'un point A quelconque du cercle *c* comme centre, on décrit un arc qui coupe *c* en B et C. On construit ensuite deux arcs, l'un de centre C et de rayon AB, l'autre de centre *B* et de même rayon, qui se recoupent en D, puis un autre arc de centre D et de rayon DA, d'où les points E et F. On termine en construisant deux arcs, l'un de centre E et de rayon EA, et l'autre de centre F et de même rayon, qui se coupent en O, et dont vous pouvez vérifier que c'est le centre cherché du cercle *c*.

On peut aussi imaginer des constructions à la règle seule. Essayons la même recherche de centre perdu à l'aide d'une règle à bord parallèles dont la largeur est inférieure au diamètre du cercle. On peut placer la règle sur le cercle et tracer deux parallèles le long de ses bords, coupant l'une le cercle en A ; l'autre en B, puis faire pivoter le bord supérieur de la règle autour de A jusqu'à ce que le bord inférieur rencontre B, et marquer à nouveau les deux bords parallèles. Il est aisé de démontrer que les points d'intersection ainsi déterminés sont sur un diamètre du cercle. Il suffit d'en construire un deuxième pour retrouver le centre.





À la règle seule, sans utiliser le parallélisme de ses bords, on ne peut pas faire grand chose, mais tout s'arrange si l'on dispose déjà d'un cercle connu tracé dans le plan. Il s'agit de retrouver le centre du cercle *C*, le cercle *c* étant donné, et son centre connu.



Jakob Steiner est né à Utzentorf (Suisse) en 1796 et mort Berne en 1863. Outre le théoréme de Poncelet-Steiner (voir ci-dessus), sa contribution à la géométrie est immense

L'idée dominante est de tracer deux cordes (B′A) et (A′B) du cercle connu, qui soient parallèles pour un cercle comme pour l'autre. Il suffira alors de recommencer la construction pour retrouver le centre du cercle *C*.

La géométrie de la règle et du compas, si elle est un peu tombée en désuétude aujourd'hui, a fait les beaux jours des mathématiques d'hier. Elle a permis de trouver une solution à d'innombrables problèmes de construction, mais aussi de mettre en évidence l'impossibillité d'en résoudre d'autres. Elle reste néanmoins une excellente école d'apprentissage des gestes élémentaires de la géométrie.

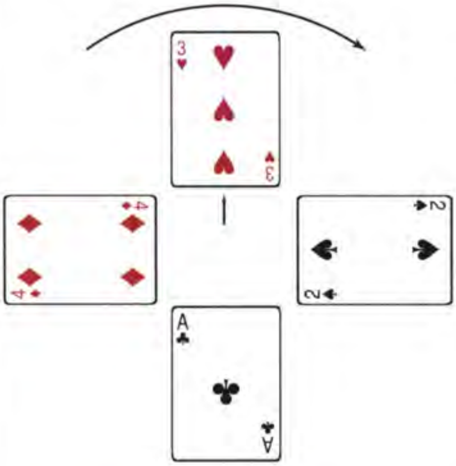
E. B.

Problèmes historiques

La souricière de Cayley

Ce problème, inspiré d'un jeu de cartes, est dû à un mathématicien anglais, Arthur Cayley (1821-1895).

On distribue n cartes numérotées de 1 à n et mélangées dans un ordre quelconque, et on les dispose en cercle, face au-dessus. On part ensuite de la première carte distribuée, et on suit les cartes dans l'ordre où elles ont été disposées, en comptant 1, 2, 3, 4, 5, ... Si, en passant sur une carte, on prononce le numéro de cette carte, on ôte la carte du jeu, puis on redémarre à la carte suivante. Dans l'exemple représenté ci-contre, on dit « 1 » sur le 3, « 2 » sur le 2, on ôte le 2, on redémarre à « 1 » sur le 1, donc on ôte le 1, on dit à nouveau « 1 » sur le 4, « 2 » sur le 3, « 3 » sur le 4, « 4 » sur le 3, « 5 » sur le 4, « 6 » sur le 3, etc. C'est perdu !



Pour un jeu de quatre cartes (comme sur le dessin), quelle est la probabilité que l'on gagne, c'est-à-dire que l'on enlève les quatre cartes du jeu.

Solution.

Il y a 24 dispositions possibles des quatre cartes, compte tenu de la cartes de démarrage et du sens de parcours.
Sur ces 24 dispositions, 9 ne permettent d'enlever aucune carte, 6 permettent d'en enlever seulement une, 3 permettent d'en enlever exactement deux et 6 permettent d'enlever les quatre cartes.
La probabilité est donc égale à 6/24, soit 0,25.

On remarquera qu'aucune disposition ne permet de laisser une seule carte ! En effet, en ôtant l'avant-dernière carte, on redémarre à 1, et on prononce donc forcément le numéro de cette carte !

par David Delaunay

Résolution des équations algébriques

La recherche des solutions des équations algébriques a amené la naissance de la notation algébrique, de la notion d'algorithme ainsi que de celle de groupe.

Tartaglia

Un problème purement technique peut amener la naissance de concepts théoriques profonds.

Une équation algébrique de degré n est une équation de la forme

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

d'inconnue x et de coefficients $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ complexes. Le théorème fondamental de l'algèbre assure qu'une telle équation possède exactement n solutions complexes comptées avec leurs ordres de multiplicité. Au cours de l'histoire, on a cherché à résoudre ces équations au moyen d'extraction de radicaux. Cette méthode issue des exemples simples des degrés un et deux fonctionne jusqu'au degré quatre.

L'Antiquité

Les Egyptiens se sont intéressés à la résolution d'équations algébriques de degré un. Dans le papyrus de Rhind (vers 1700 avant Jésus-Christ), on trouve des problèmes du type :

« Une quantité et une portion de celle-ci vaut tant, quelle est cette quantité ? ».

Les Babyloniens savaient également résoudre des problèmes conduisant à des équations de degré deux, comme par exemple :

« La surface d'un carré, ajoutée à son côté, est égale à 3/4, quel est le côté du carré ? ».

Dans tous les cas, les problèmes posés étaient numériquement concrets et la résolution des équations était purement verbale. Il n'existait pas encore de symbolisme mathématique. Les Grecs savaient eux aussi résoudre des équations du premier et du second degré, mais n'abordaient celles-ci que d'un point de vue géométrique. L'histoire montre qu'un problème purement technique peut amener la naissance de concepts théoriques profonds.

L'algèbre arabe

L'essor de l'algèbre a eu lieu au début du IX^{e} siècle dans les bibliothèques de Bagdad. Les Arabes découvrent, en les traduisant, les écrits grecs et ils les complètent. De surcroît, ils profitent de la notation décimale de position moderne découverte par les Indiens. Al Khwarizmi étudie et résout les équations algébriques de degré deux, en commençant par ajouter, de part et d'autre de chaque membre, des quantités égales de sorte de faire disparaître les quantités négatives. Cette manipulation, appelée *al-jabr* est à l'origine de la dénomination algèbre. Al Khwarizmi présente alors chaque type d'équations possibles :

$$ax^2 = bx,\ ax^2 = bx + c, \text{etc.}$$

puis donne les règles de résolution de celles-ci accompagnées de démonstrations de nature géométrique. La démarche d'Al Khwarizmi est nouvelle, il ne part plus d'un problème concret pour le résoudre, mais donne des méthodes de résolutions générales qu'il suffit d'appliquer pas à pas. Il invente la notion d'algorithme, ce mot est d'ailleurs une déformation du nom de ce mathématicien.

La Renaissance

Dès lors, on sait résoudre les équations algébriques de degré deux, mais que se passe-t-il pour les équations de degrés supérieurs ? Fibonacci (XIII^{e} siècle) pense qu'il n'est pas possible de résoudre algébriquement les équations du troisième degré, les mathématiciens du nord de l'Italie vont le contredire. Au XVI^{e} siècle, le mathématicien Del Ferro parvint à trouver certaines solutions d'équations du troisième degré. Il garde sa méthode secrète mais Del Fiore en prend connaissance et l'exploite dès la mort de Del Ferro. En 1535, il lance un défi à Tartaglia en vue de résoudre trente problèmes, chacun conduisant à une équation de degré trois. L'un d'eux est par exemple :

« Trouver un nombre qui ajouté à sa racine cubique, fasse 6 ».

Al Khwarizmi

Tartaglia découvre une démarche générale de résolutions de ces équations, il remporte le duel mais garde ses méthodes de résolutions secrètes. Cardan, après maintes supplications, arrache ce secret et le publie dans l'ouvrage *Ars Magna* en 1545. Comme Al Kharizmi, il commence par réorganiser l'équation de sorte que chaque quantité engagée soit positive, puis en fonction du type d'équation obtenu, il

Une équation du troisième degré

Soit à résoudre l'équation $y^3 + 3y^2 - 1 = 0$. Le changement de variable $y = x + a$ conduit à l'équation $x^3 + 3(a + 1)\ x^2 + \ldots = 0$ qui est de la forme $x^3 + px + q = 0$ si et seulement si $a = -1$. Posons $y = x - 1$, l'équation devient $x^3 - 3x + 1 = 0$.
On écrit $x = u + v$ avec $uv = 1$ et on parvient à $u^3 + v^3 + 1 = 0$. u^3 apparaît comme solution de l'équation $t^2 + t + 1 = 0$ dont

les racines sont $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

Par suite, u est égal à $e^{\frac{2i\pi}{9}}$, $e^{\frac{8i\pi}{9}}$ ou $e^{\frac{14i\pi}{9}}$.

De plus, $v = \frac{1}{u}$, $x = u + v$ et $y = x - 1$ donne comme solutions :

$$2\cos\frac{2\pi}{9} - 1,\ 2\cos\frac{8\pi}{9} - 1 \text{ et } 2\cos\frac{14\pi}{9} - 1.$$

Une équation du quatrième degré

Soit à résoudre l'équation $x^4 = 12x - 3$. On introduit $t \in \mathbb{R}$ et on réécrit l'équation étudiée :

$$x^4 + 2x^2t + t^2 = 2tx^2 + 12x + t^2 - 3.$$

Le second membre peut s'écrire comme un carré si $t^3 - 3t - 18 = 0$ qui a $t = 3$ comme solution apparente. L'équation de départ s'écrit :

$$(x^2 + 3)^2 = 6(x + 1)^2.$$

Il reste à résoudre les deux équations $x^2 + \sqrt{6}x + 3 + \sqrt{6} = 0$ et $x^2 - \sqrt{6}x + 3 - \sqrt{6} = 0$ qui donnent respectivement les solutions :

$$\frac{-\sqrt{6} \pm i\sqrt{6 + 4\sqrt{6}}}{2} \text{ et } \frac{-\sqrt{6} \pm \sqrt{4\sqrt{6} - 6}}{2}.$$

Cardan

présente la résolution de celle-ci. Voyons la démarche générale de la méthode qui porte désormais son nom.

La méthode de Cardan-Tartaglia

Pour résoudre l'équation $x^3 + a\,x^2 + bx + c = 0$, on commence par réaliser une translation d'inconnue de sorte de se ramener à l'équation

$$x^3 + px + q = 0.$$

On écrit ensuite l'inconnue x sous la forme $u + v$ avec la condition $3uv + p = 0$, x est alors solution de l'équation étudiée si et seulement si

$$u^3 + v^3 + q = 0.$$

En posant $U = u^3$ et $V = v^3$, on est alors amené à résoudre le système somme-produit :

$$\begin{cases} U + V = -q \\ UV = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

dont les solutions sont les deux racines de l'équation $t^2 + q\,t - p^3 / 27 = 0$. Une fois U et V trouvés, u et v s'obtiennent par extraction de racines cubiques sachant aussi $3uv + p = 0$. Puisque $x = u + v$, l'équation est résolue. On obtient ainsi :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

solution particulière de l'équation $x^3 + px + q = 0$ (voir l'encadré « une équation du troisième degré »).

Dans la pratique, cette démarche peut conduire à des expressions complexes des solutions, par exemple, la résolution de $x^3 - 6x + 40 = 0$ donne, entre autres solutions,

$$x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

qui est en fait égale à 4 car

$$20 + 14\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^3$$

Pire, pour mener à terme certaines résolutions, Cardan et Bombelli introduisent des racines carrées de nombres négatifs avant de parvenir à simplifier leurs calculs pour les faire disparaître. C'est la première apparition des nombres imaginaires. Paradoxalement, les nombres imaginaires apparaissent alors que les mathématiciens de cette époque faisaient en sorte de ne pas avoir à manipuler de nombres négatifs et appelaient « racines moins pures » les solutions négatives de leurs équations !

La méthode de Ferrari

Dans la foulée, Ferrari, serviteur de Cardan, détermine comment résoudre l'équation de degré quatre.

Pour résoudre l'équation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

on commence par réaliser une translation d'inconnue pour se ramener à l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

On introduit alors un paramètre t pour écrire l'équation sous la forme :

$$x^4 + 2x^2 t + t^2 = (2t + p)\,x^2 + qx + t^2 + r.$$

Le premier membre est le carré de $x^2 + t$. Le second peut le devenir si $4\,(t^2 + r)\,(2t + p) = q^2$. Cela nous ramène à la résolution d'une équation de degré trois en t. Pour t_0 solution, on est alors amené à résoudre une équation du type

$$(x^2 + t_0)^2 = (ax + b)^2$$

ce qui nous conduit à deux équations de degré deux (voir l'encadré « une équation du quatrième degré »).

La période romantique

Pour résoudre les équations algébriques de degré deux, trois ou quatre, on s'est à chaque fois ramené aux degrés inférieurs, est-ce toujours possible ? Le mathématicien norvégien Abel démontre en 1824 qu'il n'est pas possible de résoudre par radicaux l'équation de degré cinq. Malheureusement son travail ne trouve pas de lecteur et, malgré son génie, il meurt dans la pauvreté à l'âge de 27 ans. Le mathématicien français Galois, s'intéresse lui aussi aux équations algébriques. Afin d'établir l'impossibilité de résoudre les équations de degrés supérieurs à cinq, il ébauche les concepts algébriques modernes (groupes, morphismes, etc.) mais meurt en duel à l'âge de 21 ans, « victime d'une infâme coquette ». Néanmoins, la veille du duel, il rédige à la hâte les idées essentielles de sa théorie. Celles-ci ne seront comprises que trente ans plus tard. La théorie de Galois est actuellement enseignée en université au niveau Maîtrise.

Niels Abel

Évariste Galois

Finalement, il est désormais démontré qu'il n'existe pas de formule par radicaux permettant de résoudre systématiquement les équations de degré cinq ou plus. Il ne reste alors plus qu'à rechercher des solutions apparentes ou d'essayer quelques changements d'inconnues !

D.D.

Bibliographie

- *Des mathématiciens de A à Z*, B. Hauchecorne et D. Suratteau. Ed. Ellipses
- *Le Théorème de perroquet*, D. Guedj, Ed. Seuil
- *L'histoire de l'algèbre et des équations algébriques jusqu'au XIX^e siècle*, E. Cousquer

par Daniel Téman

Les probabilités : une paternité multiple

Les probabilités sont considérées aujourd'hui comme une branche sérieuse des mathématiques. Pourtant, elles sont nées des jeux de hasard.

Les probabilités sont aujourd'hui l'une des branches les plus importantes et les plus pointues des mathématiques. Branche sérieuse d'une discipline souvent considérée comme particulièrement austère, surtout par ceux qui ne la pratiquent pas. Pourtant, tout commence d'une drôle de façon : c'est en cherchant à résoudre des problèmes posés par les jeux de hasard que les mathématiciens donnent naissance aux probabilités.

Blaise Pascal est né à Clermont-Ferrand en 1623 et mort à Paris en 1662. De même que Descartes et beaucoup d'autres savants de son époque, il n'est pas connu seulement pour ses travaux mathématiques, mais aussi pour son œuvre philosophique et ses recherches en physique.

Préhistoire des probabiltés

Les recherches archéologiques ont montré que ces jeux ont été pratiqués dans de nombreuses sociétés, depuis les débuts de la civilisation. Pourtant, les mathématiciens grecs ne semblent pas s'y être intéressés, pas plus que leurs collègues chinois, indiens et arabes. C'est seulement à la Renaissance que les mathématiciens italiens ont commencé à s'en préoccuper.

Le problème resté le plus fameux est celui de la répartition équitable des enjeux d'une partie inachevée, à un moment où l'un des joueurs a un pris un avantage, non décisif évidemment. Luca Pacioli l'évoque dans un livre publié en 1494, intitulé *Summa de Arithmetica, Geo-metrica, Proportio et Proportionalita*, et qui rencontrera un grand succès.

L'auteur y prend l'exemple de deux équipes misant chacune 11 ducats, dans une partie en 60 points. La partie est interrompue alors qu'une équipe a marqué 50 points et l'autre 30 points : pour être équitable, quelle somme doit récupérer chaque équipe ?

La solution de Luca Pacioli est de répartir les enjeux proportionnellement aux points acquis par chaque équipe. Si cette solution a le mérite de la simplicité, elle ne s'appuie sur aucun raisonnement. Elle est d'ailleurs critiquée, 60 ans plus tard, par un autre mathématicien italien, Niccolo Tartaglia. Il faisait remarquer que si une équipe a, par exemple, marqué 10 points et l'autre 0 au moment de l'interruption, la répartition proportionnelle aux points acquis attribue l'intégralité des 22 ducats à la première équipe ; pourtant, la seconde a encore des chances de gain non négligeables.

Pour résoudre le problème, Pacioli reprend une idée proposée quelques années plus tôt par un troisième mathématicien italien, Gerolamo Cardano. Elle consiste à considérer que la répartition doit se faire en fonction des points que chaque équipe a encore besoin de marquer pour gagner la partie.

Cette solution résiste à la critique précédente, mais n'est pas davantage étayée par un quelconque raisonnement. Aucun de ces mathématiciens n'a encore trouvé comment attaquer le problème.

Les idées de Pascal

Finalement, c'est Pascal qui va y parvenir. La question qui lui est posée est précisément la suivante : deux joueurs ont entamé une partie en trois manches. Ils ont misé chacun 32 pistoles. La partie est interrompue alors que l'un des joueurs a gagné deux manches, et l'autre une seule. Comment faut-il répartir entre les deux les 64 pistoles mises en

Pascal est particulièrement satisfait de sa solution parce qu'elle assure la réconciliation, en apparence impossible, d'un raisonnement rigoureux et du hasard.

Christiaan Huygens est né à La Haye en 1629 et mort dans la même ville en 1695. Il était ami de Descartes avec lequel il correspondait.
Outre ses travaux en mathématiques, il est connu pour des travaux en optique et en astronomie.

jeu, en admettant que les deux joueurs ont les mêmes chances de remporter une manche donnée ?

Dans la ligne de l'intuition de Cardano, Pascal a l'idée de prolonger, fictivement, la partie. Il simule un tour supplémentaire, qui peut donner deux résultats. Soit le joueur en retard gagne, il rétablit alors l'égalité à deux manches partout, les deux joueurs partent chacun avec ses 32 pistoles. Soit le joueur en avance gagne encore une manche et donc la partie : il emporte les 64 pistoles. En définitive, le joueur en avance a donc de toute façon droit à 32 pistoles. Quant aux 32 pistoles restant, il faut les partager en deux, puisque les deux joueurs auraient eu les mêmes chances de gagner le coup supplémentaire. En définitive, le joueur en avance a droit à 48 pistoles, et l'autre à 16 pistoles. Le résultat est cette fois tiré d'un raisonnement, incontestable, et qui d'ailleurs n'a jamais été contesté depuis.
Ce raisonnement peut ensuite facilement se généraliser à des parties aussi longues que désiré, interrompues à n'importe quel stade. Il suffit de le répéter autant de fois que nécessaire. Pascal est particulièrement satisfait de sa solution parce qu'elle assure la réconciliation, en apparence impossible, d'un raisonnement rigoureux et du hasard. Il a d'ailleurs l'intention d'écrire un traité sur le sujet, mais il renonce après avoir décidé de consacrer le reste de sa vie à sa foi.

Contribution de Huygens

Le premier traité consacré aux probabilités sera l'oeuvre d'un autre mathématicien et physicien, célèbre pour bien d'autres travaux, Christiaan Huygens. Il le publie en 1667, sous le titre *Tractatus de Ratiociniis in Aleae Ludo*. Il est significatif que ce titre contienne les mots « aleae ludo », qui signifient « jeux de dés ». Mais Huygens précise bien qu'au-delà de l'étude de ces jeux, il s'agit bien pour lui de fonder une nouvelle discipline.

Le contenu du livre de Huygens est assez limité. Il introduit néanmoins ce qui deviendra la notion d'espérance mathématique. Il donne une solution au problème du partage des mises, analogue à celle de Pascal. Enfin, il propose à la sagacité de ses lecteurs cinq problèmes relatifs à des lancers de dés, à des tirages dans des urnes, à des tirages de cartes, problèmes très analogues à ceux que l'on soumet encore aujourd'hui à ceux qui commencent l'étude des probabilités.

Bernoulli et la loi des grands nombres

Un autre traité, plus complet, sur les probabilités, est l'oeuvre d'un mathématicien suisse, Jakob Bernoulli. Il est publié en 1713, huit ans après la mort de l'auteur, par son neveu Daniel Bernoulli.

Cet ouvrage aborde un aspect nouveau, le lien entre probabilités et fréquences en cas de tirages répétés. Ce lien était déjà connu. Pour prendre un exemple simple, celui de tirages répétés avec un dé cubique, la probabilité de tirage de chaque face est d'un sixième. Les habitués des jeux de dés avaient observé depuis longtemps que, dans les longues séries de tirage, les fréquences de sortie de chaque face étaient voisines d'un sixième (pour des dés non truqués, bien entendu).

Jakob Bernoulli a longtemps réfléchi à ce phénomène. Il fallait parvenir d'abord à le traduire sous la forme d'un théorème, en exprimant l'idée qu'en augmentant le nombre des tirages, l'écart entre fréquence et probabilité tendait vers zéro. Le problème est que, quel que soit le nombre de tirages, il reste possible d'obtenir par exemple une série composée uniquement de un, ou sans aucun un. Mais, évidemment, ces séries sont peu probables. D'où la solution : l'écart entre fréquence et probabilité tendait vers zéro avec une probabilité aussi voisine de un que l'on veut.
En termes plus rigoureux, on considère un tirage aléatoire dont l'un des résultats possibles a une probabilité p ; on répète l'expérience n fois, et l'on obtient m fois le résultat considéré ; alors
pour tout ε et pour tout h, il existe N tel que,
si $n > \mathrm{N}$ alors :

$$\text{prob}\left[\left|\frac{m}{n}-p\right|<\mu\right]>1-\varepsilon.$$

Jakob Bernoulli est parvenu à démontrer ce théorème, la validité de sa démonstration n'ayant d'ailleurs jamais été mise en doute. Ce résultat est d'autant plus général qu'il n'est absolument pas nécessaire que les différentes éventualités envisagées ait la même probabilité. Il aura une grande postérité, puisque c'est le premier d'une série qui contient les différentes formes de la loi des grands nombres. Avec ce résultat, toutes les bases de la théorie mathématique des probabilités sont posées.

Bernoulli, dans son traité, énonce d'autres éléments intéressants. Il avait pris conscience de l'importance des calculs de dénombrement pour résoudre les problèmes de probabilité. Reprenant des résultats obtenus par les Chinois et les Indiens, puis par Leibniz, il met la théorie des permutations et des combinaisons sous une forme qui n'a pas changé depuis. Il donne aussi la première expression de la loi binomiale.

Trois fondateurs

Il manquait quand même un élément, en apparence essentiel : une définition

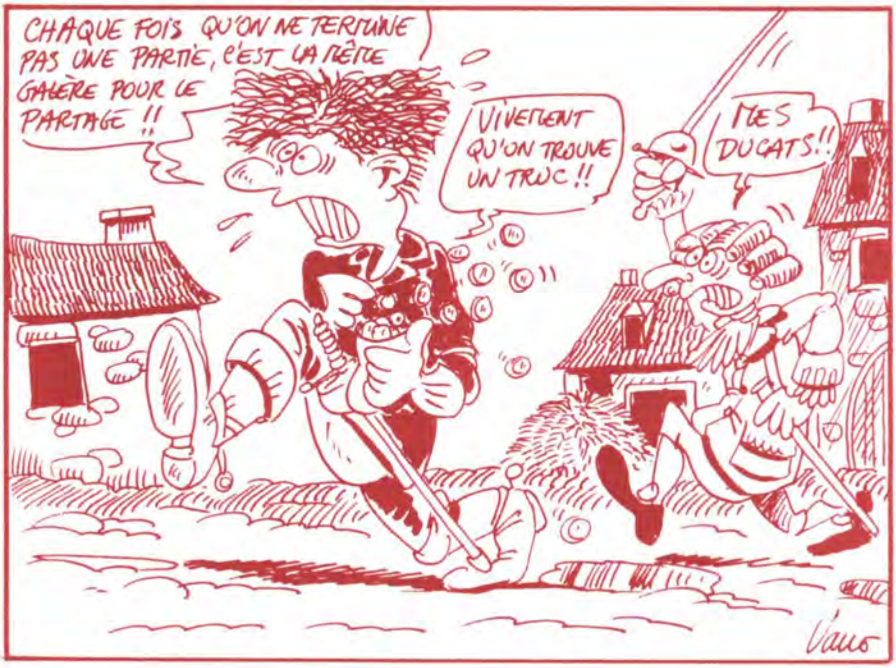
Pierre-Simon Laplace est né à Beaumont en Auge en 1749 et mort à Paris en 1827.
Il sut traverser l'époque troublée dans laquelle il a vécu sans perdre la tête.

Marie-Jean-Antoine-Nicolas de Caritat, Marquis de **Condorcet** est né à Ribemont en 1743 et mort à Bourg la Reine en 1794 dans des circonstances douteuses. Condorcet est connu pour son paradoxe portant sur les règles de choix collectifs. Il montre en fait qu'un système électoral parfaitement démocratique est impossible. Pour en donner un exemple simplifié, dans un restaurant, il est tout à fait possible qu'en moyenne, les clients préfèrent les pommes aux abricots, les abricots aux cerises et les cerises aux pommes. Il n'y a pas transitivité des préférences.

de la probabilité d'un événement. C'est le mathématicien français Laplace qui la donnera près d'un siècle plus tard, en 1795 : « La probabilité est une fraction, dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre des cas également possibles ». Il précisait qu'il fallait comprendre « cas également possibles » par « cas tels que nous soyons également indécis sur leur existence ».

À qui doit-on, en définitive, attribuer la paternité des probabilités ? Laplace l'attribue à Pascal, pour sa résolution du problème du partage. Sans doute est-ce un peu excessif, Pascal n'ayant pas véritablement créé une théorie. Huygens se l'attribue à lui-même, avec sans doute un peu d'immodestie. Bernoulli est sans doute un bon candidat, bien que, mort trop tôt, il n'ait pas émis de revendication, à l'inverse de Huygens. En fait, on peut sans doute partager la paternité entre ces trois mathématiciens, sans oublier complètement Laplace.

D. T.



Fibonacci et le nombre d'or

Le nombre d'or est noté Φ en hommage à Phidias qu s'en inspira pour ses travaux au Parthénon. Il s'agit de la racine positive de l'équation : $\boldsymbol{x^2 = x + 1}$.
Cette équation a un lien avec la règle de construction de la suite de Fibonacci définie par :

$\boldsymbol{u_0 = u_1 = 1}$ et $\boldsymbol{u_{n+2} = u_{n+1} + u_n}$ pour $n \geqslant 0$.

Nombre d'or

Calculer le nombre d'or.
Montrer que la suite de ses puissances vérifient la relation $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.
Montrer qu'il en est de même pour l'opposé de son inverse.

Suite de Fibonacci

Déterminer les deux réels a et b tels que :
$u_0 = a + b$ et $u_1 = a\Phi + b\left(-\dfrac{1}{\Phi}\right)$.

En utilisant un raisonnement par récurrence, en déduire que

$$u_n = a\,\Phi^n + b\left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n.$$

En déduire la limite du rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Défi à la cour

Dans la préface de son *Livre des carrés* (*Liber quadratorum*), Léonard de Pise narre sa rencontre avec l'empereur Frédéric II de Sicile en 1225. Jean de Palerme, mathématicien attaché à la cour de l'empereur, profita de l'occasion pour lancer un défi, (pratique courante en ces temps-là) au « sérieux et savant Maître Leonardo Bigollo » sous la forme de trois problèmes dont voici les énoncés :

1. Trouver un nombre rationnel tel que si on ajoute ou retranche 5 à son carré on obtienne aussi un carré.

2. **Résoudre** l'équation cubique :
$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.

3. Trois hommes ont mis en commun une certaine somme d'argent ; leurs parts respectives étant de 1/2, 1/3 et 1/6. Chaque homme retire chacun à son tour une part de sorte qu'à la fin il ne reste plus rien de la somme initiale. Le premier homme remet au pot commun la moitié de ce qu'il a emprunté, le deuxième un tiers et le troisième un sixième. Lorsque finalement les trois hommes se partagent équitablement le nouveau pot commun, il se trouve que chacun est en possession de son bien initial.
Quel était le montant du premier pot commun ?

Fibonacci releva le défi. Il proposa la solution 41/12 pour le premier problème, 1,3688081075 pour le deuxième (comment ?). Le dernier problème amène, après quelques calculs l'équation $7S = 47x$ où S est la somme initiale et x le montant de la somme perçue par chacun après le partage équitable. La plus simple des solutions choisie par Fibonacci est $S = 47$, $x = 7$ qui fournit les montants 33, 13 et 1 pour le premier partage.

par Benoît Rittaud

Fermat ou
l'avénement de l'arithmétique

Le XVII^e siècle voit l'avénement de l'arithmétique avec notamment Pierre de Fermat, qui restera célèbre non seulement grâce aux problèmes qu'il a résolu mais aussi à cause de celui, démontré récemment, qui porte son nom.

Pierre de Fermat, est né en 1601 à Beaumont-de-Lomagne (à 30 kilomètres de Carcassonne) et mort à Castres en 1665, il fut conseiller au parlement de Toulouse. Jamais il n'enseigna les mathématiques, jamais il n'appartint à une quelconque université. Il fut pourtant, au travers de correspondances avec Pascal ou Huygens, l'un des plus féconds esprits mathématiques de son temps. L'apport essentiel de Fermat tient en ce qu'il a séparé l'arithmétique de la géométrie.

Pour une part, le XVII^e siècle est l'époque où les mathématiques « s'amateurisent ». En effet, parmi les plus grands noms de cette période se trouvent ceux de personnes dont la spécialité ou les préoccupations principales étaient ailleurs. Pascal, entre autre fondateur des probabilités, est un philosophe et un janséniste très fervent ; Descartes, inventeur de la notation algébrique moderne, est davantage connu comme philosophe, et le fut également comme physicien (ses théories physiques, aujourd'hui tombées en désuétude, ont joui d'un grand prestige pendant un siècle) ; Leibniz (encore un philosophe) et Newton (physicien et astronome) fondèrent à peu près en même temps le calcul infinitésimal.

Pierre de Fermat

Mais le vrai amateur éclairé de ce XVII^e siècle mathématique est incontestablement Pierre de Fermat. L'apport essen-

Petit théorème de Fermat

Moins médiatique que le grand, le « petit théorème de Fermat » énonce que si p est un nombre premier et que a est un entier non multiple de p, alors le reste de la division de a^{p-1} par p est toujours égal à 1. En 1978, Rivest, Shamir et Adleman en ont tiré une méthode de cryptographie extrêmement performante, l'une des plus efficaces à l'heure actuelle et très souvent utilisée.
Elle est connue sous le nom de méthode RSA.

tiel de Fermat tient en ce qu'il a séparé l'arithmétique de la géométrie. Il s'en explique notamment en 1657, dans un texte où il lance un défi connu depuis sous le nom d'équation de Pell (du nom d'un mathématicien britannique du dix-septième siècle qui, en l'occurrence, n'a jamais rien eu à voir avec ce problème). Il s'agit de déterminer une règle générale pour savoir pour quels nombres entiers n il existe une infinité d'entiers p pour lesquels l'expression $np^2 + 1$ est un carré (c'est là la question originelle de Fermat, bien que par la suite Euler ait considéré $np^2 - 1$). C'est le dix-huitième siècle qui verra la résolution complète du problème posé par Fermat.

Dans son texte sur l'équation de Pell, et avant d'exposer la question, Fermat se plaint de ses prédécesseurs et de ses contemporains, qui se posaient trop rarement des problèmes de nature purement arithmétique. Le défi qu'il lance est ainsi pour lui l'occasion de montrer qu'il y avait aussi du travail à faire en dehors de la géométrie alors toute-puissante : « S'ils [les arithméticiens] réussissent à trouver une preuve ou une solution, ils conviendront que des questions de ce type ne sont pas inférieures aux plus célèbres questions de la géométrie pour la beauté, la difficulté ou la méthode de démonstration ».

L'arithmétique devient donc, au dix-septième siècle, une discipline indépendante, dont le domaine de recherche est, selon Fermat toujours, l'étude des nombres entiers. Contrairement à la tradition, ces nombres ne sont plus envisagés à partir de leur "traduction géométrique" : on les regarde pour eux-mêmes, et non pas comme des longueurs de segments (où l'addition correspondait à une concaténation de segments, la multiplication à un calcul d'aire, etc.).

L'arithmétisation des mathématiques pouvait commencer.

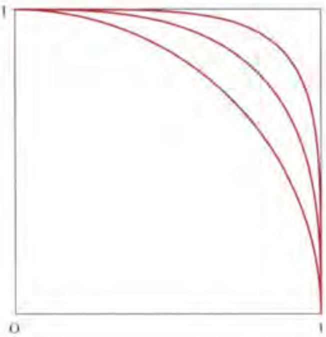
Grand théorème de Fermat

Le 23 juin 1993, le mathématicien Andrew Wiles, de Princeton, annonçait au cours d'un colloque à Cambridge qu'il était parvenu à démontrer une conjecture plus de trois fois centenaire, connue sous le nom de « *grand théorème de Fermat* » ; un nom jusque-là abusif pour ce qui n'était qu'une affirmation donnée par Fermat, sans la moindre ébauche de preuve.

La célébrité universelle du théorème de Fermat, supérieure à celle de la presque totalité des autres grandes conjectures séculaires (conjectures de Goldbach, de Riemann, etc.) s'explique

Ronald Rivest est professeur au Massachussets Institute of Technology (Cambridge, Etats Unis, pays ou le mot « enseignement technologique » n'est pas péjoratif). Il est l'un des inventeurs de la méthode de cryptographie à clef publique connue sous le nom de méthode RSA. Dans ce type de méthodes, la clef de codage ne donne pas de façon aisée celle de décodage ce qui permet de la rendre publique tout en conservant un code sûr.

Approche géométrique



On ne peut résumer en quelques lignes la démonstration de Wiles. Notons cependant que l'idée de celle-ci est géométrique.
Nous rapportons le plan à un repère orthonormal Oxy. dans ce plan, nous considérons le carré ***D*** des points dont les deux coordonnées sont comprises entre 0 et 1 et A l'ensemble des points de D dont les coordonnées sont rationnelles.
Un entier n étant donné, considérons la courbe C_n d'équation $x^n + y^n = 1$, où x et y sont compris entre 0 et 1.
La courbe C_2 rencontre A une multitude de fois. En revanche, si $n \geqslant 3$, les courbes C_n se faufilent entre les points de A.

H . L.

pour beaucoup par la manière dont Fermat lui-même l'a formulée. Au départ, la question elle-même ne semble pas très « médiatique » : il s'agit de savoir si oui ou non l'équation

$$x^n + y^n = z^n$$

possède des solutions entières en x, y et z, où n est un entier positif fixé (supérieur à 2).
En particulier, lorsque $n = 2$, on a affaire à l'équation $x^2 + y^2 = z^2$, qui est celle liant les côtés d'un triangle rectangle (théorème de Pythagore). Cette dernière équation possède une infinité de solutions en nombres entiers, comme $3^2 + 4^2 = 5^2$ (la plus connue), ou bien $5^2 + 12^2 = 13^2$.
On sait depuis l'Antiquité quels sont les triplets d'entiers (x, y, z) qui vérifient la relation $x^2 + y^2 = z^2$. En particulier, ils sont une infinité.

Andrew Wiles est né à Cambridge (Angleterre) en 1953.

En revanche, on n'avait jamais trouvé d'exemple de triplet d'entiers vérifiant $x^n + y^n = z^n$ pour $n > 2$. Fermat affirma ainsi qu'il n'en existait pas. En 1637, annotant la traduction d'un livre d'arithmétique écrit par Diophante d'Alexandrie, Fermat écrit qu'il dispose d'une démonstration "merveilleuse" de cette affirmation, mais que la marge sur laquelle il couche ses mots est trop petite pour qu'il puisse s'expliquer !
Fermat n'essaya pas de faire connaître cette preuve : c'est seulement en 1670 que son fils l'exhumera. Jusqu'à la fin du vingtième siècle, les plus grands mathématiciens se casseront les dents sur le problème, ne le résolvant que dans certains cas particuliers. Le mythe de la « preuve perdue » a ainsi porté au sommet de la gloire mathématique un résultat qui, en soi, n'a que peu d'intérêt.
Par la variété des méthodes imaginées et des outils mathématiques inventés pour la résoudre, la conjecture de Fermat a beaucoup contribué aux progrès des mathématiques, et d'autres questions issues de ces travaux attendent toujours d'être résolues.
Après l'annonce du 23 juin 1993, les mathématiciens ont d'abord dû déchanter : la démonstration de Wiles s'est révélée inachevée. Il a fallu encore deux ans pour colmater la brèche. Aujourd'hui, enfin, la preuve est faite.

B. R.

Solutions p.145

Problèmes historiques

Calculs à la Viète

Après Viète, la résolution des équations se dégagent complètement des méthodes géométriques. Il invente les principales méthodes de résolution des équations encore en usage de nos jours.

Élimination

Résoudre le système d'équations (*) :

$$xy + x^2 + y^2 = 124$$
$$x + y = 12$$

après avoir évalué l'une des inconnues en fonction de l'autre (dns un tel cas, on dit qu'on l'a éliminée).

Changement de variables

Résoudre le système d'équations (**) :

$$xy = 20$$
$$x^2 + y^2 = 104$$

après avoir éliminé y, on fera le changement de variable $X = x^2$.

Transformation d'équations

Résoudre le système d'équations (***) :

$$x^2 + y^2 = 20$$
$$\frac{xy}{(x-y)^2} = 2$$

après l'avoir ramené à un système de la même forme que (**).

À la manière de Fermat

Il a fallu plusieurs siècles pour venir à bout de l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$. Pourtant certaines équations de la même famille ne sont pas difficiles à résoudre.
Ainsi :
Montrer que l'équation $a^3 + b^3 = 9c + 4$ n'a pas de solution pour a, b et c entiers.

À la manière de Goldbach

De même, tout résultat dans le style de Goldbach ne reste pas une conjecture.
Montrer que tout nombre premier impair est, de manière unique, la différence de deux carrés.

À la manière de Mersenne

Montrer que si $n = pq$ alors le nombre $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$. En déduire que le nombre de Mersenne $M_n = 2^n - 1$ n'est jamais premier si n n'est pas premier.
M_{19}, M_{23}, M_{43}, M_{61} et M_{127} sont-ils premiers ?

par Benoît Richard

Les nombres premiers

L'étude des nombres premiers est-elle gratuite ? Sans doute pour la plupart des amoureux de la théorie des nombres. Pourtant, certains résultats les concernant sont classés « confidentiel défense ». Pourquoi ?

La méthode de Lucas-Lehmer est utilisée pour vérifier la fiabilité des super-ordinateurs et pour essayer de trouver d'autres nombres de Mersenne premiers.

Parmi tous les entiers naturels, les nombres premiers se définissent par une caractéristique élémentaire. Ce sont ceux qui n'admettent que deux diviseurs : 1 et eux même. Ainsi 2, 3, 5, 7 sont des nombres premiers mais pas 4 (qui a pour diviseurs 1, 2 et 4) ni 6 (qui a pour diviseurs (1, 2, 3 et 6)). Avec les nombres premiers on peut reconstituer tout nombre entier par multiplication et cela de manière unique, par exemple $2000 = 2^4 \times 5^3$ ou $851 = 37 \times 23$.

Ces petits objets mathématiques ont fasciné les mathématiciens et les plus grands d'entre eux ont découvert certaines de leurs propriétés ou ont émis des questions non encore résolues à ce jour. Plus encore, leur étude fait apparaître des liens étroits avec d'autres branches des mathématiques et a des conséquences encore fondamentales de nos jours par exemple en cryptographie, puisque les techniques modernes de codage de l'information, de sécurisation des cartes bancaires ou des transactions sur Internet utilisent énormément les nombres premiers.

Une infinité de nombres premiers

Il existe une infinité de nombres premiers et en dehors de 2 et 3, ils sont tous de la forme $6a \pm 1$ $(a = 1, 2, \ldots)$.
Ce résultat date de l'antiquité. Euclide montre d'abord que tout entier naturel n autre que 0 et 1 admet au moins un diviseur premier. Pour cela, il considère le plus petit diviseur strictement supérieur à 1 de n soit d. Tout diviseur strictement supérieur à 1 de d est diviseur de n donc est supérieur à d. Par conséquent, il est égal à d. Ce nombre d est donc premier. Ainsi, tout entier naturel possède un diviseur premier.

Pour montrer l'existence d'une infinité de nombres premiers, il suppose au contraire qu'il y en a un nombre fini et considère leur produit P et N = P + 1. Ce dernier nombre N possède un diviseur premier qui est donc l'un des termes du produit P. Ce diviseur divise donc P, N et 1 = N − P ce qui est absurde. Par conséquent, l'hypothèse l'est aussi. Il existe une infinité de nombres premiers.

Un bon moyen d'accélérer la recherche de la liste des nombres premiers sur une calculatrice est de noter qu'ils sont tous de la forme $6a \pm 1$ à l'exception de 2 et 3. Pour être encore plus efficace, on peut remarquer que si un nombre n'est pas premier, il aura forcément un diviseur d premier avec $1 < d < \sqrt{n}$ ce qui permet de limiter l'étude des diviseurs éventuels d'un nombre donné.

La preuve par Euclide que tous les nombres premiers sont de la forme $6a \pm 1$ repose sur la notion de division euclidienne.

Il effectue la division d'un entier n par 6, il n'y a alors que 6 cas possibles : $n = 6q$, $n = 6q + 1$, $n = 6q + 2$, $n = 6q + 3$, $n = 6q + 4$ ou $n = 6q + 5$.

Il montre alors que dans les cas $n = 6q$, $n = 6q + 2$, $n = 6q + 3$ et $n = 6q + 4$, le nombre n est divisible par 2 ou 3. Si n est premier, il est donc de l'une des autres formes. Le cas $n = 6q + 5$ s'écrit également $n = 6(q + 1) - 1$ si bien que si n est premier, il est de la forme $n = 6a \pm 1$ (ou a est égal à q ou à $q + 1$).

La répartition par Gauss

En 1795, Gauss conjectura que le nombre de nombres premiers inférieurs à n, noté $p(n)$, est approximativement égal à

$$\frac{n}{\ln(n)} \text{ quand } n \text{ est très grand.}$$

Pour cela, il calcula pour des valeurs de n croissantes, les valeurs de $\pi(n)$ et du quotient de n et de $\ln n$. En voici des exemples ou le deuxième nombre a été arrondi à l'entier le plus proche :

Pour 10^3, on trouve 168 et 145,
pour 10^6, 78 498 et 72 382,
pour 10^9, 50 847 534 et 48 254 942,
pour 10^{12}, 37 607 912 018
et 36 191 206 825.

La proximité de ces deux nombres peut ne pas sembler évidente. Cette idée change si l'on considère leur rapport qui est de 1,16 pour 10^3, de 1,08 pour 10^6, de 1,05 pour 10^9 et de 1,04 pour 10^{12}. Ce rapport se rapproche de

Carl Gauss est né à Brunswick en 1777 et mort à Göttingen en 1855. Génie précoce, il excella dans tous les domaines qu'il a abordé : astronomie avec le calcul de la trajectoire de l'astéroïde Céres, algèbre avec le théorème fondamental, géométrie avec en particulier l'étude systématique des courbes et des surfaces au voisinage d'un point et théorie des nombres.

Marin **Mersenne** est né à Oize en 1588 et mort à Paris en 1648. Abbé, philosophe et physicien, il se passionna pour toutes les sciences de son époque et correspondit avec les plus grandes philosophes et chercheurs comme Huygens, Pascal, Fermat et Descartes.

1. C'est troublant mais est-ce encore vrai pour des entiers encore plus grands ?

Plusieurs mathématiciens vont alors s'attaquer à cette conjecture. Riemann (1826-1866) un des rares élèves de Gauss, et lui aussi génial par l'ampleur de ses idées et de ses découvertes, va essayer de la démontrer sans y parvenir totalement (mais en créant pour cela une célèbre fonction dite fonction *dzéta* de Riemann dont l'étude des propriétés est encore d'actualité) et ce sont deux autres mathématiciens Hadamard (1865-1963) et De la Vallée Poussin (1866-1962) qui en 1896 et de façon indépendante vont réussir à prouver cette conjecture.

Pierre de Fermat

Un article entier de ce numéro est consacré à Pierrre de Fermat qui le mérite bien. Outre les deux théorèmes portant son nom, Fermat a trouvé, et parfois démontré, plusieurs propriétés concernant les nombres premiers. Entre autres, il a énoncé que tout nombre premier de la forme $4n + 1$ est la somme de deux carrés. Ce résultat a été démontré par Euler en 1754 seulement.

Fermat a aussi étudié les entiers de la forme $2^{2^n} + 1$ appelés nombres de Fermat et notés F_n. Il remarqua que ces entiers sont premiers pour $n = 0, 1, 2, 3$ et 4 et affirma qu'ils étaient toujours premiers. Mais Euler prouva que :

$F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$
puis en 1880, Landry, montra que :
$F_6 = 274\,177 \times 67\,280\,421\,310\,721$.
Depuis, on a montré que F_n n'est pas premier pour $7 \leqslant n \leqslant 16$ et $n = 18, 19, 21, 23, 36, 38, 39, 55, 63, 73$.

Les nombres de Mersenne

Mersenne étudia les nombres entiers de la forme $M_n = 2^n - 1$ qui portent son nom. Il crut par exemple que M_{61} n'était pas premier, ce qui est faux (sa primalité a été démontrée par le mathématicien Lucas en 1886). La difficulté de l'étude de ces nombres sur ordinateur vient de ce qu'il sont très grands (M_{61} est de l'ordre de $2{,}3 \times 10^{18}$). On ne connaît aujourd'hui encore que moins de 40 nombres de Mersenne premiers. Parmi les derniers trouvés : $M_{1\,398\,269}$ par un français Joël Armangeaud en 1996 et $M_{2\,976\,221}$ aux USA en 1997.

La question est ardue, cependant on peut montrer facilement que si un nombre de Mersenne M_n est premier alors n est premier.

Test de Lucas

Lucas découvrit une méthode pour vérifier si un nombre de Mersenne est premier. Cette méthode, nommée test de Lucas, améliorée en 1930, par un mathématicien américain Lehmer, est facilement programmable sur ordinateur. Elle est encore utilisée pour vérifier la fiabilité des Super-ordinateurs et pour essayer de trouver d'autres nombres de Mersenne premiers.
Lucas considère la suite (r_n) d'entiers naturels définie par la condition initiale $r_1 = 3$ et la relation $r_{n+1} = r_n^2 - 3$. Le nombre de Mersenne M_p avec p de la forme $p = 4k + 3$ est premier si et seulement si M_p divise r_{p-1}.

La conjecture de Goldbach

En 1742, Goldbach affirme, sans le démontrer, que tout entier pair est la somme de deux nombres premiers.
Ainsi, $12 = 7 + 5$, $14 = 7 + 7$, $70 = 37 + 23$.
À l'heure actuelle, ce résultat n'a été ni prouvé ni réfuté.

Dans le même ordre d'idée, après les sommes de deux nombres premiers de Goldbach, intéressons-nous à l'écart entre deux nombres premiers consécutifs. Existe t'il des écarts aussi grands que l'on veut ?

Si un écart est fixé d'avance, par exemple 2, combien y a-t-il de nombres premiers consécutifs qui diffèrent de deux ((3, 5), (11, 13), etc.) ? On appelle nombres premiers jumeaux de tels couples de nombres premiers s'écartant de deux. En 1999, le plus grand couple de nombres premiers jumeaux était dû à un ingénieur français passionné de nombres premiers, Henri Lifchitz. Il s'agit de $361\,700\,055 \times 2^{39\,020} \pm 1$.

Cryptographie

Du fait des calculs énormes qu'ils impliquent, les nombres premiers servent parfois à tester la fiabilité des ordinateurs. Pour des raisons similaires, ils deviennent de plus en plus indispensables dans toutes les transactions électroniques modernes, que ce soit pour les cartes de crédit, l'achat via l'internet ou la cryptographie.

L'idée principale de l'utilisation des nombres premiers en cryptographie est simple. Autant, il est facile de trouver

Edouard Lucas est né à Amiens en 1842 et mort à Paris en 1891. Professeur de Mathématiques Spéciales au lycée Charlemagne à Paris, il se passionna pour la résolution de problèmes mathématiques récréatifs (tour de Hanoi, nombre de Fibonacci, etc.).

En 1994, Thomas Nicely, professeur de mathématiques à Lynchburg (Etats Unis), lança sur son nouveau PC avec un microprocesseur pentium une série de calculs concernant les nombres premiers jumeaux. Comme il effectuait ses calculs par tranches à cause du coût des mémoires informatiques, il avait mis en place des contrôles rigoureux et nombreux. Hélas, il découvrit une anomalie au cours de son travail. Il reprit son programme, chercha ses erreurs puis s'aperçut, à sa grande surprise que l'erreur venait du microprocesseur pentium d'Intel qui évaluait faussement l'inverse des nombres premiers jumeaux 824 633 702 841 et 824 633 702 443. Intel dut reconnaître (mais pas facilement !) son erreur et la corrigea dans ses productions suivantes.

deux nombres premiers assez grands p et q (de l'ordre d'une centaine de chiffres chacun) et de les multiplier rapidement pour former un très grand entier $N = pq$, autant il est très difficile et long de partir de N et de retrouver p et q. C'est sur ce principe que fonctionne le système dit RSA (nom formé à partir des initiales de ses inventeurs (Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman chercheurs au MIT en 1978).

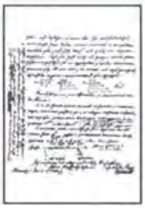
Pour communiquer en toute sécurité avec Bénédicte, Arnaud choisit deux grands nombres premiers p et q (qu'il garde secret) et un troisième entier e qui n'a aucun diviseur commun avec $(p-1)(q-1)$ (par exemple pour e un nombre premier ne divisant ni $p-1$ ni $q-1$. Arnaud calcule alors $n = pq$, ce qui est facile, et détermine un entier d tel que n divise $ed-1$ (ce qui se fait aussi facilement à l'aide de la division euclidienne). Arnaud rend public n et e (on appelle ces entiers la clef publique) et garde secret p, q et d (clef secrète).

Bénédicte veut communiquer une information secrète à Arnaud. Elle commence par transformer son message en un nombre entier A inférieur à n (ou en plusieurs nombres si nécessaire en coupant son message en plusieurs bouts). Puis Bénédicte calcule le reste B de la division euclidienne de A^e par n et envoie B à Arnaud sans précautions supplémentaires. On démontre que A est égal alors au reste de la division euclidienne de B^d par n. Et cela seul Arnaud sait le faire car il est le seul à connaître d (on ne peut connaître d que si on connaît p et q).

Au fur et à mesure que les ordinateurs deviennent de plus en plus rapides et que les méthodes de factorisation s'affinent, on devient capable de décomposer des nombres n de l'ordre de 160 chiffres mais pas encore par exemple un produit de deux nombres premiers de 150 chiffres chacun… jusqu'à quand ?

B. R.

Après des études brillantes en médecine et mathématiques, **Goldbach** (1690-1764) voyage en Europe puis s'installe en Russie ou il devient précepteur du tsar Pierre II. C'est aussi le correspondant favori d'Euler. C'est dans la lettre ci-dessous qu'il lui fait part de sa conjecture.



Solutions p.144

Problèmes historiques

Une modélisation

Pour modéliser la table de mortalité construite sur les registres de Londres, Johann-Heinrich Lambert (1728-1777) proposa la formule suivante : pour $0 \leqslant n \leqslant 96$,

$$S_n = 10\,000\left(1 - \frac{n}{96}\right)^2 - 6\,176\,[(0{,}92952)^n - (0{,}66277)^n].$$

Tabuler S_n, puis M_n et E_n. Pour quelles valeur de n, E_n est-elle la plus grande ?
Emmanuel Duvillard (1755-1832) proposa en 1806 de généraliser la formule de Lambert en :

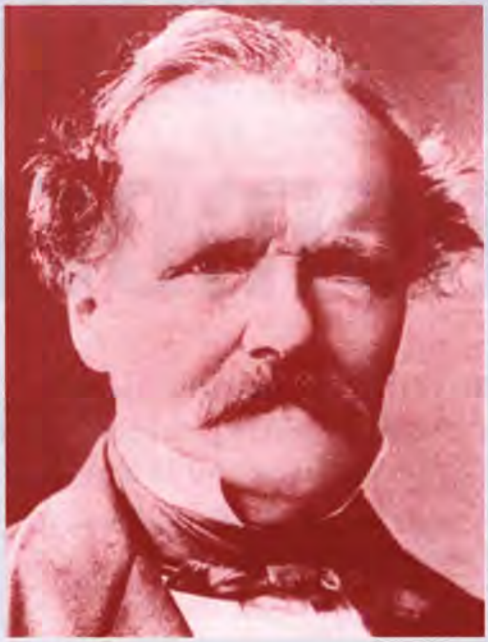
$$S_n = a\left(1 - \frac{n}{a}\right)^2 - c(d^n - e^n).$$

Chercher les valeurs de a, b, c, d et e qui conviennent pour la table de la page 100.

Rentes romaines

Les bas-fonds de Londres d'après une gravure début du XIX^e siècle. (J. Vigne, Bibli. Mun. Versailles.)

Lacroix cite une table donnée par Domitius Ulpianus, jurisconsulte romain mort à Rome en 220, dans un recueil juridique en vue de régler le montant d'une rente à vie. Cette table donne pour un âge n compris entre 39 et 50 ans une espérance de vie de $59 - n$. En déduire les valeurs de M_n (nombre d'individus morts à l'âge n, **Cette table est-elle réaliste ?**



Ersnt Kummer

Si on en croît Daniel George (*An Eclectic ABC*, Barrie and Rockliff, 1964, p. 126-7), Ernst Kummer, le mathématicien allemand créateur des nombres idéaux, n'était pas un calculateur idéal. En cours, il demandait souvent à ses étudiants de lui prêter main forte. Une fois, amené à calculer 7×9, il commença : « 7×9 est égal à euh, oui…, 7×9… »
— 61, suggéra un étudiant.
Kummer écrivit 61 au tableau.
— Monsieur, fit un autre étudiant, il ne peut s'agir que de 63.
Agacé, Kummer ajouta : « Voyons, jeunes gens, ça ne peut être les deux, décidez-vous. C'est l'un ou c'est l'autre. »
Plus sérieusement, Kummer démontra le grand théorème de Fermat pour tous les exposants qui sont des nombres premiers réguliers.

Le fabuleux nombre π

De la Bible aux dernières découvertes du calcul de la n-ième décimale sans calcul des autres, en passant par les mathématiques grecques ou encore le calcul infinitésimal, le nombre π est présent dans bien des résultats majeurs des Mathématiques.

La première définition de π est de nature géométrique : Archimède (287-212 av. J.-C.) observa que dans tout cercle, la proportion de la circonférence C au diamètre et la proportion de la superficie S au carré du rayon sont égales à une même constante. Ces remarques se résument par les formules bien connues de tous :

$$C = 2\pi r \text{ et } S = \pi r^2$$

En revanche, la lettre π, qui provient très certainement du mot grec *periferia*, qui signifie circonférence (pensez au périphérique de Paris), ne fût introduite que bien plus tard, vers 1737, par Euler. Pour les architectes du roi Salomon, le nombre π valait 3.

There's a beauty to π that keeps us looking at it. The digits of π are extremely random. They really have no pattern, and in mathematics that's really the same as saying they have every pattern.
Peter Bornwein, 1996

Les Babyloniens utilisaient $3\frac{1}{8}$ qui vaut 3,125.

Une première approximation peut être trouvée dans le livre de l'égyptien Ahmes (1900 av. J.-C.) où « un cercle de diamètre 9 possède la même surface qu'un carré de coté 8 », ce qui donne $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ soit environ 3,16.

Dans le traité indien de la *Règle des cordes*, (500 av. J.-C.), on trouve la valeur de 3,088. Et on dit même que Platon donnait comme approximation $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ce qui fait environ 3,14626 !

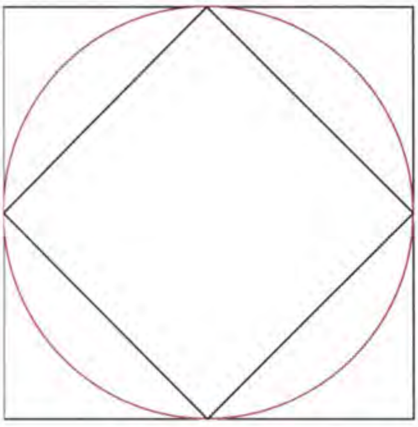
L'approche géométrique

La première approximation plus précise de notre nombre fut donc l'œuvre d'Archimède : en comparant la circonférence du cercle avec le périmètre de deux polygones réguliers à n côtés circonscrits et inscrits, il obtint pour $n = 96$, $3\,\frac{10}{17} < \pi < 3\,\frac{1}{7}$.

Au cours du IIIe siècle ap. J.-C., l'astronome chinois Liu Hui calcula un encadrement à l'aide de deux polygones à 192 côtés, et trouva comme valeur approximative 3,14159.

Les astronomes indiens ou arabes ne furent pas en reste : ainsi Al Kasi calcula la circonférence d'un cercle de rayon 1 à l'aide d'un polygone à 3×2^{28} côtés.

En Europe, Léonard de Pise, dit Fibonnacci, calcula au XIe siècle π à l'aide d'un polygone régulier à 96 côtés et au XVe siècle, Ludolph Van Ceulen donna les 35 premières décimales correctes de notre nombre, en utilisant un polygone régulier à 2^{60} côtés.



Si le cercle ci-dessus a pour rayon 1, son aire est égale à π et celles des carrés inscrits et circonscrits 2 et 4. Approximativement, cela donne la valeur biblique de 3.

L'approche analytique

La première formule non géométrique fût trouvée par Viète en 1579, à l'aide d'un produit infini :

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Un siècle plus tard, Wallis proposa sa célèbre formule :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^2 4^2 \ldots (2n)^2}{3^2 5^2 \ldots (2n-1)^2} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

et en 1671, Grégory donna la série classique :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

Pourtant, toutes ces formules restent inadaptées au calcul des décimales de π à cause de la lenteur de leur convergence. Enfin, donnons la formule restée la plus utilisée pendant des siècles pour calculer les décimales de π, due à l'anglais John Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Mais qui est π exactement ?

Le mathématicien est friand de définitions exactes et précises. Or, jusqu'à présent, nous n'avons vu qu'une définition géométrique fondée sur les notions intuitives de longueurs et d'aires puis diverses approximations analytiques de ce nombre.

John Wallis est né à Ashford en 1616 et mort à Oxford en 1703. Wallis fut un précurseur du calcul infinitésimal. Il s'agit sans doute du mathématicien anglais le plus important avant Newton.

Tout un poème

Pour ceux qui souhaitent connaître les 31 premières décimales, il leur suffira de réciter le quatrain suivant :

***Q**ue j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages*

***I**mmortel Archimède, artiste ingénieur*

***Q**ui de ton jugement peut priser la valeur*

***P**our moi ton problème eut de pareils avantages*

Si l'on souhaite exprimer sous forme analytique une définition géométrique de π, on doit utiliser des intégrales.
Par exemple, une équation du cercle unité étant donnée par $x^2 + y^2 = 1$, une équation du demi-cercle supérieur sera

$$y = \sqrt{1 - x^2} \text{ où } x \in [-1, 1].$$

Sa longueur est obtenue par la formule :

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \pi.$$

Mais cette définition n'est pas pédagogiquement pratique car, lors d'un cours d'analyse, on traite généralement l'étude des fonctions avant le calcul intégral.

Pourquoi le nombre π s'appelle-t-il ainsi ?

L'utilisation de la lettre grecque π pour le rapport de la circonférence au diamètre a été popularisée par Léonard Euler dans un ouvrage sur les séries publié en latin en 1737. Elle est due au départ à un mathématicien anglais, William Jones, qui l'a utilisée dans un livre paru en 1706. Cependant, en 1647, le mathématicien anglais William Oughtred avait déjà utilisé π pour désigner le périmètre d'un cercle (et non son rapport au diamètre). La lettre π est à la fois l'initiale de *perifereia* et de *perimetros* qui en grec désignent la circonférence d'un disque.

Aussi, définit-on habituellement $\frac{\pi}{2}$ comme le plus petit zéro positif de la fonction cosinus (Baltzer, 1875).
Notons enfin que π intervient de manière primordiale dans la définition de la fonction exponentielle et dans l'étude des nombres complexes ($e^{i\pi} = -1$), que π est un nombre irrationnel et transcendant (c'est-à-dire qu'il n'est solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers, Lindemann, 1882).

La période moderne

Le dernier calcul approché de π "à la main" fût effectué par Schanks en 1873 qui en détermina 707 décimales (il fût montré plus tard que seules les 527 premières étaient exactes)… L'arrivée des ordinateurs dans les années 1950 permit de changer d'univers. Jusqu'en 1975, on continua à utiliser les formules de Machin ou Grégory, malgré la lenteur de leur convergence : Von Neumann calcula 2037 décimales sur le premier ordinateur construit, l'ENIAC. En 1974, deux français Guilloud et Boyer, calculèrent un million de décimales en utilisant une variante de la formule de Machin.
Mais, en 1976, un premier algorithme de type nouveau et extrêmement rapide fût trouvé par Brent et Salamin. En 20 ans, les progrès furent spectaculaires : en 1983, le japonais Kanada obtient $1{,}6\ 10^7$ décimales ; en 1986, Bailey en obtient $2{,}9\ 10^7$; en 1992, les frères Chudnovski calculent $2\ 10^9$ décimales, et en 1995 Kanada et Takamashi $4{,}2\ 10^9$ décimales.

Une nouvelle ère

En 1995, Bailey, Borwein et Plouffe annoncèrent une nouvelle formule révolutionnaire de calcul de π qui permit de calculer directement la n-ième décimale (en base 16) sans calculer les précédentes. Plus étonnant encore, cette formule fût trouvée directement par l'ordinateur et vérifiée ensuite par les trois mathématiciens, ce qui amène d'ailleurs à se poser la question de la validité de futures formules trouvées par ordinateur et qui seront de plus en plus difficilement accessibles à la démonstration humaine (voir l'article sur le calcul formel). En 1999, le jeune mathématicien français Fabrice Bellard a proposé une formule du même type, mais permettant le calcul direct de la n-ième décimale de π en base 10.

π pour quoi faire ?

Mais, à quoi peut bien servir le calcul des décimales de π ? Pourquoi en connaître toujours plus ? On peut trouver quelques éléments de réponse : les programmes d'approximation de π sont d'excellents tests de puissance et de fiabilité des ordinateurs. Ils fournissent également des exemples d'application pour la théorie de la complexité ; les derniers algorithmes trouvés qui utilisent de puissants outils mathématiques (théorie des fonctions elliptiques) permettent de faire avancer la recherche… Mais plus qu'aucune raison rationnelle, la réponse se trouve presque sûrement dans la magie de ce nombre.

H. L.

Quelques formules formidables

En 1910, Srinivasa Ramanujan découvrit la formule suivante :

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4\, 396^{4n}} \right)^{-1}.$$

Il n'en donna aucune démonstration (il était coutumier du fait !). Il fallut attendre 1985 pour que Jonathan et Peter Bornwein en donnent une preuve complète dans le cadre de la théorie des fonctions modulaires.
À chaque itération, cette formidable formule permet de gagner 8 décimales exactes !
Ainsi, avec les quatre premiers termes de cette série, on obtient :

$$\pi \approx \frac{5092995778815296116629307574030815237690 55}{4617403132294880032149517612272718970 88}$$

$$\approx 3{,}1459265358979323846264338327950288 4198,$$

soit 38 chiffres exacts après la virgule.
Les 12 premiers termes donnent les cent premières décimales de π :
3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117068.

En 1994, les frères Gregory et David Chudnovsky surpassèrent Rananujan en proposant la formule

$$\pi = \left(12 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (6n!)(13\,591\,409 + 545\,140\,134n)}{(3n!)(n!)^3 (640\,320)^{3n+3/2}} \right)^{-1}$$

qui fournit 14 nouvelles décimales exactes à chaque itération.

Mille milliards de décimales

Près de six cent heures de calcul sur un ordinateur Hitachi SR 8 000 MP doté d'un téra-octet de capacité de stockage ont permis à l'équipe japonaise du professeur Kanada de calculer 1 241 100 000 000 décimales de π. Les formules employées sont du type de celle de John Machin (voir le paragraphe sur l'approche analytique) :

$$\pi = 48 \text{ Arctan } \frac{1}{49} + 128 \text{ Arctan } \frac{1}{57} - 20 \text{ Arctan } \frac{1}{239} + 48 \text{ Arctan } \frac{1}{110\,443}$$

$$\pi = 176 \text{ Arctan } \frac{1}{57} + 28 \text{ Arctan } \frac{1}{239} - 48 \text{ Arctan } \frac{1}{682} + 96 \text{ Arctan } \frac{1}{12\,943}$$

On peut se demander pourquoi Kanada a utilisé deux formules alors qu'une seule suffit. La réponse est simple : il voulait calculer les décimales de π de deux manières indépendantes afin de vérifier ses calculs. Ce retour à ces formules relativement simples après l'utilisation antérieure d'algorithmes plus complexes dus à Brent-Salamin, aux Borwein ou à Ramanujan peut surprendre. Il semble que malgré les améliorations algorithmiques, la complexité des formules dépasse les capacités des ordinateurs. En effet, l'utilisation de racines carrées, de multiplications et de divisions nécessite d'utiliser la transformée de Fourier rapide à grande échelle ce qui demande énormément de mémoire. Kanada est donc revenu à des méthodes nécessitant certes plus d'opérations arithmétiques mais sans utilisation de la transformée de Fourier. Contrairement à ce que pourrait faire penser la pratique des dernières décennies, la mémoire n'est pas un paramètre négligeable. De telles difficultés apparaissent même au niveau des plus gros ordinateurs de la planète et leurs communications réseau et mémoire saturent plus vite que la théorie ne le prévoyait. Kanada estime que son implémentation est environ deux fois plus rapide que la précédente qui utilisait l'algorithme de Brent-Salamin et celui des Borwein.
Voici les cinq cent dernières décimales trouvées par Kanada c'est-à-dire celles situées entre la 1 241 099 999 501^{e} et la 1 241 100 000 000^{e} :

371 678 716 965 676 921 252 797 286 901 850
355 753 765 301 934 993 533 850 167 161 646 999 059 844 544 217 623
131 551 548 343 656 278 068 005 570 748 706 663 510 865 932 765 794
614 967 987 525 534 768 906 827 770 376 716 327 753 867 760 177 647
190 092 793 825 976 527 339 324 694 890 475 928 727 024 854 618 972
965 354 754 708 245 040 168 402 350 653 293 625 420 539 245 029 593
263 809 170 954 831 027 979 879 659 594 708 455 199 922 443 555 200
250 545 858 830 997 016 164 960 740 241 752 966 909 075 622 217 705
178 560 045 007 074 551 981 744 551 596 631 382 012 448 250 460 542311 034
186 559 119 891 822 627 045 282 696 896 699 285 670 648 734 103 110 45.

A quoi cela peut-il bien servir ? A part à tester la puissance des ordinateurs et des algorithmes, on peut également invoquer l'étude de la distribution des décimales de p qui ressemble à une suite aléatoire.

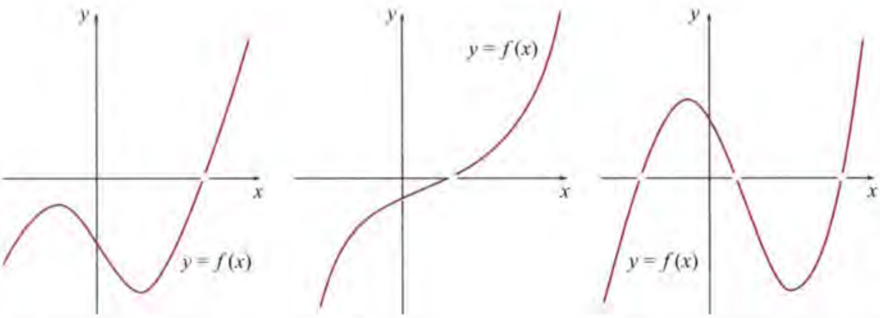
Hervé Lehning

Équations algébriques

À la naissance du millénaire, les Arabes savaient déjà résoudre, quand c'était possible, les équations du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Au XIIIe siècle, Fibonacci, imprégné de leur culture, allait « moderniser » leur approche. Le but du jeu était de trouver tous les réels x – les racines – qui vérifient cette équation, où a, b et c sont des « coefficients » réels ($a \neq 0$). Et même si on ne parlait pas à l'époque de discriminant, la technique était à peu près maîtrisée.

L'imbroglio italien

Les mathématiciens de la Renaissance se sont donc naturellement intéressés à la résolution des équations algébriques de degré supérieur. Leur rivalité à ce sujet allait donner lieu à des psychodrames dignes des meilleures parodies, qui sont relatés par Denis Guedj dans le numéro exceptionnel de *Tangente* (n° 74) consacré aux jeux mathématiques. L'équation du troisième degré la plus générale est de la forme : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.



En étudiant les variations et le graphe de la fonction f, définie par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, on constate que selon la valeur des coefficients, l'équation admet une ou trois racines réelles (parmi lesquelles, éventuellement, deux racines égales, voire trois, dans le cas où le graphe de f est tangent à l'axe des x). La question qui les obsède : **Peut-on exprimer, à l'aide de « radicaux » (racines carrées, cubiques, etc.) et d'opérations élémentaires les solutions de cette équation ?**

La réponse est « oui ». Oui pour le troisième degré, oui pour le quatrième. Embarrassés par la contrainte qu'ils avaient de ne travailler qu'avec des nombres rationnels, les mathématiciens de l'antiquité n'ont que peu fait progresser ce problème.

Il a fallu attendre l'école italienne du XVIe siècle pour en obtenir une résolution complète. Les premiers travaux sont dûs à Scipione del Ferro, un professeur de Bologne, qui résolut l'équation du troisième degré dans un cas particulier. Mais, au lieu de publier ses travaux, il se contenta d'en parler à son gendre qui se confia à un ami, Del Fiore, qui profita de son secret pour lancer des défis à tous les mathématiciens qu'il connaissait. L'un d'entre eux, Tartaglia, eut raison du vaniteux Del Fiore. C'est qu'il avait avancé beaucoup plus loin dans la résolution de cette équation. Un autre mathématicien (et… astrologue !), Gerolamo Cardan, réussit à capter la confiance de Tartaglia pour s'emparer de son savoir-faire et le faire savoir (en allant même un peu plus loin). Et ce qu'on connaît aujourd'hui pour la résolution de l'équation du troisième degré, ce sont les formules… de Cardan ! Quant aux formules donnant la résolution de l'équation du quatrième degré, c'est un élève de Cardan, Ferrari, qui les découvrit.

Évariste a le dernier mot

Mais au-delà du degré 4, les choses semblaient plus corsées. Et pour cause ! Ce n'est que trois siècles plus tard qu'un génie de vingt ans, Évariste Galois, prouva qu'à partir du cinquième degré, il n'existait pas de résolution systématique « par radicaux ».

par Elisabeth Busser

D'impossibles problèmes

La quadrature du cercle est, de nos jours, symbole de problème impossible à résoudre. L'antiquité nous a légué plusieurs de ces problèmes dont l'impossibilité n'a été comprise qu'au XVIII^e siècle et démontrée au XIX^e.

Ferdinand von Lindemann est né à Hannovre en 1852 et mort à Munich en 1939. Il prouva la transcendance du nombre π et donc l'impossibilité de la quadrature du cercle à la règle et au compas.

En mathématiques, tout se démontre, et on doit pouvoir un jour résoudre tous les problèmes, pourrait-on s'imaginer. C'est vrai qu'il naît chaque jour dans le monde quelques centaines de théorèmes, mais il existe malgré cela des conjectures qu'on met des siècles à transformer en théorèmes, des problèmes non résolus et aussi… des problèmes impossibles à résoudre !
Certaines questions ont en effet fait trébucher même les plus acharnés et ceci à toutes les époques, jusqu'à ce qu'un jour, un plus tenace (ou plus malin, ou mieux armé) qu'eux fasse la preuve qu'on ne peut y apporter de réponse.

La diagonale infernale

Tout a commencé avec $\sqrt{2}$.

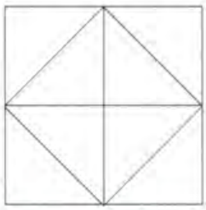
— *Si l'on donnait au côté de ce carré 2 pieds de long, quelle serait sa surface ?* demanda Socrate au jeune esclave.

— *Quatre, Socrate.*

— *Ne pourrait-on avoir un autre carré, de surface double de celui-ci ?* insistait Socrate. *Essaie de me donner la longueur de chaque côté de ce nouvel espace.*

— *Le double, évidemment*, répondit l'adolescent.

— *C'est donc sur cette nouvelle ligne que sera construite la surface de 8 pieds*, dit Socrate, *mais ce nouvel espace n'est-il pas 4 fois plus grand, et une chose 4 fois plus grande en est-elle le double ?*



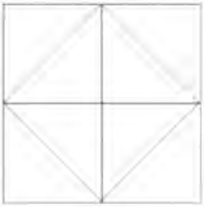
Les 4 carrés

— *Non, par Zeus*, s'écria l'esclave.

— *Pour l'espace de 8 pieds, il faut donc une ligne plus longue que la pre-*

mière, et plus courte que la seconde, affirma Socrate. *Si tu aimes mieux ne pas faire de calculs, montre-la nous.*
— Par Zeus, Socrate, je n'en sais rien !

Alors, Socrate, l'air de rien, trace cette figure :



La figure de Socrate

— Voici quatre lignes égales qui enferment un nouveau carré. Combien y a-t-il de moitiés dans le carré du milieu ?
— Quatre, Socrate.
— Combien de pieds a alors ce carré-ci ? demanda Socrate en montrant le carré central.
— 8.

Et le tour est joué : le fameux carré de côté 8 est construit sur la diagonale du carré de côté 4. $\sqrt{2}$ était né, et avec lui tous les nombres irrationnels, qui effrayèrent tant les Grecs parce qu'ils étaient incommensurables avec les entiers.

Petit séjour en enfer

D'autres nombres infernaux sont nés par la suite : π, défini par Archimède (287-212 avant Jésus Christ) aussi bien comme le rapport de la surface d'un disque au carré de son rayon que celui de son périmètre à son diamètre, et dont il donnera un bon encadrement :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$

Cet encadrement fait penser que ce nombre n'est pas rationnel. Pour la démonstration de l'irrationnalité de π, on dut cependant attendre le XVIII^e siècle (Lambert). Ceci accentue la différence de nature entre π et $\sqrt{2}$. Non seulement le carré de π est irrationnel (Legendre 1752-1833), alors que celui de $\sqrt{2}$ ne l'est pas, mais π n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers. On dit qu'il est transcendant.

Les nombres π et $\sqrt{2}$, bien que d'essences très différentes, ont cependant un lien : leur base géométrique. Que dire alors des imaginaires, comme i, inventé pour donner une solution complètement virtuelle à l'équation $x^2 + 1 = 0$?

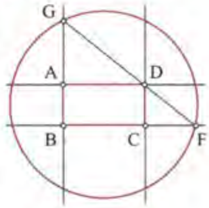
Ces nombres, sans avoir aucune signification géométrique concrète, sont cependant porteurs d'énormes espoirs pour résoudre en particulier des problèmes géométriques.

Des jalons historiques

Nombres et géométrie semblent donc intimement liés, mais il a fallu des siècles de mathématiques pour reconnaître et apprivoiser ces liens. Les exemples historiques de ce long cheminement sont nombreux. À l'origine de chacun de ces parcours, très souvent un problème pratique, parfois devenu légende.

Celui de la *duplication du cube* en est l'un des premiers exemples. Le problème ressemble un peu à celui de la duplication du carré évoqué plus haut : On raconte, écrit Eratosthène au roi Ptolémée III, qu'un auteur tragique a mis en scène Minos demandant de faire doubler le volume d'un tombeau cubique. Les géomètres grecs traduisirent très vite ce problème en termes de

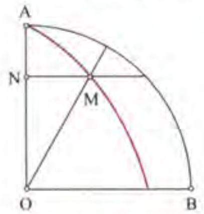
La construction d'Apollonius



Soit ABCD un rectangle de centre E dont la longueur est double de la largeur. Soit E un cercle de même centre. Il coupe (AB) en G et (BC) en F, de manière que G, D, F soient alignés, DG et DF sont les nombres x et y cherchés.

Malheureusement, il n'existe pas de moyen de construire le cercle en question à la règle et au compas.

La quadratrice d'Hippias



La droite (OM) pivote autour de O, de (OB) vers (OA) d'un mouvement uniforme. De même, la parallèle (NM) à (OB), partant de B, se déplace d'un mouvement de translation uniforme jusque sur (OA), où elle arrive en même temps que (OM). Leur intersection M décrit la quadratrice.

Cette courbe fut inventée par Hippias pour résoudre à la fois le problème de la quadrature du cercle et celui de la trisection de l'angle avant Newton.

nombres : doubler un cube d'arête a, c'est insérer entre a et $2a$ deux nombres x et y tels que :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{x} = \frac{2a}{y}.$$

À part extraire des racines cubiques approchées, les Grecs n'iront pas plus loin, et ne donneront à ce problème que des solutions obtenues par tâtonnements.

Autre problème historique : celui de la *trisection de l'angle* : il ne fut pas résolu avec plus de bonheur dans l'Antiquité. À première vue, il paraît simple : couper en trois un angle, à la règle et au compas.

$\frac{1}{3}$ a l'air pourtant bien plus simple que $\sqrt[3]{2}$, et on sait déjà couper en trois un angle droit, se dirent les Grecs. On devrait y arriver !
Simplifions le problème en le ramenant à la trisection de l'angle aigu.
La question eut ainsi beaucoup de réponses, nécessitant souvent des tracés point par point de courbes aux noms fleuris : la quadratrice d'Hippias ou la spirale d'Archimède, mais de construction rigoureuse, point.

Impossibilités

Les deux problèmes historiques de la duplication du cube et de la trisection de l'angle ont passionné les savants jusqu'en 1837 où Pierre Laurent Wantzel, mathématicien français de 23 ans, répétiteur à l'École Polytechnique, clôt le débat en démontrant leur impossibilité. Il suivit pour ce faire la voie ouverte par Descartes : celle de la traduction algébrique d'un problème de géométrie, et énonça clairement qu'il était impossible de trouver une expression algébrique finie de $\sqrt[3]{2}$, en termes de racines carrées, de même qu'une expression algébrique finie de sin (x/3) à partir de sin x et de racines carrées. Tout espoir de construction à la règle et au compas s'effondrait donc.

Quadrature du cercle

Problème plus ancien encore, expression devenue mythique de la question sans réponse, la quadrature du cercle a fait, lui aussi, couler beaucoup d'encre. Il s'agit ici de s'attaquer, ni à $\sqrt[3]{2}$, ni à 1/3, mais à π, en construisant un carré de même aire qu'un cercle donné. Le plus vieux document relatif à ce problème est le papyrus Rhind, recopié par un scribe vers 1800 avant Jésus Christ.
Les Égyptiens — et ce n'est déjà pas si mal — assimilaient le cercle à un carré dont le côté est les 8/9 du diamètre. Quand on pense que, si a est le côté du carré, d le diamètre du cercle, ils doivent vérifier :

$$a^2 = \pi\frac{d^2}{4}$$

donc a/d = 0,886 à 0,001 près et que 8/9 = 0,889 à 0,001 près, on peut être admiratif.

Les Grecs, eux, en plus de la méthode d'Archimède donnant des encadrements de π de plus en plus fins, ont cherché, avec Hippocrate de Chio, la quadrature exacte. Sans arriver jusqu'à résoudre géométriquement le problème, le savant grec calcula l'aire exacte des lunules qui portent son nom.

Par la suite, le problème de la quadrature du cercle est resté pendant des siècles celui des approximations de π (voir l'article intitulé *Le fabuleux* *nombre* π dans ce numéro). Les Arabes, les Occidentaux jusqu'au XVII^e siècle, avec les calculs de Ludolph en 1586 puis ceux de Huygens en 1651, n'ont fait que reprendre et affiner les travaux des géomètres grecs. À partir du XVII^e siècle, les recherches se firent analytiques, avec Viète et Wallis.

Cependant, des doutes étaient nés dans quelques esprits : et si la quadrature du cercle était un problème impossible ? C'est James Gregory qui, le premier, décela en 1667 la faille, tentant, mais en vain, de démontrer que π était transcendant. La brèche étant ouverte, c'est Lindemann qui, en 1882, s'y engouffra, établissant enfin la transcendance de π, ce qui achève le chapitre de la quadrature du cercle, qu'on peut désormais ranger au nombre des problèmes impossibles.

Voici résolus par la négative les trois grands problèmes de la géométrie antique, mais que de perspectives toutes leurs tentatives de résolution n'ont-elles pas ouvertes ? Développement de la trigonométrie, nombres irrationnels, nombres transcendants, liens étroits entre nombres et géométrie, utilisation de résolution analytique de problèmes de géométrie, algorithmes de calcul de $\sqrt{2}$ et de π, autant de branches des mathématiques que la recherche de ces problèmes a contribué à développer.

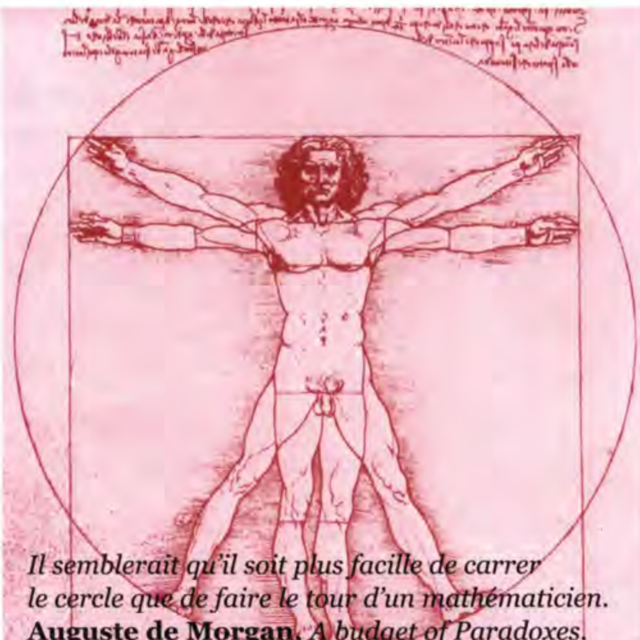
Aujourd'hui encore

Et maintenant ? Les problèmes ouverts sont encore innombrables, tels les 23 que posa Hilbert au II^e Congrès International des mathématiques, le 8 août 1900 à Paris. Quelques-uns ont été résolus depuis, et le premier d'entre eux d'une drôle de façon. Il s'agissait en l'occurrence de démontrer qu'il n'existait pas d'ensemble dont le cardinal est strictement compris entre celui de $\mathbb{N}$, noté ω, et celui de $\mathbb{R}$, 2^ω (hypothèse dite du continu). Eh bien, c'est en 1963 que Paul Cohen démontra que cette proposition était indécidable. Cela signifie en clair que, si la théorie des ensembles est non contradictoire, on peut lui ajouter, sans nuire à sa cohérence, aussi bien l'hypothèse du continu que son contraire !

Cent ans après, le 24 mai 2000, un mécène américain, Landon Clay, fondateur du Clay Institute, renouvelle l'expérience au travers d'une série d'énigmes mathématiques, les sept problèmes du millénaire, offrant pour la résolution de chacun d'eux un million de dollars.

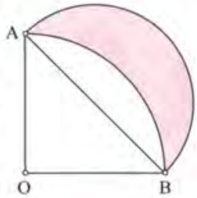
Y a-t-il parmi eux des problèmes indécidables ? des problèmes impossibles ? Nul ne le sait aujourd'hui, mais la recherche mathématique a encore de beaux jours devant elle.

E. B.



Il semblerait qu'il soit plus facile de carrer le cercle que de faire le tour d'un mathématicien.
Auguste de Morgan, *A budget of Paradoxes.*

Lunule d'Hippocrate



L'aire de la partie grisée appelée lunule à cause de sa forme est égale à celle du triangle AOB.

Les courbes délimitant la lunule sont des arcs de cercle de centre O et de diamètre AB.

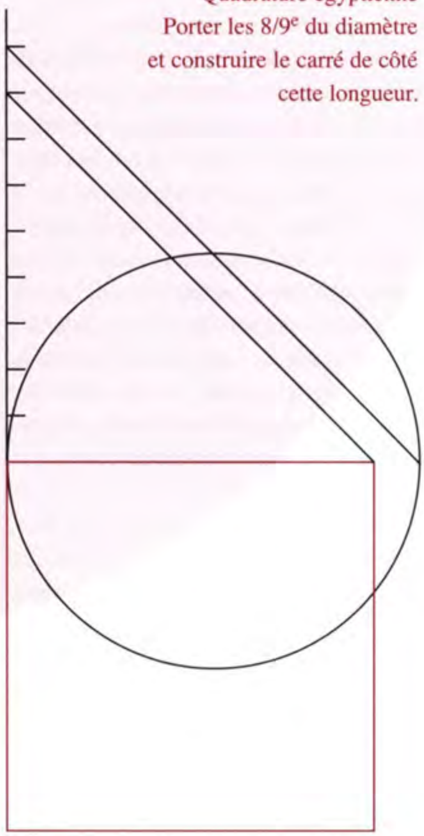
Le cercle enfin carré

La quadrature du cercle n'est plus impossible à condition de suivre des règles bien particulières. En fait, si on veut bien se contenter d'une solution approchée, rien n'est plus simple !

Comment carrer le cercle (ou presque) ? D'après le théorème de Thalés, il suffit de chercher des approximations rationnelles de $\sqrt{\pi}$. Un logiciel de calcul symbolique (voir page 94) nous donne les approximations rationnelles 2, 7/4, 16/9, 23/13, 39/22, etc. Avec 16/9, nous retrouvons une construction utilisée par les égyptiens qui, n'ayant pas d'ordinateurs, l'avaient sans doute trouvée autrement.

Un cercle de rayon R étant donné, on construit un carré de côté les 16/9^e de R. En termes modernes, cela revient à remplacer πR^2 par $[(16/9)R]^2$ c'est-à-dire π par $(16/9)^2 = 3{,}16$ à 10^{-2} près. Il s'agit d'une solution approchée mais l'erreur est relativement faible.

Quadrature égyptienne
Porter les 8/9^e du diamètre et construire le carré de côté cette longueur.



Utilisation du théorème de Thalès

Pour construire les 8/9^e du diamètre donné, tracez une demi droite d'origine l'une de ses extrémités et portez 9 fois une même longueur à l'aide d'un compas.

Tracez alors la droite menant l'autre extrémité du diamètre à la dernière trace de compas puis la parallèle à cette droite passant par la huitième.

La dernière droite tracée porte sur le diamètre un segment de longueur égale à ses 8/9e. Il ne vous reste plus qu'à construire un carré ayant pour côté ce segment pour finir votre quadrature approchée du cercle.

Nous sommes de même capables de construire à la règle et au compas les 23/13e ou les 39/22e d'un diamètre et ainsi d'améliorer la quadrature égyptienne. Avec cette seconde approximation, nous obtenons une très bonne précision puisque $(39/22)^2 = 3{,}142$ à 10^{-3} près.

Il faut cependant reconnaître que la construction est un peu laborieuse. Pour l'améliorer, il faut sans doute réfléchir un petit peu plus.

Au delà du rationnel

D'après le théorème de Pythagore, si p et q sont constructibles alors $\sqrt{p^2 + q^2}$ l'est de même.
Ainsi, nous pouvons construire sans aucune difficulté théorique les segments dont la longueur est de la forme :

$$\frac{a\sqrt{b} + c\sqrt{d}}{q}.$$

Nous cherchons donc les 5-uplets (a, b, c, d, q) tels que la quantité ci-dessus approxime $\sqrt{\pi}$ le mieux possible.
Nous trouvons à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique

$$\frac{3+5\sqrt{5}}{8}, \frac{\sqrt{17}+7\sqrt{6}}{12}$$

et bien d'autres.
Le premier donne une précision de 10^{-4} et le second de 10^{-5} mais ce dernier donne une construction moins esthétique.

H. L.

F. von Lindemann

En continuant la méthode ci-dessus, on montre que si la quadrature du cercle à la règle et au compas était possible alors le nombre π serait racine d'une équation à coefficients entiers. De tels nombres sont dits algébriques. Voilà maintenant plus d'un siècle que Lindemann a montré que π n'était pas algébrique (on dit *transcendant*), la quadrature est donc impossible.

Le résultat général montré par Lindemann est le suivant :

si $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des nombres algébriques distincts et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres algébriques non tous nuls alors la quantité :

$$a_0 e^{\alpha_0} + a_1 e^{\alpha_1} + \dots + a_n e^{\alpha_n} \text{ est non nulle.}$$

On en déduit la transcendance du nombre e puis celle de π en utilisant la formule d'Euler :

$$e^{i\pi} = -1$$

Le problème de la quadrature du cercle est ainsi sorti du domaine scientifique pour rentrer dans celui du jeu. Qui s'en plaindra ? Ni les fervents des seules mathématiques utiles, ni ceux des mathématiques ludiques sans doute. Encore moins le sage qui pense qu'il y a un temps pour tout.

par Hervé Lehning

Solutions

Enoncés page 66

1.Considérer la somme des quatre premiers nombres (10). Elle est égale à deux fois S d'où le résultat. Il n'existe que deux décompositions de 5 en somme de deux nombres entre 1 et 4 d'où l'impossibilité d'un carré magique d'ordre deux.

2.Considérer la somme des neuf premiers nombres (45). Elle est égale à trois fois S d'où le résultat. Montrer ensuite que 5 est le seul nombre qui entre dans quatre décompsitions de 15 en somme de trois nombres. En déduire qu'il est au centre. Remarquer ensuite que 1 n'intervient que dans deux décompositions de 15. En déduire que 1 est au centre d'un côté. Complèter ensuite le carré. Conclure.

3.Montrer d'abord que $S = 34$. Trouver la seule façon de décomposer 13 en somme de deux nombres non utilisés (6 et 7). Placer alors les nombres de proche en proche dans le carré central. Résultat : 11, 10, 7, 6 dans l'ordre. Examiner alors la dernière ligne. Résultat :

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

4.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Enoncés page 73

Le paradoxe du mensonge

Si les soldats ne pendent pas l'homme alors il a menti donc il doit être pendu. S'ils le pendent alors il a dit la vérité et ne devait pas être pendu.

Nous irons tous au paradis

Une question judicieuse est :

Que me répondra l'autre gardien si je lui demande où est la porte du Paradis ?

Il vous faudra alors prendre l'autre porte que celle qui vous est indiquée car il y aura toujours un et un seul mensonge dans l'histoire.

Enoncés page 77

Aire de la cycloïde

L'aire $A(t + \delta t) - A(t)$ est approximativement celle d'un rectangle de hauteur $y(t)$ et de base $x(t + \delta t) - x(t) = \delta x$. Dans l'expression de cette dernière quantité apparaît la différence :

$$\sin(t + \delta t) - \sin(t)$$

La transformer en utilisant les formules de trigonométrie puis l'approximer en confondant $\sin u$ avec u pour u "petit". En déduire l'approximation demandée.

Pour B, faire de même en utilisant les formules de trigonométrie. En déduire le résultat pour le rapport de la diiférence de C entre $t + \delta t$ et t à δt.

En utilisant la notion de dérivée, en déduire que C est constante (sinon admettre le résultat). En déduire le résultat.

Enoncés page 121

Nombre d'or

Ecrire $x^2 - x$ sous forme canonique. En déduire que l'équation proposée équivaut à

$(x - 1/2)^2 = 5/4$. En déduire que le nombre d'or vaut $(1 + \sqrt{5}) / 2$. Multiplier la relation donnant ϕ soit $\phi^2 = \phi + 1$ par ϕ^n pour en déduire que ϕ^n vérifie la relation demandée. Procéder de même pour $-1/\phi$.

Suite de Fibonacci

En remarquant que $-1/\phi$ est l'autre racine de l'équation proposée, montrer que ce nombre est égal à $(1 - \sqrt{5}) / 2$. En déduire que le système propsé équivaut à :

$a + b = 1$

$a - b = 0$

Résoudre ce système. Résultat : $a = b = 1/2$.

Montrer que la suite v_n définie par

$v_n = u_n - [a\phi^n + b/(-1/\phi)^n]$ vérifie également la relation : $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$. Montrer alors que le fait que ses deux premiers termes soient nuls allié à cette relation suffit pour en déduire que v_n est nul et donc le résultat demandé.

Montrer que le rapport considéré est égal à ϕ multiplié par le rapport de $1 + (-1/\phi^2)^{n+1}$ et de $1 + (-1/\phi^2)^n$ qui tendent tous les deux vers 1. D'où le résultat.

Enoncés page 125

Elimination

Le système équivaut à $y = 12 - x$ et $(x - 6)^2 = 16$. d'où les deux solutions (2,10) et (10,2).

Changement de variables

Le système équivaut à $y = 20 / x$ et $(x^2 - 52)^2 = 48^2$ d'où les quatre solutions (2,10), (10,2), (-2,-10) et (-10,-2).

Transformations d'équations

Le système équivaut à $xy = 8$ et $x^2 + y^2 = 20$ donc à $y = 8 / x$ et $(x^2 - 10)^2 = 6^2$ d'où les quatre solutions (2,4), (4,2), (-2,-4) et (-4,-2).

A la manière de Fermat

Le reste d'un cube dans la division par 9 est 0, 1 ou 8. Pour le démontrer, développer $(a+3)^3$ et en déduire que $(a+3)^3$ et a^3 ont le même reste dans la division par 9. Calculer les restes possibles de la somme de deux cubes, conclure.

A la manière de Golbach

Poser $p = 2k + 1$ et calculer $(k + 1)^2 - k^2$. Pour la réciproque, supposer que $p = y^2 - x^2$. Développer ce dernier terme en $(y - x)(y + x)$. Utiliser le fait que p est premier pour en déduire que $y - x = 1$. Conclure.

A la manière de Mersenne

Penser à la somme géométrique de raison 2^p plus précisément à : $1 + 2^p + ... + (2^p)^{q-1}$

Elle est égale au rapport des deux nombres donnés. Si n n'est pas premier, le décomposer en $n = pq$ pour conclure.

Utiliser un logiciel de calcul symbolique (voir page 60). M_{19}, M_{61} et M_{127} sont premiers, les autres sont composés. Plus précisément :

$M_{23} = 47 \, . \, 178481$

$M_{43} = 431 \, . \, 2099863 \, . \, 9719$

Enoncés page 131

Rentes romaines

Pour $39 \le n \le 49$, on a :

$$E_n - 1/2 = E_{n+1} + 1/2 = 58{,}5 - n$$

d'où $S_n = S_{n+1}$ et $M_n = 0$. Cette table n'est pas réaliste.

Une modélisation

L'utilisation d'un tableur montre que E_n croît de E_1=30,68 à E_6=40,51 et décroît ensuite jusqu'à $n = 93$, où la population est pratiquement éteinte.

Pour la table de Duvilard, il est naturel de choisir $a = 10^6$ et b= 100 puis d'en déduire les valeurs de $c\,(d^n - e^n)$; si l'on retient celles : λ, μ, ν pour trois valeurs de n, de la forme m, $2m$ et $3m$, c, d et e sont solutions du système de trois équations :

$$c\,(d^m - e^m) = \lambda,$$
$$c\,(d^{2m} - e^{2m}) = \mu,$$
$$c\,(d^{3m} - e^{3m}) = \nu,$$

d'où l'on déduit :

$$d^m + e^m = \mu/\lambda \text{ et}$$
$$d^{2m} + d^m e^m + e^{2m} = \nu/\lambda,$$

puis :

$$d^m e^m = (\mu/\lambda)^2 - (\nu/\lambda) \,;$$

connaissant la somme et le produit de d^m et e^m, on les calcule et on en déduit c, d et e ; encore faut-il choisir m pour que d et e soient compris entre 0 et 1.

Histoire des idées : l'époque classique

Leçons de calcul infinitésimal,
André Deledicq, Marc Diener, Paris, 1989
Analyse de infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes, Marquis de l'Hospital, réimpression, Paris, 1988
Nombre, mesure et continu, Jean Dhombres, Paris, 1978
Ecrits et mémoires mathématiques d'Evariste Galois,
Robert Bourgne, J-P Azra, Paris, 1962

Les nouvelles tendances

Le théorème de Gödel,
E.Nagel, J. Newman, K. Gödel, J.-Y. Girard, Paris, 1989
Chaos, fractals au quotidien,
Hervé Lehning, in *Tangente*, numéro 75, Paris, 2000
Representation of events in nerve nets and finite automata,
Stephen C. Kleene, in *Automata Studies* C.E. Shannon et J. McCarthy, Princeton, 1956

Évolution des techniques

Histoire des mathématiques,
Bouveresse J., Itard J., Salle E., Paris, 1977
Histoire des mathématiques,
Boll M., Paris, 1979
Éléments d'histoire des mathématiques,
Bourbaki N., Paris, 1980
Histoire des mathématiques,
Collette J.-P., Paris, 1979
Nombre, mesure et continu,
Dhombres J., Paris, 1978
Abrégé d'histoire des mathématiques,
Dieudonné J., Paris, 1978

Les grands problèmes

Numéro Spécial π,
supplément au Petit Archimède, Paris, 1980
Le fascinant nombre π,
Jean-Paul Delahaye, Paris, 1997
Théorie des corps, la règle et le compas,
Jean-Claude Carrega, Paris, 1981
Traité élémentaire de calcul des probabilités,
Sylvestre Lacroix, Paris, 1822, réimpression IREM Paris VII

Tangente

Publié par Les Éditions POLE
SAS au capital de 40 000 euros
Siège social :
80, bd Saint-Michel
75006 Paris
Commission paritaire :
1006 K 80883
Dépôt légal à parution

Directeur de Publication et de la Rédaction
Gilles COHEN

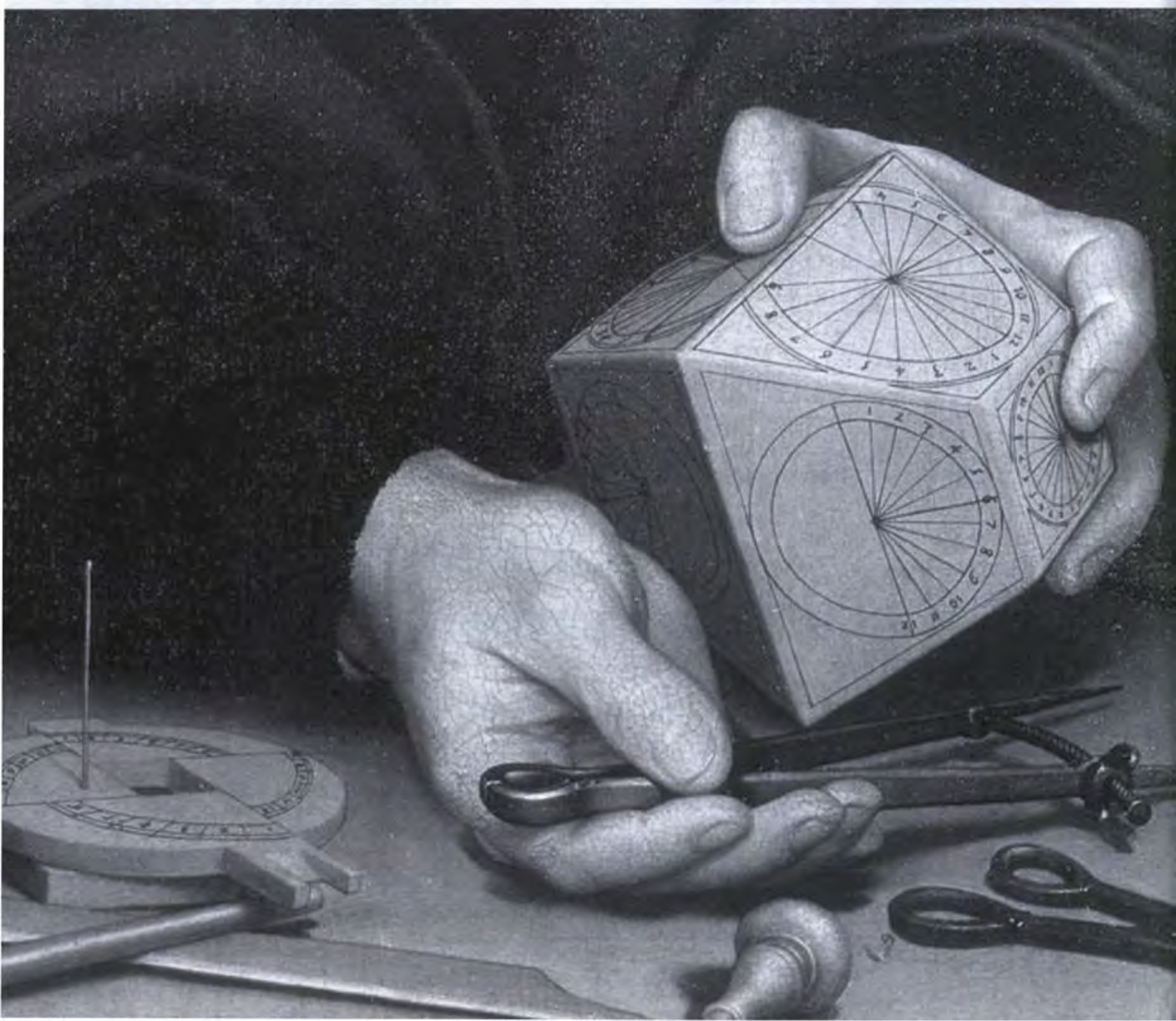
Rédacteur en chef du numéro
Hervé LEHNING

Auteurs de ce hors-série
Elisabeth BUSSER
Francis CASIRO
Gilles COHEN
Ahmed DJEBBAR
Jean-Paul GUICHARD
Paul-Louis HENNEQUIN
Hervé LEHNING
Henri LEMBERG
Jean-Christophe NOVELLI
Benoît RICHARD
Benoît RITTAUD
Daniel TEMAM
Norbert VERDIER
Chérif ZANANIRI

Secrétaire de rédaction
Gaël OCTAVIA

Maquette et iconographie
Laurence GAUTHIER
Francis CASIRO
VANO (illustrations)
Autres photos : droits réservés

Abonnements
Tél. : 01 39 98 83 50
Fax : 01 39 98 83 52



Achevé d'imprimer pour le compte des Éditions POLE
sur les presses de l'imprimerie Louisjean, 05000 Gap
Dépôt légal 51 - Janvier 2005

Tangente

Mille ans d'histoire des mathématiques

- Les étapes du millénaire
- Histoire des idées : l'époque classique
- Les nouvelles tendances
- Evolution des techniques
- Les grands problèmes

1001-2000 : mille ans marqués par un progrès continu des mathématiques.
Progrès des techniques : les mathématiciens forgent un système de numération pratique, inventent les logarithmes et le calcul symbolique, conçoivent des machines capables de les rempacer dans les tâches les plus ingrates.
Progrès des idées : Newton manie les infiniments petits, on découvre la théorie de Galois, le chaos succède à l'ordre du « grand horloger » et la logique d'Aristote fait place à celles de Boole et de Gödel.
Certes, l'accès au progrès mathématique ne s'est pas fait sans sueur. Le chemin de la modernité fut jonché de grands problèmes, qu'ils se nomment quadrature du cercle ou conjecture de Fermat, tenant en haleine des générations de mathématiciens.

ISBN 2-84884029-3
9 782848 840291

Diffusion : S313402
Prix : 18 €

POLE